Académie de Nantes

ECOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITE DU MAINE

LE MANS, FRANCE

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DU MAINE

Spécialité : ACOUSTIQUE

présentée par

Dominique RODRIGUES

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

METHODE DE RECIPROCITE : CARACTERISATION DE PETITS COMPOSANTS ACOUSTIQUES, ETALONNAGE DES MICROPHONES EN PRESSION ET EN CHAMP LIBRE

Soutenue le 24 octobre 2008

devant le jury composé de

P. HERZOG	Directeur de Recherche CNRS, LMA (Marseille), Rapporteur
K. RASMUSSEN	Professeur, DTU (Danemark), Rapporteur
Z. ŠKVOR	Professeur, ČVUT (Prague), Rapporteur
J. KERGOMARD	Directeur de Recherche CNRS, LMA (Marseille), Examinateur
S. MONTRESOR	Maître de Conférences, LAUM (Le Mans), Examinateur
N. JOLY	Maître de Conférences (HDR), LAUM (Le Mans), Examinateur
J.-N. DUROCHER	Ingénieur, LNE (Trappes), Promoteur de thèse
M. BRUNEAU	Professeur émérite, LAUM (Le Mans), Directeur de thèse
P. LOTTON	Chargé de Recherche CNRS (HDR), LAUM (Le Mans), Invité

Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au Laboratoire National de métrologie et d'Essais (LNE) en collaboration avec le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM), et a bénéficié d'un financement de l'ANRT (convention CIFRE). Ce travail de recherche n'aurait pu aboutir sans une réelle collaboration et un échange d'idées entre tous ceux qui y ont participé ; je tiens ici à les remercier.

Je tiens à adresser en tout premier lieu mes sincères remerciements à M. Bruneau et A.-M. Bruneau, Professeurs émérites à l'Université du Maine, pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser cette thèse dans d'excellentes conditions, pour leur soutien constant et la confiance qu'ils m'ont accordés. Tout au long de ces trois années, ils se sont toujours montrés disponibles et ont su orienter mes travaux tout en me laissant beaucoup d'autonomie. J'ai particulièrement apprécié l'ambiance chaleureuse dans laquelle ils m'ont encadré, ce qui a rendu cette expérience d'autant plus enrichissante. Pour tout cela, je les remercie vivement.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent également à J.-N. Durocher, Ingénieur au LNE, qui a initié les travaux de recherche dans lesquels s'insèrent mon travail de thèse. Il m'a accordé toute sa confiance en me confiant la responsabilité d'études importantes. Tout au long de ces trois années, il a su me transmettre un vif intérêt pour l'expérimentation, son contact fut la source d'un enrichissement constant.

Je tiens également à témoigner ma reconnaissance à C. Guianvarc'h qui a co-encadré une partie de ce travail de recherche, pour son soutien et ses précieux conseils.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent à K. Rasmussen, P. Herzog, et Z. Škvor qui me font l'honneur de prendre connaissance de ce travail et d'en être les rapporteurs.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury pour avoir accepté de juger ce travail.

J'adresse un grand merci à C. De Waubert, M. Hebert et C. Bartoli pour l'aide et les conseils qu'ils m'ont apportés, ainsi qu'aux personnes que j'ai côtoyées au LNE pour leur sympathie et leur bonne humeur.

Mes remerciements vont également aux personnes que j'ai côtoyées au LAUM, en particulier C. Potel, S. Durand et T. Le Van Suu pour leur accueil chaleureux à chaque fois que j'ai eu l'occasion de les rencontrer au Mans lors de mes séances de travail avec mes directeurs de thèse.

Enfin, je remercie Sandrine, ma compagne, ainsi que mes parents et frères pour leur soutien quotidien durant ces trois années.

Table des matières

Introduction générale....1

Chapitre 1

Méthode de mesure d'impédance de petits éléments acoustiques....7

1.1 Introduction....7
1.2 Méthode de mesure....8
1.3 Expression analytique de l'admittance acoustique de transfert de la cavité de couplage....9
1.4 Eléments utilisés comme références : modèles théoriques....13
1.4.1 Admittance d'entrée d'une fente ouverte à son extrémité....14
1.4.2 Admittance d'entrée d'un réseau de quatre tubes cylindriques....15
1.5 Résultats théoriques et expérimentaux, discussion....18
1.6 Conclusion....22

Chapitre 2

Modélisation analytique d'un microphone électrostatique : application à l'étalonnage des microphones en pression par la méthode de la réciprocité....25

2.1 Introduction....25
2.2 Modèle analytique d'un microphone électrostatique....26
2.2.1 Equations fondamentales du mouvement acoustique....27
2.2.2 Equation de propagation....28
2.2.3 Champ de pression acoustique dans la lame de fluide....34
2.2.4 Champ de déplacement de la membrane....34
2.3 Efficacité en pression....36
2.4 Modélisation globale du système d'étalonnage....40
2.4.1 Champs de déplacement des membranes et champs acoustiques....40
2.4.2 Résultats théoriques....43
2.5 Conclusion....45

Chapitre 3

Etalonnage en champ libre des microphones par la méthode de la réciprocité....49

3.1 Introduction....49
3.2 Principe de réciprocité en champ libre....50

3.2.1 Fonctionnement du transducteur en émetteur....51
3.2.2 Fonctionnement du transducteur en récepteur....52
3.2.3 Produit des efficacités en champ libre de deux microphones....54
3.3 Dispositif expérimental utilisé au LNE et difficultés de mesure....56
3.3.1 Dispositif expérimental....56
3.3.2 Sources de perturbations....59
3.4 Filtrage des fonctions de transfert mesurées....61
3.4.1 Principes généraux....62
3.4.2 Pré-traitement de la fonction de transfert....64
3.4.3 Synthèse de la fenêtre de filtrage....67
3.5 Résultats et incertitudes....71
3.5.1 Mesures et résultats....71
3.5.2 Incertitudes....74
3.6 Conclusion....77

Chapitre 4

Centre acoustique d'un microphone électrostatique....79
4.1 Introduction....79
4.2 Détermination analytique de la position du centre acoustique d'un transducteur électrostatique....80
4.2.1 Les équations fondamentales du problème....81
4.2.2 Solutions des équations fondamentales....84
4.2.3 Conditions aux interfaces....88
4.2.4 Pression acoustique en champ lointain....92
4.2.5 Evaluation théorique de la position du centre acoustique d'un microphone....93
4.3 Détermination expérimentale de la position du centre acoustique d'un microphone électrostatique....96
4.3.1 Principe général....96
4.3.2 Dispositif expérimental, mesures....99
4.3.3 Perturbations des mesures....100
4.3.4 Filtrage des fonctions de transfert, centres acoustiques....103
4.4 Conclusion....106

Conclusion générale....109

Annexe A

Equation de propagation en fluide thermo-visqueux, approximation onde quasi plane : application aux tubes et fentes....115
A.1 Formulation générale....115
A.2 Application aux tubes cylindriques (coupleurs et tubes étroits) et aux fentes annulaires….118

Annexe B

Solution modale du champ de pression dans une cavité cylindrique....121

Annexe C

Plans des coupleurs de haute précision utilisés pour la mesure d'impédance d'entrée d'une fente annulaire et d'un réseau de quatre tubes....125

C.1 Coupleur pourvu d'une fente annulaire de haute précision....125
C.2 Coupleur pourvu d'un réseau de quatre tubes de haute précision....135

Annexe D

Calculs intermédiaires dans la résolution des problèmes posés dans le chapitre 2....139

D.1 Calculs intermédiaires....139
D.2 Résolution du problème couplé....142

Annexe E

Propriétés utiles des fonctions de Bessel....149

Annexe F

Fiches synoptiques....151

F.1 Fiche synoptique de l'appareil de réciprocité [68]....151
F.2 Fiche synoptique de l'amplificateur Nexus [69]....152

Annexe G

Fenêtre de filtrage : techniques de synthèse, performances et paramètres d'influences....153

G.1 Synthèse d'une fenêtre de filtrage par la méthode de la fenêtre....153
G.2 Méthode itérative : performance des fenêtres de filtrages et paramètres d'influences....155

Annexe H

Etalonnage des microphones en champ libre par la méthode de réciprocité : bilan des incertitudes 161

H.1 Mesurande : efficacité en champ libre d'un microphone....161
H.2 Paramètres d'entrée, incertitudes....163
H.3 Incertitude composée élargie....169

Annexe I

Valeurs des paramètres d'un microphone électrostatique dans un modèle à constantes localisées..171

Annexe J

Centre acoustique des microphones électrostatiques : calculs intermédiaires et résolution matricielle du problème....173

J.1 Calculs intermédiaires....173
J.2 Résolution du problème couplé....177

J.3 Fonctions Kp.....181

Bibliographie.....183

Introduction générale

Le Système International d'unités (SI), est officiellement né en 1960 à partir d'une résolution de la 11ème Conférence générale des poids et mesures. Ce système permet de rapporter toutes les unités de mesure à un petit nombre d'étalons fondamentaux, et de consacrer tous les soins nécessaires à améliorer leurs définitions. C'est là une des missions des différents laboratoires nationaux de métrologie dont le Laboratoire National de métrologie et d'Essais (LNE). Au sein du LNE, la métrologie fondamentale vise à développer et à maintenir des étalons nationaux de référence, reconnus à l'échelle internationale, permettant à l'industrie de « raccorder » leurs instruments de mesure au système international d'unités. Les dispositifs de mesures tels que ceux utilisés pour mesurer les pressions acoustiques sont ainsi caractérisés par rapport à ces références. C'est ainsi que, depuis plusieurs années, le LNE cherche à renforcer sa position dans le domaine de la métrologie acoustique en améliorant les méthodes et techniques existantes pour l'étalonnage des microphones étalons ; par de-là, il cherche également à intégrer de nouvelles activités, dont l'audiométrie.

L'étalonnage absolu des microphones de mesure en acoustique repose sur l'obtention d'étalons primaires, eux-mêmes étalonnés suivant un protocole adapté (méthode de réciprocité) et conformément aux normes en vigueur. Ces normes ont fait l'objet d'améliorations au cours des dernières décennies mais des zones d'ombre subsistent, dont certaines sont mentionnées dans les rares articles publiés depuis vingt ans. Parallèlement, la caractérisation appropriée des oreilles artificielles, nécessaire au réglage des audiomètres (en particulier) et par suite à leur étalonnage, fait aujourd'hui défaut, avec des conséquences soulignées à l'heure actuelle dans les milieux médicaux et laboratoires spécialisés. Cette caractérisation nécessite l'utilisation de microphones étalonnés avec précision, mais nécessite aussi la modélisation précise (contrôlée par des mesures fines) des composants acoustiques qui constituent ces oreilles artificielles.

Ce propos met en cause la précision de l'étalonnage des étalons de mesure de pression acoustique et l'insuffisance des réglages d'appareils médicaux largement utilisés. Par delà, il met en cause l'insuffisance (et même l'absence) de procédés de mesure pour caractériser les systèmes en usage dans les réglages acoustiques de ces appareils médicaux et le manque de précision des modèles analytiques nécessaires à ces caractérisations et ces étalonnages. Les enjeux pratiques, techniques et scientifiques ont donc leur importance et les études à mener comportent des exigences qui nécessitent des recherches approfondies.

C'est ainsi que les thèmes abordés dans le présent mémoire font appel à la méthode de la réciprocité en cavité et en champ libre. Les microphones étalons de laboratoire sont étalonnés à l'heure actuelle par la méthode de la réciprocité, que ce soit pour un usage du microphone en pression (norme CEI 61084-2) ou en champ libre (norme CEI 61094-3). Ces méthodes nécessitent l'usage de trois microphones couplés deux à deux par un milieu de couplage, soit une cavité acoustique de forme cylindrique pour l'étalonnage en pression, soit un milieu infini pour l'étalonnage en champ libre. Quant à la caractérisation des composants acoustiques qui constituent

les oreilles artificielles (notamment), non seulement elle n'était pas jusqu'à présent accessible par la mesure en laboratoire, mais encore, la validité des modèles théoriques dont ils faisaient l'objet n'était justifiée le plus souvent que dans une bande fréquence de quelques centaines de hertz.

Dans la première partie de cette thèse, l'objectif visé est de mettre en œuvre et de valider une méthode de mesure d'impédance d'entrée de petits éléments acoustiques, tels que des tubes fins, des fentes fines, des petites cavités et leurs associations. Ces éléments étant très utilisés dans de nombreux systèmes acoustiques, dont les oreilles artificielles, plusieurs références proposent des modélisations analytiques de chacun d'entre eux et de leurs associations en fluide compressible dissipatif tout en prenant en compte des conditions aux frontières réalistes (conditions de non glissement et isotherme près des parois). Néanmoins, l'estimation des caractéristiques acoustiques de ces éléments à partir de modèles théoriques se traduit généralement par des incertitudes importantes non seulement en raison des approximations généralement retenues mais surtout en raison des incertitudes sur les dimensions géométriques de ces éléments. Ainsi, il est important de pouvoir caractériser expérimentalement leur comportement acoustique (à l'unité), en mesurant en l'occurrence leur impédance d'entrée avec une faible incertitude relative (de l'ordre de un pourcent).

Cette méthode de mesure de petits éléments acoustiques contribue à mettre en évidence les insuffisances actuelles de l'étalonnage des microphones en cavité par la méthode de la réciprocité. Ces insuffisances résident dans diverses approximations, dont l'influence des modes supérieurs dans la cavité de couplage (modes radiaux) sur les résultats des étalonnages. La norme CEI 61094-2 propose un modèle décrivant le comportement acoustique de la cavité de couplage en considérant la propagation d'ondes planes suivant l'axe de la cavité. Néanmoins, compte tenu de la non-uniformité du champ de déplacement de la membrane du microphone émetteur et des différences de diamètres (faibles) entre la cavité de couplage et la partie mobile de la membrane de chacun des deux microphones, l'influence des modes radiaux sur les résultats d'étalonnages est non négligeable, plus particulièrement en hautes fréquences. Des études précédentes concernant la modélisation « hautes fréquences » du champ acoustique non uniforme de la cavité de couplage sont ici prolongées par une modélisation du microphone lui-même en prenant en compte une déformée dynamique de la membrane aussi réaliste que possible (cette déformée résultant du couplage membrane/champs acoustiques pariétaux) et en proposant une ouverture sur des travaux futurs de nature à améliorer la modélisation des facteurs d'amortissement.

La deuxième partie de ce travail trouve son origine dans la comparaison clé CCAUV.A-K4 entre plusieurs laboratoires nationaux à laquelle j'ai participé directement (LNE, France ; CENAM, Mexique ; DPLA, Danemark ; INMETRO, Brésil ; KRISS, Corée du Sud ; NIST, Etats-Unis d'Amérique ; NMIJ, Japon ; NPL, Royaume-Uni ; PTB, Allemagne) portant sur les techniques d'étalonnage des microphones en champ libre. La difficulté rencontrée dans ces méthodes d'étalonnage expérimentales provient du traitement des perturbations à la fois acoustiques et électriques, qui restent importantes (malgré les précautions prises) en raison des faibles niveaux acoustiques mis en jeu. De ce fait, cette technique d'étalonnage fait appel à un dispositif de mesure de qualité, qui de nos jours, conduit à une incertitude de l'ordre de 0,12 dB sur les efficacités des microphones étalonnés. Dans le cadre de la comparaison clé, le LNE a cherché à améliorer le dispositif de mesure et la chaîne de traitement liés à cette technique d'étalonnage en champ libre. C'est l'objet du troisième chapitre de cette thèse que de présenter les bases théoriques sur lesquelles repose cette méthode d'étalonnage, de présenter le dispositif expérimental mis en œuvre au LNE, de répertorier les difficultés rencontrées, de présenter les solutions utilisées pour contourner ces difficultés et de préciser les améliorations apportées en regard de l'existant au niveau international.

Par ailleurs, l'étalonnage en champ libre des microphones électrostatiques par la méthode de la

réciprocité fait appel à la notion de centre acoustique des microphones. La détermination aussi précise que possible de la position de ce centre (en fonction de la fréquence) est primordiale du fait que la contribution de l'erreur sur cette position à l'erreur globale sur l'efficacité mesurée par réciprocité en champ libre est très grande. Au cours de la dernière décennie, le concept de centre acoustique des microphones électrostatiques a essentiellement fait l'objet d'études expérimentales. La méthode de mesure classique permet d'obtenir la position du centre acoustique d'un microphone à partir de mesures de la fonction de transfert entre un microphone émetteur et un microphone récepteur (telle qu'elle est préconisée par la norme CEI 61094-3 dans la méthode d'étalonnage par réciprocité), pour différentes distances entre les deux transducteurs. Les développements analytiques sont très peu nombreux, relativement anciens et ne portent pas sur les dispositifs de mesure auxquels nous sommes amenés à nous intéresser aujourd'hui. C'est ainsi que le dernier chapitre de cette thèse porte sur l'étude du concept de centre acoustique d'un microphone aussi bien sur le plan analytique que sur le plan expérimental, dans le but d'apporter un éclairage nouveau, en reprenant et en complétant les modèles analytiques et les résultats expérimentaux existants.

Pour les raisons qui apparaissent dans les propos qui précèdent, les travaux mis en œuvre afin de répondre aux objectifs portent aussi bien sur des études expérimentales que théoriques. Par ailleurs, ils posent les bases des travaux futurs qui permettront de réduire encore certaines causes d'incertitudes mais également bien au-delà, de prévoir la mise en œuvre de méthodes adaptées à la métrologie des capteurs du futur qui seront fabriqués par des procédés relevant des microtechnologies. Ils montrent enfin la nécessité aujourd'hui de compléter les acquis actuels en prévoyant notamment des études par simulations numériques qui peuvent désormais être menées grâce aux avancées récentes dans les méthodes numériques de calculs de champs acoustiques en fluides dissipatifs, compte tenu des couches limites thermo-visqueuses associées, en toutes situations, y compris celles où certaines dimensions des domaines étudiés sont du même ordre de grandeur que l'épaisseur de ces couches limites.

Première partie

Méthode de réciprocité en pression

Chapitre 1

Méthode de mesure d'impédance de petits éléments acoustiques

1.1 Introduction

De nombreux systèmes acoustiques (oreille artificielle, haut-parleur, microphones, miniaturisés ou non, ou bien définissant des systèmes de mesures précis pour la détermination de la constante de Boltzmann [1]) sont conçus à l'aide d'éléments dont les dimensions peuvent parfois être du même ordre, plus petit, voir très petit devant la longueur d'onde considérée. Dans ces systèmes (généralement décrits dans les basses fréquences à l'aide de modèles à constantes localisées), les facteurs d'amortissement, d'élasticité et d'inertie peuvent respectivement être obtenus au moyen de tubes étroits où de fentes, de petites cavités et de tubes courts. Ces éléments étant très utilisés, de nombreuses références tels que les ouvrages [2,3] proposent des modélisations analytiques de chacun d'entre eux et de leurs associations en fluide compressible dissipatif tout en prenant en compte des conditions aux frontières réalistes (conditions de non glissement et isotherme près des parois). Néanmoins, l'estimation des caractéristiques acoustiques de ces éléments à partir de modèles théoriques se traduit généralement par des incertitudes relatives supérieures à cinquante pour-cent en raison des incertitudes sur les dimensions géométriques de ces éléments.

Ainsi, il est important de pouvoir caractériser expérimentalement le comportement acoustique de ces éléments (ou de leurs associations), soit pouvoir mesurer leurs impédances d'entrée avec une bonne précision (avec une incertitude relative de l'ordre de un pour-cent). Ceci était très difficile, voir impossible jusqu'à présent du fait que ces impédances d'entrée sont en général très grande devant celles mises en jeu dans les dispositifs de mesure. De tels dispositifs de mesure d'impédances acoustiques nécessitent généralement deux transducteurs, un lié aux variations de pression acoustique et un autre lié au débit (ce dernier étant généralement la source d'énergie). En général, l'étalonnage de ces dispositifs de mesure est effectué à l'aide du même système de couplage que celui utilisé pour les mesures d'impédances, ce qui peut être discuté, ceci dans le but d'obtenir des résultats utilisables dans la pratique avec les techniques actuellement disponibles (un état de l'art de ces techniques est effectué dans les références [4,5]). Ceci est plus particulièrement vrai lorsque les éléments sont petits et doivent être caractérisés dans une large gamme de fréquence (typiquement de 20 Hz à plus de 20 kHz).

Afin de répondre au problème posé, la méthode de mesure d'impédances proposée dans ce chapitre repose sur les avancées effectuées dans le cadre de la métrologie fine et plus particulièrement l'étalonnage des microphones en pression par la méthode de la réciprocité [6,7,8,9,10]. La méthode de la réciprocité fait usage d'un matériel d'une grande sensibilité et d'une

grande reproductibilité et est donc particulièrement bien adaptée pour effectuer des mesures précises d'impédances d'entrée de petits éléments acoustiques. C'est l'objet de ce chapitre que de présenter cette méthode de mesure, de l'expérimenter sur des éléments simples et de discuter des précisions accessibles. L'oreille artificielle décrite dans la Norme CEI 60318-1 [11] est un exemple représentatif des systèmes acoustiques contenant ce type de petits éléments, soit une fente annulaire mince et quatre tubes étroits connectés à des cavités de volumes différents. Ces éléments sont utilisés dans le cadre de cette étude comme références pour la validation de cette méthode de mesure d'impédances d'entrée.

1.2 Méthode de mesure

Le cœur du dispositif de mesure est constitué d'une cavité cylindrique (figure 1.1) d'une longueur ℓ (5,111 mm ou 4.639 mm) et d'un rayon a du même ordre de grandeur (4,650 mm), tous deux très grands devant l'épaisseur des couches limites viscothermiques de sorte que l'expression analytique du nombre d'onde peut être donnée par l'approximation rappelée en Annexe (Eq. A.21) (cf. § 1.3). La cavité de couplage est fermée à ses extrémités par les membranes de deux microphones électrostatiques réciproques, un étant utilisé en émetteur (efficacité en pression M_{pe}, rayon a_e) en $z=0$ et l'autre étant utilisé en récepteur (efficacité en pression M_{pr}, rayon a_r) en $z=\ell$. Les rayons a_e et a_r sont légèrement inférieurs au rayon a de la cavité de couplage. Les membranes de l'émetteur et du récepteur sont animées respectivement des vitesses v_e (imposée) et v_R (due au champ de pression sur la membrane).

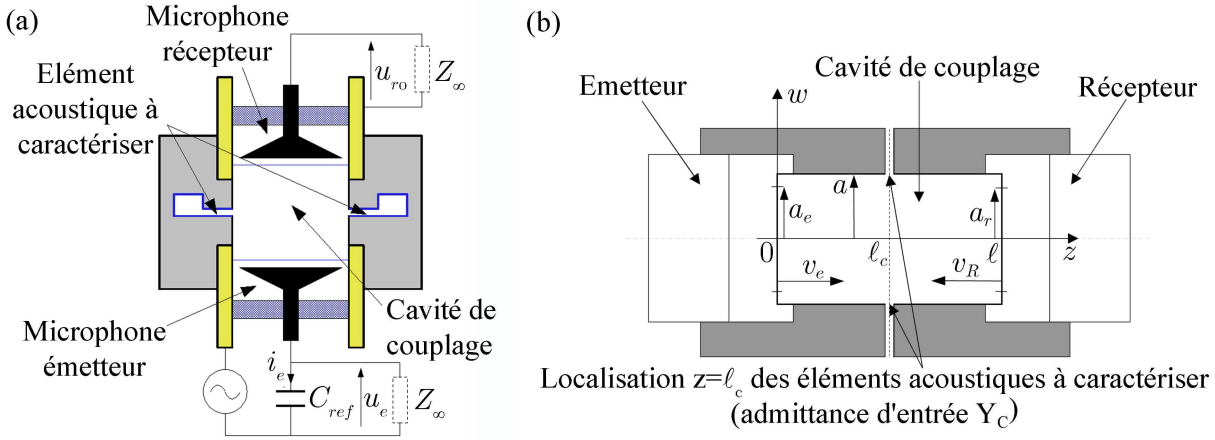


Figure 1.1. Dispositif de mesure (a), notations (b) : cavité cylindrique (coupleur) de longueur ℓ et de rayon a, deux membranes de microphones de rayons a_e (émetteur) et a_r (récepteur) localisées respectivement en $z=0$ et $z=\ell$.

L'admittance d'entrée Y_c à mesurer (définie comme le rapport entre le débit et la pression acoustique à l'entrée de l'élément à caractériser), est localisée en paroi de la cavité de couplage en $z=\ell_c$ et $w=a$ sur une surface σ_c très petite devant la surface latérale de la cavité. Suivant les techniques de mesure par réciprocité décrites par exemple dans les normes [8], les quantités à déterminer sont : l'admittance électrique de transfert Y_E et l'admittance acoustique de transfert Y_T. L'admittance électrique de transfert Y_E est définie comme le quotient du courant i_e qui alimente le microphone émetteur par la tension à circuit ouvert u_{r0} aux bornes du microphone

$$Y_E = \frac{i_e}{u_{r0}} \tag{1.1}$$

et l'admittance acoustique de transfert Y_T est définie comme le quotient du débit q_e de la

membrane de l'émetteur en court circuit acoustique par la pression $p(\ell)$ sur la membrane du récepteur

$$Y_T = \frac{q_e}{p(\ell)}\,, \tag{1.2}$$

où le débit en court circuit acoustique est donné par l'expression

$$q_e = S_e v_e + Y_e\, p(0)\,, \tag{1.3}$$

où Y_e est l'admittance acoustique du microphone émetteur et $S_e = \pi a_e^2$.

Lorsque le coupleur est totalement clos (cavité sans élément à caractériser, soit $Y_c = 0$), l'expression analytique de l'admittance acoustique de transfert [9,10] (cf. § 1.3), notée Y_T^0 et la mesure de l'impédance électrique de transfert, notée Y_E^0 conduisent au produit des efficacités en pression des deux microphones [8] :

$$M_{pe} M_{pr} = \frac{Y_T^0}{Y_E^0}\,. \tag{1.4}$$

Ainsi, la mesure de l'admittance électrique de transfert Y_E lorsque l'élément à caractériser est placé en paroi de la cavité de couplage, donne l'admittance acoustique de transfert

$$Y_T = M_{pe} M_{pr} Y_E\,, \tag{1.5}$$

ou, en reportant l'équation (1.4),

$$Y_T = \frac{Y_T^0}{Y_E^0} Y_E\,. \tag{1.6}$$

Ainsi, en exprimant l'admittance acoustique de transfert Y_T comme une fonction de l'admittance inconnue Y_c, l'admittance Y_c de l'élément à caractériser peut être obtenue, les quantités mesurées étant les admittances électriques de transfert (Eq. 1.1) Y_E et Y_E^0 respectivement avec et sans élément en paroi de la cavité de couplage (cf. § 1.3). La procédure utilisée pour leurs mesures est donnée dans la référence [8] (cf. § 3.3.1) et se résume ainsi : la tension à circuit ouvert u_{r0} est obtenue en utilisant la technique de la tension insérée [8] et le courant i_e alimentant le microphone émetteur est déduit d'une mesure de tension $u_e = i_e / (j\omega C_{ref})$ aux bornes d'une capacité de référence et étalonnée C_{ref} (figure 1.1.a).

En pratique, les dimensions de la cavité pourvue de l'élément à caractériser sont légèrement différentes de celles de la cavité totalement close (sans élément en paroi). Néanmoins, ces dimensions sont suffisamment proches les unes des autres de sorte que le même modèle peut être utilisé pour la modélisation des deux admittances acoustiques de transfert Y_T^0 et Y_T.

Ainsi, la méthode de mesure proposée bénéficie des procédures optimisées dans le cadre de l'étalonnage en pression par la méthode de la réciprocité des microphones étalons de laboratoire ainsi que du matériel de mesure de précision correspondant [6,8,9,10].

1.3 Expression analytique de l'admittance acoustique de transfert de la cavité de couplage

Comme il a été dit précédemment, l'obtention de l'expression analytique de l'admittance

acoustique de transfert Y_T définie par les équations (1.2) et (1.3) nécessite d'exprimer le champ de pression dans la cavité de couplage en tenant compte des effets des couches limites thermovisqueuses et de la présence de l'admittance Y_c de l'élément placé en paroi de la cavité de couplage. Cette modélisation du champ de pression dans la cavité de couplage s'effectue à l'aide de la formulation classique en fluide thermo-visqueux (références [9,10,12], reportées en Annexe A.1). Elle conduit à des résultats suffisamment précis pour tirer profit du dispositif de mesure de haute précision utilisé pour l'étalonnage primaire des microphones par le principe de réciprocité (0,01 dB), du moins tant que l'hypothèse onde quasi plane retenue reste valable (cf. fin de la remarque du paragraphe 1.3).

En supposant d'une part que les rayons a_e et a_r des membranes sont sensiblement égaux au rayon a de la cavité de couplage et d'autre part que l'admittance d'entrée Y_c de l'élément à caractériser conduit à un champ de pression dans la cavité indépendant des coordonnées (w,θ), ce qui permet de décrire le champ de pression comme une superposition d'ondes planes se propageant dans les deux sens suivant l'axe z de la cavité cylindrique, indépendantes des coordonnées r et θ et satisfaisant aux conditions aux limites thermo-visqueuses, le système d'équations décrivant le champ de pression acoustique dans la cavité prend alors la forme suivante.

i. Equation de propagation [9], Eq. (A.18)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_z^2\right)p(z)=0\,,\quad \text{pour } 0\le z\le \ell, \tag{1.7}$$

où le nombre d'onde complexe k_z tient compte de l'amortissement dû aux effets visqueux et thermiques (cf. Annexe A, Eq. (A.19)). Dans la gamme de fréquences utile (20 Hz, 20 kHz), la cavité est considérée comme « large » puisque $|k_{v,h}a|>11$; ce nombre d'onde est alors donné, en considérant un développement asymptotique, à l'ordre $1/2$ des longueurs caractéristiques ℓ'_v et ℓ_h, par la relation :

$$k_z^2\approx k_0^2\left[1+\frac{1-j}{\sqrt{2}}\frac{2}{a\sqrt{k_0}}\left(\sqrt{\ell'_v}+(\gamma-1)\sqrt{\ell_k}\right)\right], \tag{1.8}$$

où $k_0=\omega/c_0$, et où

$$\ell'_v=\frac{\mu}{\rho_0 c_0}\qquad\text{et}\qquad \ell_h=\frac{\lambda}{\rho_0 c_0 C_P}\,,$$

désignent les longueurs caractéristiques thermique et visqueuse, μ et λ étant respectivement les coefficients de viscosité de cisaillement et de conduction thermique.

A noter que dans les conditions standards d'environnement $\ell'_v\approx 4{,}5.10^{-8}$ m et $\ell_h\approx 6.10^{-8}$ m.

ii. Condition aux frontières en *z=0* [9]

$$S v_z = S v_e - Y_p p\,,\qquad \text{en } z=0\,, \tag{1.9}$$

où Y_p est une admittance représentant les effets des couches limites thermiques au voisinage de la paroi (approximation d'ordre un en $\sqrt{k_0\ell_h}$),

$$Y_p\approx\frac{S}{\rho_0 c_0}\frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{k_0}(\gamma-1)\sqrt{\ell_h}\,, \tag{1.10}$$

et où, en reportant l'équation (A.20) dans (A.11.b)

$$S\,v_z(z)=\frac{-1}{Z_v}\frac{\partial}{\partial z}p(z)\,, \tag{1.11}$$

où $S=\pi a^2$,

$$Z_v=\frac{1}{S}\frac{j k_0 \rho_0 c_0}{1-K_v}\,,\quad K_v=\frac{2}{k_v a}\frac{J_1(k_v a)}{J_0(k_v a)}\,,\text{ et }\ k_v=\frac{1-j}{\sqrt{2}}\sqrt{k_0/\ell'_v}\,. \tag{1.12}$$

A noter que l'équation (1.11) est l'équation d'Euler qui tient compte des effets visqueux dans les couches limites. En effet, dans la gamme de fréquences utile, le module de $(k_v a)$ est toujours très grand devant un ($|k_v a|>13$), et ainsi la fonction K_v peut être écrite sous forme approchée

$$K_v\approx\frac{1-j}{\sqrt{2}}\frac{2}{a}\sqrt{\frac{\ell'_v}{k_0}}\,, \tag{1.13}$$

ce qui conduit à la relation (Eq. (1.11))

$$-\frac{\partial}{\partial z}p\approx j k_0 \rho_0 c_0 v_z(z)\left[1+\frac{1-j}{\sqrt{2}}\frac{2}{a}\sqrt{\frac{\ell'_v}{k_0}}\right], \tag{1.14}$$

où le module du facteur $\left([2/a]\sqrt{\ell'_v/k_0}\right)$ prend des valeurs comprises entre 0,15 (à 20 Hz) et 5.10^{-3} (à 20 kHz), et par suite n'est pas négligeable dans les basses fréquences.

iii. Condition aux frontières en *z=ℓ* [9]

$$Sv_z=(Y_p+Y_r)\,p\,,\qquad \text{en}\ \ z=\ell, \tag{1.15}$$

où $Y_r=Sv_R/p(\ell)$ désigne l'admittance acoustique du microphone récepteur.

iv. Conditions aux frontières en *w=a*, *z=ℓc*, (conservation des débits et continuité des pressions)

$$\begin{cases} Sv_z(\ell_c^-)=Sv_z(\ell_c^+)+Y_c\,p(\ell_c), & \text{(1.16.a)}\\ p(\ell_c^-)=p(\ell_c^+)=p(\ell_c), & \text{(1.16.b)}\end{cases}$$

où $Sv_z(\ell_c^+)$ et $Sv_z(\ell_c^-)$ désignent respectivement, les débits dans les parties supérieure et inférieure à $z=\ell_c$ de la cavité de couplage.

v. Champ acoustique dans la cavité de couplage

La solution pour la pression acoustique en considérant un régime d'ondes planes (Eq. (1.7)) dans les deux domaines de la cavité ($z<\ell_c$ et $z>\ell_c$), satisfaisant les conditions aux frontières (1.9) et (1.15) ainsi que la condition à l'interface $z=\ell_c$ (1.16.a), pour une source harmonique ($e^{j\omega t}$) de débit Sv_e du microphone émetteur ($z=0$), s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} p(z)=A\left(e^{-jk_z z}+Be^{jk_z z}\right), & \text{pour}\ \ 0\le z\le\ell_c, & \text{(1.17.a)}\\ p(z)=C\left(e^{-jk_z z}+De^{jk_z z}\right), & \text{pour}\ \ \ell_c\le z\le\ell. & \text{(1.17.b)}\end{cases}$$

Les constantes d'intégration A, B, C et D étant déterminées à partir des conditions aux frontières (1.9) et (1.15) et des conditions d'interfaces (1.16.a et b), soit

$$\begin{cases} A=\dfrac{Sv_e}{Y_i(1-B)+Y_p(1+B)}, & \text{(1.18.a)} \\ B=-e^{-2jk_z\ell_c}\dfrac{Y_c+De^{2jk_z\ell_c}(Y_c-2Y_i)}{(Y_c+2Y_i)+De^{2jk_z\ell_c}Y_c}, & \text{(1.18.b)} \\ C=A\dfrac{e^{-jk_z\ell_c}+Be^{jk_z\ell_c}}{e^{-jk_z\ell_c}+De^{jk_z\ell_c}}, & \text{(1.18.c)} \\ D=e^{-2jk_z\ell}\dfrac{Y_i-(Y_r+Y_p)}{Y_i+(Y_r+Y_p)}, & \text{(1.18.d)} \end{cases}$$

où l'admittance itérative Y_i s'écrit

$$Y_i=\frac{\pi a^2}{\rho_0 c_0}\sqrt{[1+(\gamma-1)K_h](1-K_h)}, \quad \text{(1.19.a)}$$

$$Y_i\approx\frac{\pi a^2}{\rho_0 c_0}\left[1+\frac{1-j}{\sqrt{2}}\frac{2}{a\sqrt{k_0}}\left(-\sqrt{\ell'_v}+(\gamma-1)\sqrt{\ell_h}\right)\right]. \quad \text{(1.19.b)}$$

vi. Admittance acoustique de transfert

En utilisant les solutions (1.17.a et b) du champ de pression dans la cavité de couplage, l'admittance acoustique de transfert Y_T définie par les relations (1.2) et (1.3), soit

$$Y_T=\frac{S_e v_e+Y_e p(0)}{p(\ell)}, \quad \text{(1.20)}$$

s'écrit de la manière suivante :

$$Y_T=Y_{T0}+\alpha Y_c, \quad \text{(1.21)}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha=\frac{1}{2}\Bigg[& j\frac{Y_e+Y_r+2Y_p}{Y_i}\sin k_z\ell+\left(1+\frac{(Y_e+Y_p)(Y_r+Y_r)}{Y_i^2}\right)\cos k_z\ell \\ & +j\frac{Y_r-Y_e}{Y_i}\sin k_z(\ell-2\ell_c)+\left(1-\frac{(Y_e+Y_p)(Y_r+Y_p)}{Y_i^2}\right)\cos k_z(\ell-2\ell_c)\Bigg],\end{aligned} \quad \text{(1.22)}$$

et où

$$Y_{T0}=\left[Y_i+\frac{(Y_e+Y_p)(Y_r+Y_p)}{Y_i}\right]j\sin k_z\ell+(Y_e+Y_r+2Y_p)\cos k_z\ell, \quad \text{(1.23)}$$

désigne l'admittance acoustique de transfert de la cavité de couplage pourvue de l'élément acoustique à caractériser lorsque l'admittance d'entrée Y_c est nulle.

En reportant l'équation (1.21) dans (1.6), l'admittance Y_c de l'élément à caractériser s'écrit de la manière suivante :

$$Y_c=\frac{Y_T^0}{\alpha}\left(\frac{Y_E}{Y_E^0}-\frac{Y_{T0}}{Y_T^0}\right), \quad \text{(1.24)}$$

où Y_{T0} est donnée par l'équation (1.23), ℓ désignant la longueur de la cavité pourvue de l'élément à caractériser, où Y_T^0 est donnée par la même équation, ℓ désignant dans ce cas précis la longueur de

la cavité totalement close (cf. discussion à la fin de paragraphe 1.2), et où les admittances électriques de transfert Y_E^0 et Y_E sont mesurées respectivement avec les coupleurs totalement clos et pourvu de l'élément à caractériser.

Aux basses fréquences, approximativement jusqu'à 2 kHz, soit lorsque les dimensions de la cavité sont très petites devant la longueur d'onde ($|k_z \ell| \ll 1$), un développement asymptotique au premier ordre en $k_z \ell$ peut être retenu dans l'expression (1.21) de Y_T et en utilisant les expressions approchées (1.10), (1.8) et (1.19.b) pour Y_p, k_z et Y_i respectivement, il vient [2,3,9,13] :

$$Y_T \approx j\,\omega \frac{V}{\gamma P_0}\left[1+(\gamma-1)\frac{\mathcal{A}}{V}\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right]+Y_e+Y_r+Y_c\,, \tag{1.25}$$

où le rapport entre la surface totale de la cavité et son volume s'écrit $\mathcal{A}/V = 2/a + 2/\ell$ (ce dernier résultat étant démontré en Annexe de la référence [9] lorsque $Y_c = 0$). L'admittance acoustique $j\omega V/(\gamma P_0)$ (premier terme de l'équation (1.25)) représente l'admittance purement réactive de la cavité lorsque ses dimensions sont très petites devant la longueur d'onde et ses parois supposées totalement rigides.

A noter que la détection d'une variation de l'ordre de 0,01 dB [8] entre les mesures avec et sans élément signifie qu'il est possible de détecter une variation relative de Y_T de l'ordre de

$$20\log\left(\frac{Y_T+\Delta Y_T}{Y_T}\right)\approx 0{,}01\ \text{dB}\,,\ \text{soit}\ \frac{\Delta Y_T}{Y_T}\approx 10^{-3}\,. \tag{1.26}$$

Afin d'obtenir la valeur inconnue de l'admittance avec approximativement deux chiffres significatifs, le rapport $|Y_c|/(\omega V/(\gamma P_0))$ doit être plus grand que 10^{-2}, soit $|Y_c| > 3.10^{-14}\omega$, c'est à dire par exemple, à 100 Hz, $|Y_c| > 2.10^{-11}$ $\text{m}^3\text{s}^{-1}\text{Pa}^{-1}$. Par ailleurs, les effets de conduction thermique (second terme dans l'équation (1.25) et les effets des transducteurs représentés par leurs admittances Y_e et Y_r ne sont pas négligeables, car respectivement donnés par :

$$(\gamma-1)\frac{\mathcal{A}}{V}\sqrt{\frac{\ell_h}{k_0}}\approx 0{,}06\,,\ \text{à 100 Hz,} \tag{1.27}$$

et, pour les microphones utilisés (B&K Type 4180) par,

$$\frac{|Y_e|+|Y_r|}{\omega V/(\gamma P_0)}\approx 0{,}07\,, \tag{1.28}$$

pour les basses fréquences.

Remarque : il est à noter que lorsque l'admittance d'entrée Y_c de l'élément à caractériser conduit à un champ de pression dans la cavité de couplage dépendant de la coordonnée azimutale θ , le modèle onde plane utilisé n'est plus adapté. De ce fait, une modélisation plus élaborée doit être considérée. Un modèle (présenté en Annexe B), construit sur la base d'un modèle donné dans la littérature [10,14] dans le cas d'une cavité totalement close, a été étendu au cas où un élément est placé en paroi de la cavité.

1.4 Eléments utilisés comme références : modèles théoriques

Afin de valider la méthode de mesure présentée ci-dessus et estimer les incertitudes associées, deux types d'éléments acoustiques, issus de l'oreille artificielle [11] ont été choisis. Leurs

géométries simples autorisent leur caractérisation expérimentale et leur modélisation suffisamment précise à l'aide des équations classiques de l'acoustique en fluide dissipatif (cf. Annexe A). Le premier est une fente annulaire mince et courte, ouverte à son extrémité dans un espace infini (figure 1.2) (son admittance d'entrée ne dépend pas de la coordonnée azimutale θ). Le second est un ensemble de quatre tubes identiques, étroits et courts, régulièrement répartis en $\theta=0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ de manière à garantir une symétrie de sorte que le champ de pression peut être considéré comme dépendant peu de la coordonnée azimutale θ (figure 1.3). Ces quatre tubes sont soit ouverts à leur extrémité sur un espace infini, soit connectés à une cavité annulaire totalement close.

1.4.1 Admittance d'entrée d'une fente ouverte à son extrémité

Le schéma de la fente considérée est représenté sur la figure 1.2 en condition de mesure, soit située en paroi de la cavité de couplage en $w=a$ et $z=\ell_c$ (cf. figure 1.1). La fente à une épaisseur e (très petite devant la longueur ℓ de la cavité) et une longueur $(R-a)$; sa charge acoustique en $w=R$ est décrite par une condition de Dirichlet (condition de champ libre).

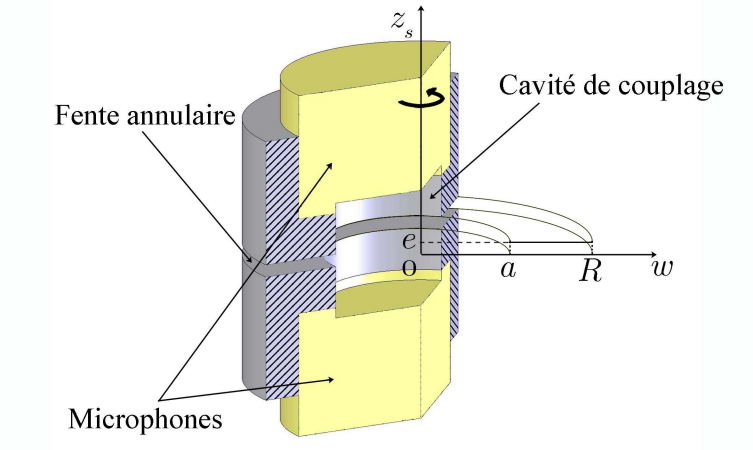


Figure 1.2. Fente annulaire : schéma et notations utilisées.

Le champ acoustique dans la fente est régi par l'équation de propagation (Eqs. (A.23) et (A.24)) :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial w^2}+\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial w}+\chi^2\right]p(w)=0\,, \tag{1.29}$$

où

$$\chi^2=k_0^2\frac{1+(\gamma-1)K_h^s}{1-K_v^s}\,,\qquad Re(\chi)>0\ \text{ et }\ Im(\chi)<0\,, \tag{1.30}$$

et (Eq. (A.25))

$$K_{v,h}^s=\frac{\tan(k_{v,h}e/2)}{k_{v,h}e/2}\,. \tag{1.31}$$

La solution de l'équation (1.29) satisfaisant à la condition de Dirichlet $p(w=R)=0$ s'écrit de la manière suivante :

$$p(w)=A_s\left[J_0(\chi w)+B_s N_0(\chi w)\right]\,, \tag{1.32}$$

avec

$$B_s = -\frac{J_0(\chi R)}{N_0(\chi R)} . \tag{1.33}$$

En utilisant la composante w de l'expression (A.11.b) pour exprimer la vitesse $v_w(a)$ à l'entrée de la fente annulaire, l'admittance acoustique d'entrée Y_c^s en $w=a$ s'écrit

$$Y_c^s = \frac{2\pi a e \langle v_w(a) \rangle_{z_s}}{p(a)} = \frac{a Y_i^s}{R} \frac{J_1(\chi a) + B_s N_1(\chi a)}{J_0(\chi a) + B_s N_0(\chi a)} , \tag{1.34}$$

où $\langle v_w(a) \rangle_{z_s}$ est la valeur moyenne sur l'épaisseur de la fente de la vitesse particulaire $v_w(a)$ et où l'admittance itérative Y_i^s est donnée par l'expression

$$Y_i^s = \frac{2\pi e R}{j \rho_0 c_0} \sqrt{[1+(\gamma-1)K_h^s][1-K_v^s]} . \tag{1.35}$$

A noter qu'une expression approchée de l'admittance d'entrée de la fente peut être substituée à l'expression (1.34) en basses fréquences (développement autour de l'origine lorsque $|k_{v,h} e| \ll 1$ des équations (1.30), (1.31), (A.6) et (A.8)) et en hautes fréquences (comportement asymptotique lorsque $|k_{v,h} e| \gg 1$ des équations (1.30), (1.31), (A.6) et (A.8)). Néanmoins, dans la gamme de fréquences usuelle, soit entre 100 Hz et 10 kHz, l'expression (1.34) de l'admittance d'entrée Y_c^s doit être utilisée sans approximation du fait que dans cette gamme de fréquences, les expressions (A.6) et (A.8) respectivement de k_v et k_h intervenant dans les équations (1.30) et (1.31) du nombre d'onde χ conduisent (pour $e = 71{,}2$ μm) au résultat

$$1 < |k_{v,h} e| < 10 . \tag{1.36}$$

En basses fréquences (jusqu'à environ 100 Hz), l'expression approchée de l'admittance d'entrée Y_c^s (équation (1.34)) est donnée par l'expression

$$Y_c^s \approx \frac{2\pi e^3}{12 \mu \ln(R/a)} , \tag{1.37}$$

montrant un comportement purement résistif. A 100 Hz, cette expression conduit au résultat (pour $e = 71{,}2$ μm, $a = 4{,}65$ mm et $R = 8{,}5$ mm) :

$$Y_c^s \approx 1{,}73 . 10^{-8} \ \mathrm{m^3 s^{-1} Pa^{-1}} . \tag{1.38}$$

1.4.2 Admittance d'entrée d'un réseau de quatre tubes cylindriques

Les ouvertures des quatre tubes considérés sont placées en paroi de la cavité de couplage en $w=a$, $z=\ell_c$ et $\theta = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ (figures 1.1 et 1.3). Leurs rayons a_T sont très petits devant la longueur ℓ de la cavité et leurs axes sont notés x_t, l'origine $x_t = 0$ étant choisie à l'entrée du tube. Leurs longueurs sont notées $\ell_T = R_1 - a$.

Le champ acoustique dans chaque tube est régi par l'équation de propagation (A.18), s'écrivant de la manière suivante :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_t^2} + k_t^2 \right] p(x_t) = 0 , \tag{1.39}$$

où le nombre d'onde k_t s'écrit (Eq. (A.21)) :

$$k_t^2 \approx k_0^2 \left[1 + \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{2}{a_T \sqrt{k_0}} \left(\sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1) \sqrt{\ell_k} \right) \right] . \tag{1.40}$$

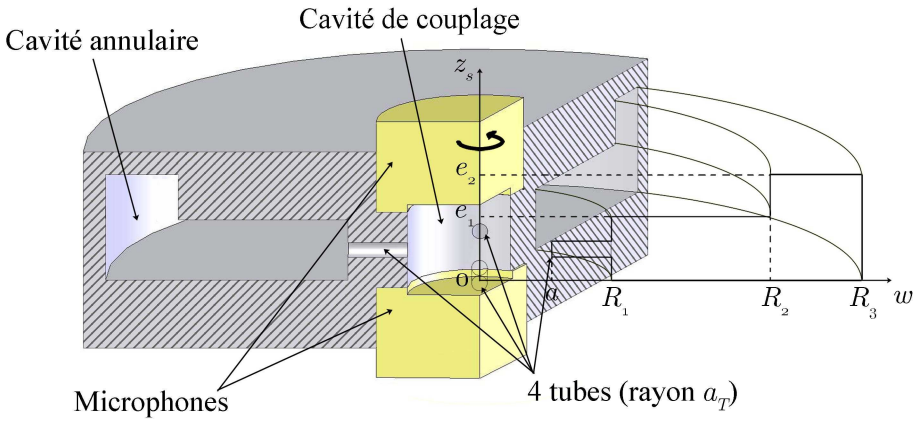


Figure 1.3. Quatre tubes et cavités annulaires : schéma et notations utilisées.

La solution de l'équation de propagation (1.39) est cherchée sous la forme

$$p(x_t) = A_t \left(e^{-j k_t x_t} + B_t e^{j k_t x_t} \right) , \tag{1.41}$$

où la constante d'intégration B_t est déterminée en écrivant la condition aux limites à satisfaire en $x_t = \ell_T$, soit une condition de Dirichlet (champ libre), soit une condition d'impédance Z_L (cavité annulaire).

En utilisant la composante x_t de l'expression (A.11.b) pour exprimer la vitesse moyenne (sur une section du tube) en $x_t = 0$ à l'entrée d'un des quatre tubes, l'admittance d'entrée Y_c^t d'un tube s'écrit :

$$Y_c^t = \frac{\pi a_T^2 v(x_t = 0)}{p(x_t = 0)} = Y_i^t \frac{1 + Z_L Y_i^t \tanh(j k_t \ell_T)}{\tanh(j k_t \ell_T) + Z_L Y_i^t} , \tag{1.42}$$

l'impédance itérative Y_i^t étant donnée par l'expression (1.19.b) en remplaçant a par a_T.

Si les tubes sont ouverts sur l'espace infini à leur extrémité en $x_t = \ell_T$, l'impédance de charge Z_L est nulle et l'admittance Y_c^t d'un tube est réduite à l'expression suivante :

$$Y_c^t = \frac{Y_i^t}{\tanh(j k_t \ell_T)} , \tag{1.43}$$

où la longueur ℓ_T est corrigée de la correction de longueur classique $\Delta \ell_T = 8 a_T / (3\pi)$ [3].

A noter qu'une expression approchée de l'admittance d'entrée d'un des tubes peut être substituée à l'expression (1.42) ou (1.43) en basses fréquences (développement autour de l'origine lorsque $|k_{v,h} a_T| \ll 1$ des équations (A.19), (A.20), (A.6) et (A.8)) et en hautes fréquences (comportement asymptotique lorsque $|k_{v,h} a_T| \gg 1$ des équations (A.19), (A.20), (A.6) et (A.8)). Néanmoins, dans la gamme de fréquences usuelle, soit entre 100 Hz et 10 kHz, l'expression (1.43) de l'admittance d'entrée Y_c^t doit être utilisée sans approximation du fait que dans cette gamme de fréquences, les expressions (A.6) et (A.8) respectivement de k_v et k_h intervenant dans les équations (A.19) et (A.20) du nombre d'onde k_t conduisent (pour $a_T = 225$ μm) au résultat

$$1<\left|k_{v,h}\,a_T\right|<10\ . \tag{1.44}$$

En basses fréquences (jusqu'à environ 100 Hz), l'expression approchée de l'admittance d'entrée Y_c^t (équation (1.43)) est donnée par l'expression

$$Y_c^t\approx\frac{\pi a_T^4}{8\mu\ell_T}\ , \tag{1.45}$$

montrant un comportement purement résistif. A 100 Hz, cette expression conduit au résultat (pour $a_T=225\ \mu\text{m}$ et $\ell_T=3{,}8\ \text{mm}$) :

$$Y_c^s\approx 1{,}29.10^{-8}\ \ \text{m}^3\text{s}^{-1}\text{Pa}^{-1}\ . \tag{1.46}$$

Les quatre tubes peuvent également être chargés par une cavité annulaire d'impédance d'entrée Z_L (figure 1.3) (cette configuration étant utilisée dans l'oreille artificielle [11]). Cette cavité annulaire est constituée de deux fentes annulaires (indices $n=1{,}2$ dans la suite) ayant le même comportement acoustique que la fente modélisée au paragraphe 1.4.1. Ainsi, le champ de pression dans chacune des deux fentes $n=1\,\text{ou}\,2$ est donné par la solution (1.32)

$$p_n(w)=A_n\left[J_0(\chi_n w)+B_n N_0(\chi_n w)\right]\ , \tag{1.47}$$

où $n=1$ pour la première fente (épaisseur e_1, rayon interne R_1 et externe R_2) et $n=2$ pour la deuxième fente (épaisseur e_2, rayon interne R_2 et externe R_3), avec $R_1=a+\ell_T$, et où (Eq. (A.24))

$$\chi_n^2=k_0^2\frac{1+(\gamma-1)K_h^n}{1-K_v^n}\ , \qquad Re(\chi_n)>0\ \text{ et }\ Im(\chi_n)<0\ , \tag{1.48}$$

et

$$K_{v,h}^n=\frac{\tan(k_{v,h}e_n/2)}{k_{v,h}e_n/2}\ . \tag{1.49}$$

Les constantes d'intégration B_n sont déterminées en utilisant la continuité des débits et des pressions en $w=R_2$ et la condition aux limites en $w=R_3$ (impédance de paroi prenant en compte les effets thermiques, Eq. (1.10)).

Ainsi, en utilisant la composante w de l'expression (A.11.b) pour exprimer la vitesse moyenne (sur une section de la fente) en $w=R_1$ à l'entrée de la première fente, l'impédance de charge Z_L à l'extrémité de chaque tube s'écrit :

$$Z_L=\frac{4\,p_1(R_1)}{2\pi R_1 e_1\langle v_{wI}(R_1)\rangle_{e_1}}=\frac{4R_3}{R_1 Y_{i,1}^s}\frac{J_0(\chi_1R_1)+B_1N_0(\chi_1R_1)}{J_1(\chi_1R_1)+B_1N_1(\chi_1R_1)}\ , \tag{1.50}$$

où

$$B_1=-\frac{Y_{i,1}^s J_1(\chi_1R_2)\left[J_0(\chi_2R_2)+B_2N_0(\chi_2R_2)\right]-Y_{i,2}^s J_0(\chi_1R_2)\left[J_1(\chi_2R_2)+B_2N_1(\chi_2R_2)\right]}{Y_{i,1}^s N_1(\chi_1R_2)\left[J_0(\chi_2R_2)+B_2N_0(\chi_2R_2)\right]-Y_{i,2}^s N_0(\chi_1R_2)\left[J_1(\chi_2R_2)+B_2N_1(\chi_2R_2)\right]}\ , \tag{1.51}$$

et

$$B_2=-\frac{J_0(\chi_2R_3)-(Y_{i,2}^s/Y_p')J_1(\chi_2R_3)}{N_0(\chi_2R_3)-(Y_{i,2}^s/Y_p')N_1(\chi_2R_3)}\ , \tag{1.52}$$

avec

$$Y_{i,n}^{s}=\frac{2\pi e_n R_{n+1}}{j\rho_0 c_0}\sqrt{[1+(\gamma-1)K_h^s][1-K_v^s]}\,, \tag{1.53}$$

avec $n=1$ ou 2 , et où

$$Y_p^{'}\approx\frac{2\pi R_3 e_2}{\rho_0 c_0}\frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{k_0}(\gamma-1)\sqrt{\ell_h}\,. \tag{1.54}$$

1.5 Résultats théoriques et expérimentaux, discussion

Les valeurs expérimentales des admittances Y_c sont obtenues en mesurant les admittances électriques de transfert Y_E^0 et Y_E, respectivement avec un coupleur totalement clos et un autre pourvu de l'élément acoustique à caractériser. L'admittance Y_c est alors déduite de l'expression (1.24) où les admittances acoustiques Y_{T0}, Y_T^0 et le paramètre α sont déduits des expressions (1.23) et (1.22) en fonctions des paramètres géométriques des deux cavités de couplage. Les valeurs théoriques des admittances Y_c sont obtenues à partir des équations (1.34), (1.43) et (1.42) respectivement pour une fente annulaire ouverte sur l'espace infini à son extrémité (figure 1.4), quatre tubes ouverts sur l'espace infini à leur extrémité (figure 1.5) ou chargés par une cavité annulaire (figure 1.6).

Les dimensions de la fente annulaire, des tubes et de la cavité annulaire sont données respectivement dans les tableaux 1.1, 1.2 et 1.3. Deux valeurs sont données dans le tableau 1.2 pour les rayons des tubes, l'une correspondant aux données du fabricant et l'autre aux données issues de nos propres mesures (obtenues aux extrémités des tubes en utilisant un microscope).

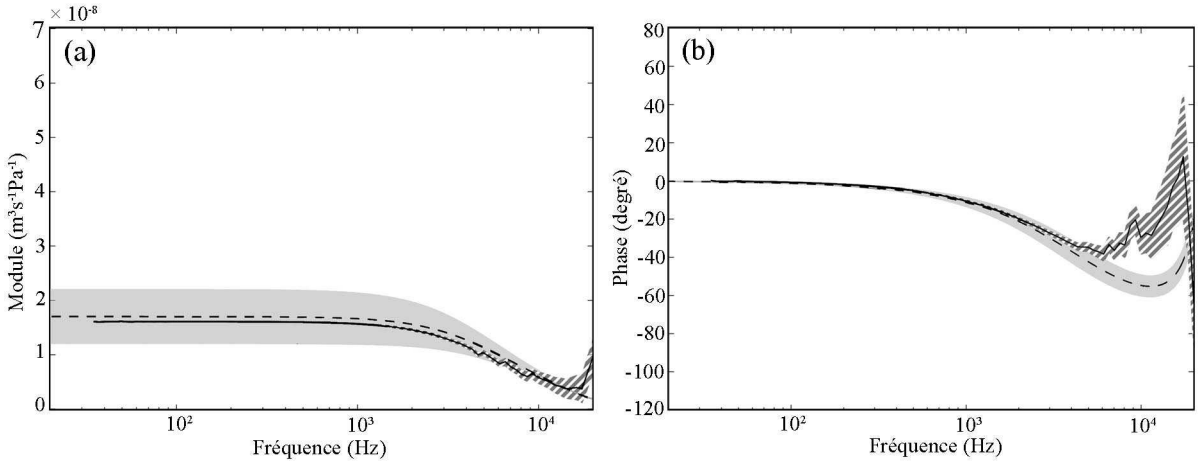


Figure 1.4. Admittance d'entrée d'une fente annulaire ouverte sur l'espace infini à son extrémité (tableau 1.1), (a) module et (b) phase : résultat théorique (trait discontinu) et son incertitude (zone grisée), résultat expérimental (trait continu) et son incertitude (zone hachurée).

L'expression (1.21) de l'admittance acoustique de transfert, dont le domaine fréquentiel de validité est compris approximativement entre 20 Hz et 5 kHz, montre des divergences significatives aux fréquences supérieures (au delà de 5 kHz) avec le modèle plus élaboré présenté en Annexe B, ou présenté et discuté plus en détails dans la référence [10] pour une cavité totalement close. Ainsi, les divergences entre les valeurs théoriques et expérimentales des admittances d'entrée observées sur les figures 1.4, 1.5 et 1.6 pour les hautes fréquences sont probablement dues à l'insuffisance du modèle utilisé ici pour le calcul de l'admittance acoustique de transfert (Eqs. (1.21), (1.22) et (1.23)).

Dans la figure 1.4, montrant l'admittance d'entrée de la fente annulaire, l'incertitude sur le résultat théorique (zone grisée) est calculée en utilisant les incertitudes sur l'épaisseur et la longueur de la fente données dans le tableau 1.1. L'incertitude sur le résultat expérimental (zone hachurée) provient principalement du manque de répétabilité des mesures en hautes fréquences (au delà de 2 kHz).

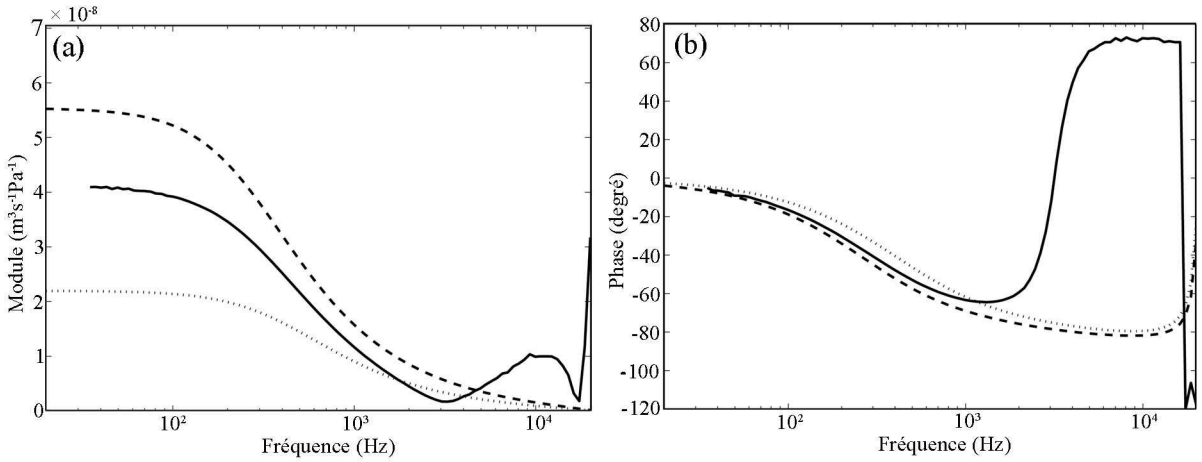


Figure 1.5. Admittance d'entrée d'un réseau de quatre tubes ouverts sur l'espace infini à leur extrémité (tableau 1.2), (a) module et (b) phase : résultat théorique (données géométriques du fabricant) (trait discontinu) ; résultat théorique (données géométriques mesurées), (trait pointillé) ; résultat expérimental (trait continu).

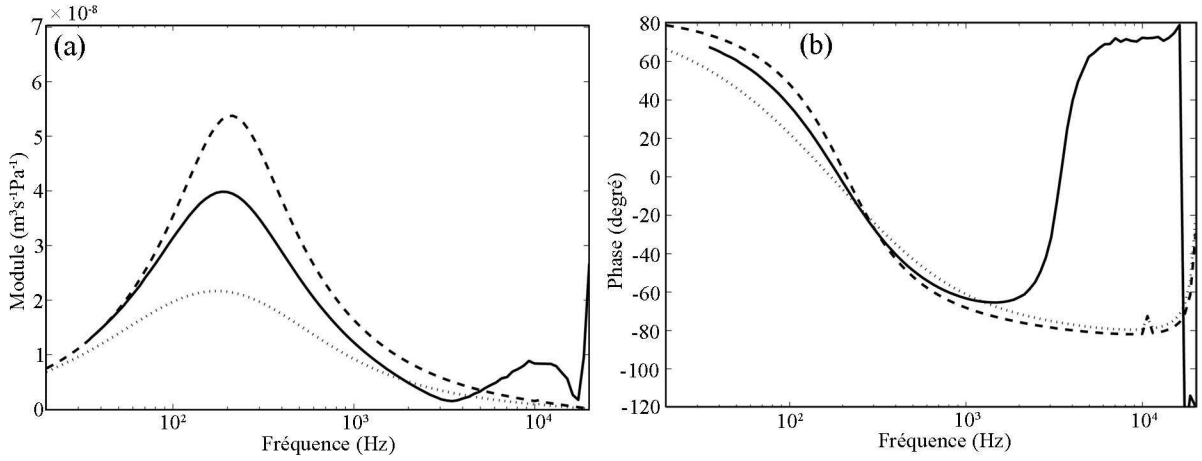


Figure 1.6. Admittance d'entrée d'un réseau de quatre tubes chargés par une cavité annulaire à leur extrémité (tableaux 1.2 et 1.3), (a) module et (b) phase : résultat théorique (données géométriques du fabricant) (trait discontinu) ; résultat théorique (données géométriques mesurées), (trait pointillé) ; résultat expérimental (trait continu).

Dans les figures 1.5 et 1.6, montrant les admittances d'entrée du réseau de quatre tubes, respectivement, ouverts sur l'espace infini et chargés par une cavité annulaire à leur extrémité, une attention particulière doit être accordée au fait que deux résultats théoriques peuvent être considérés selon les valeurs retenues des rayons des quatre tubes (données du fabricant ou nos propres mesures, tableau 1.2). Ces deux résultats théoriques mettent en évidence le manque de précision sur les dimensions géométriques des quatre tubes utilisés, les résultats expérimentaux obtenus étant situés entre ces deux résultats théoriques possibles.

	Dimension (µm)	Incertitude (µm)
Epaisseur	71,2	6
Longueur	$3{,}883.10^3$	6

Tableau 1.1. Fente annulaire mince : dimensions géométriques et incertitudes associées.

	Dimension (µm)	Incertitude (µm)
Rayons (données du fabricant)	225	10
Rayons (mesures indépendantes)	190 ; 185 ; 180 ; 150	8 ; 23 ; 20 ; 30
Longueurs (données du fabricant)	$3{,}800.10^3$	50

Tableau 1.2. Quatre tubes étroits : dimensions géométriques et incertitudes associées.

	Dimension (µm)	Incertitude (µm)
Rayon R_1	$8{,}446.10^3$	3
Rayon R_2	$20{,}526.10^3$	3
Rayon R_3	$24{,}068.10^3$	3
Epaisseur e_1	$4{,}082.10^3$	6
Epaisseur e_2	$7{,}150.10^3$	6
Volume	8053 mm^3	50 mm^3

Tableau 1.3. Cavités annulaires : dimensions géométriques et incertitudes associées.

Afin de mieux connaitre la précision accessible à la mesure il est nécessaire d'utiliser des coupleurs (fentes et tubes) réalisés par des techniques adaptées pour la circonstance dont la précision des cotes est meilleure que celle des coupleurs utilisés précédemment. Les modèles analytiques montrent en effet que les valeurs théoriques des admittances d'une fente ouverte et d'un réseau de quatre tubes ouverts sont particulièrement sensibles respectivement à l'épaisseur de la fente et au diamètre des tubes. Les tableaux 1.4 et 1.5 présentent les dimensions et les incertitudes des éléments devant permettre d'accéder à une incertitude relative inférieure à 5% pour le module et à 2° pour la phase sur les valeurs théoriques des admittances d'entrée des éléments en question.

	Dimension (µm)	Incertitude (µm)
Epaisseur	100	1
Longueur	$1{,}320.10^3$	10

Tableau 1.4. Fente annulaire mince de haute précision : dimensions géométriques et incertitudes associées.

	Dimension (µm)	Incertitude (µm)
Rayon	225	1
Longueur	$3{,}800.10^3$	10

Tableau 1.5. Quatre tubes étroits de haute précision : dimensions et incertitudes associées.

La figure 1.7.a montre une esquisse en 3 dimensions (vue en coupe) du coupleur étudié pour obtenir une fente annulaire mince selon les cotes et incertitudes données dans le tableau 1.4. La conception de ce coupleur cherche à respecter deux objectifs : l'incertitude sur l'épaisseur de la fente (1 µm) et l'incertitude sur sa longueur (10 µm). Afin d'y parvenir, le coupleur est constitué de deux pièces principales identiques pourvues de trois bras de support en périphérie. La particularité de chacune de ces pièces est que la surface délimitant la fente annulaire et les trois surfaces d'appuis des supports sont confondues dans le même plan. Cette opération est obtenue en rectifiant ces surfaces en même temps par rodage avec une finition miroir. La fente est alors créée en plaçant entre chaque support des cales étalons mesurées par interférométrie avec une incertitude de l'ordre du centième de µm. Cette solution présente également l'avantage de pouvoir faire varier l'épaisseur de la fente en utilisant des jeux de cales d'épaisseurs différentes. Enfin, la procédure de fabrication prévoit de percer les trous de fixations et de centrage dans un bloc cylindrique unique qui sera ensuite scié en deux à mi-hauteur. Après repérage de chaque trou, les deux blocs ainsi obtenus sont usinés afin d'obtenir les pièces principales du coupleur. Le centrage des deux pièces principales est alors garanti à 10 µm en appariant les deux pièces convenablement et en utilisant des goupilles de précision adaptées. L'Annexe C.1 présente en détail les plans et la procédure de fabrication envoyés au fabricant.

La figure 1.7.b montre une esquisse en 3 dimensions (vue en coupe) du coupleur étudié pour la mesure de l'admittance d'entrée d'un réseau de 4 tubes ouverts. Ce coupleur est d'une conception plus simple que le précédent, la seule difficulté, qui reste néanmoins importante, est la réalisation des tubes avec la précision requise. Les techniques de perçage usuelles (foret, laser ou électroérosion) ne permettent pas de percer des trous avec un rapport rayon/longueur aussi petit avec une telle précision. La solution retenue consiste à mouler des petits cylindres en alumine autour d'un fil de diamètre connu au µm près. Après démoulage, les petits cylindres obtenus sont ensuite adaptés et encastrés dans le coupleur. La forme concave à l'intérieur du coupleur est reproduite sur une extrémité des cylindres afin d'exclure toute discontinuité importante. Des piges de précision permettent par ailleurs le contrôle des diamètres des tubes au µm près. L'Annexe C.2 présente en détail les plans envoyés au fabricant.

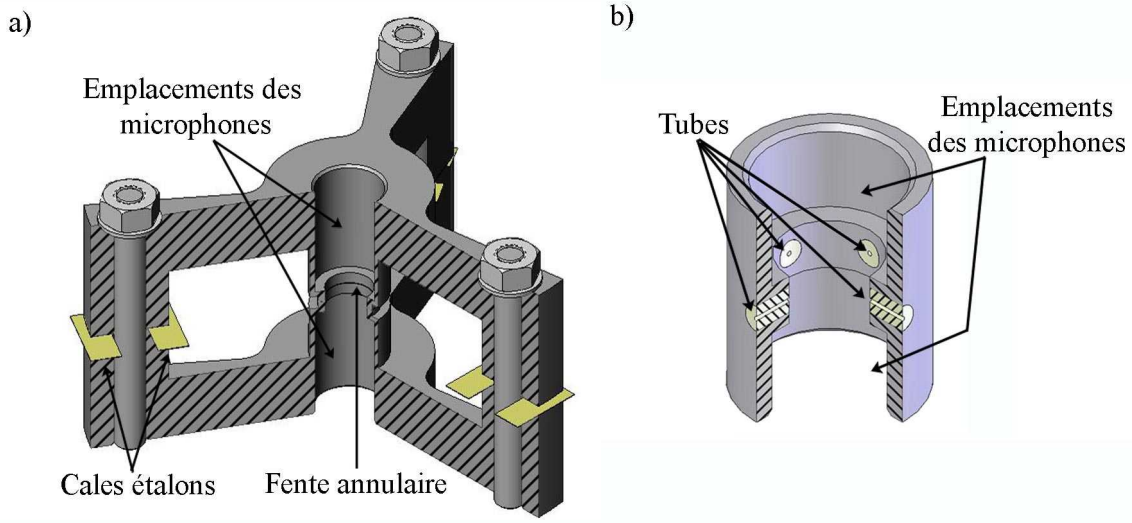


Figure 1.7. Esquisses en 3 dimensions (vue en coupe) des coupleurs de haute précision pour la mesure des admittances d'entrée d'une fente annulaire ouverte (a) et d'un réseau de 4 tubes ouverts (b) (les échelles sont différentes).

Enfin, la méthode de mesure impose que les deux microphones soient isolés électriquement. Le matériau choisi pour l'usinage de ces deux coupleurs est l'alumine, connue pour ses propriétés d'isolant électrique et qui de plus, offre des propriétés mécaniques intéressantes notamment en

terme de résistance à la flexion, propriété importante pour le coupleur « fente ouverte » puisque l'absence de matière au centre du coupleur pourrait entrainer une compression de la fente provoquée par le système de fixation des microphones (un simple ressort). L'épaisseur des bras des supports est dimensionnée de manière à limiter cet effet (évalué à moins de 2/100 de µm pour une force de 5N).

Les résultats obtenus avec le nouveau coupleur de haute précision pourvu d'un réseau de quatre tubes ouverts sur un espace infini sont présentés sur la figures 1.8. Les résultats théorique et expérimental sont en parfait accord jusqu'aux fréquences voisines de 5 kHz (les incertitudes sont de l'ordre de 1% pour le module et 1 degré sur la phase), validant ainsi la méthode proposée pour la caractérisation acoustique de petits éléments avec une bonne précision. Malheureusement, au moment de la rédaction de ce mémoire, le coupleur « fente ouverte » n'a toujours pas été livré par le fabricant, les résultats ne sont donc pas présentés ici.

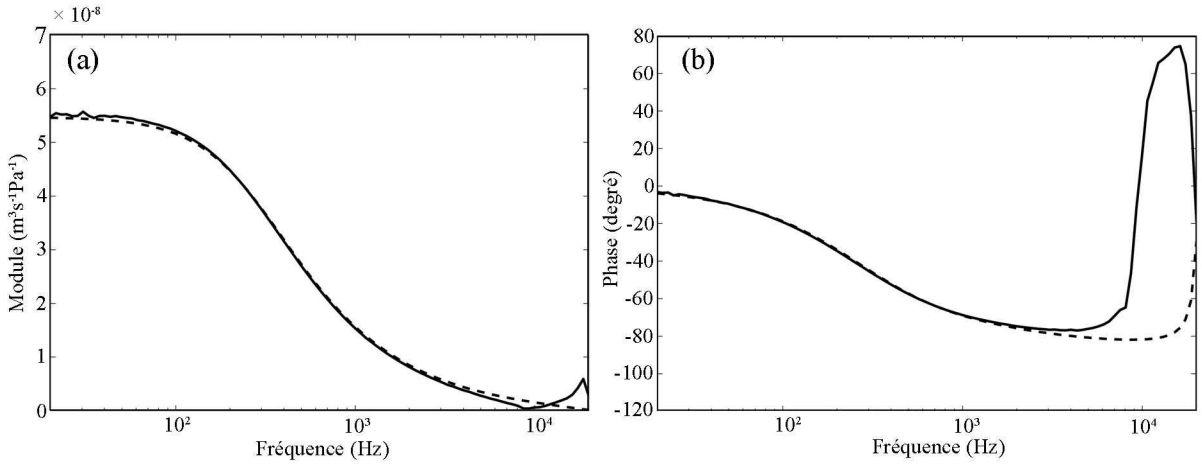


Figure 1.8. Admittance d'entrée d'un réseau de quatre tubes de haute précision ouverts sur l'espace infini aux extrémités (tableau 1.5), (a) module et (b) phase : résultat théorique (trait discontinu) ; résultat expérimental (trait continu).

1.6 Conclusion

L'étude présentée dans ce chapitre traite d'une méthode de mesure d'impédance d'entrée de petits éléments acoustiques tels que des tubes, fentes, cavités et leurs associations. Les éléments utilisés jusqu'à présent peuvent être décrits avec précision selon les exigences des systèmes qui les contiennent (oreille artificielle, haut parleur, microphones et autres dispositifs acoustiques). Néanmoins, la sensibilité des résultats théoriques aux incertitudes sur l'épaisseur (fente) ou sur le diamètre (tubes) de ces éléments est grande (l'incertitude sur l'admittance peut atteindre 90% de la valeur attendue). Par conséquent, des résultats expérimentaux d'admittances d'entrée Y_c pour ce type d'éléments sont nécessaires afin d'optimiser le comportement acoustique de certains dispositifs telle que l'oreille artificielle. De plus, les dispositifs qui dans le futur seront miniaturisés en utilisant des techniques de type MEMS (Micro Electro Mechanical Systems), exigeront des mesures appropriées d'admittances d'entrée de fentes et de tubes miniaturisés du fait que la limite de validité de la théorie classique reportée dans ce document pourrait être atteinte si les dimensions des éléments en question étaient réduites.

La méthode de mesure d'admittance proposée dans ce chapitre repose sur la méthode de réciprocité utilisée pour l'étalonnage des microphones étalons de laboratoire. Parce qu'elle fait usage d'un matériel d'une grande sensibilité et d'une grande reproductibilité, elle est particulièrement bien

adaptée pour effectuer des mesures précises d'impédances d'entrée de petits éléments acoustiques tels que des tubes ou des fentes annulaires.

La validation de la méthode de mesure proposée dans ce chapitre par comparaison directe avec les admittances d'entrée théoriques (calculées sur la base des données géométriques) passe par la réalisation de petits composants (fente mince et tubes) à l'aide de procédures spécifiques permettant une grande précision sur les dimensions de ces éléments (de l'ordre du μm sur les dimensions sensibles). Deux nouveaux coupleurs décrits en Annexe C ont été conçus de manière à satisfaire à ces exigences. Les résultats obtenus pour l'un d'entre eux (l'autre n'ayant pas été livré par le fabricant) ont permis d'affiner les comparaisons et par conséquent ont conduit à une meilleure connaissance de la précision de la technique de mesure proposée et de son domaine de validité en fréquence.

Ainsi, les résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre montrent que la méthode de mesure proposée est adaptée pour caractériser le comportement acoustique de divers petits éléments avec une bonne précision, remplaçant ainsi les résultats théoriques qui sont entachés d'incertitudes non négligeables en raison de l'imprécision des données géométriques. Ceci est important dans la pratique lorsque des méthodes acoustiques sont utilisées pour des mesures de précision telle que la constante de Boltzmann avec une incertitude relative de 10^{-6} [1]. Aussi, cette méthode de mesure peut être utilisée pour optimiser le comportement acoustique de chaque élément constitutif de l'oreille artificielle et ainsi proposer des modèles théoriques plus précis que ceux utilisés actuellement [11].

Enfin, pour les hautes fréquences (au delà de 5 kHz), les résultats présentés ont mis en évidence la nécessité d'utiliser un modèle acoustique décrivant le comportement acoustique de la cavité de couplage plus précis que celui utilisé dans ce chapitre (modèle onde plane), prenant en compte les modes supérieurs, tel celui décrit dans la référence [10] ou en Annexe B. Cependant, ce modèle nécessite en pratique la connaissance des déformées non uniformes des membranes des microphones ainsi que l'incidence de cette non-uniformité sur la transduction, ce qui revient à devoir reconsidérer la définition même de l'efficacité en pression d'un microphone.

Chapitre 2

Modélisation analytique d'un microphone électrostatique : application à l'étalonnage des microphones en pression par la méthode de la réciprocité

2.1 Introduction

Les résultats des mesures d'impédances de petits éléments acoustiques présentés dans le chapitre précédent ont montré certaines insuffisances dans les hautes fréquences (au delà de 5 kHz), insuffisances attribuées au modèle utilisé pour décrire le comportement acoustique à l'intérieur de la cavité de couplage. En effet, le modèle utilisé ne prend en compte que la propagation d'ondes planes suivant l'axe de la cavité de couplage et néglige les effets des modes supérieurs (essentiellement radiaux).

Ceci pose de manière plus générale le problème de l'influence des modes supérieurs dans la cavité de couplage (modes radiaux) sur les résultats des étalonnages en pression par la méthode de la réciprocité. La norme CEI 61094-2 [8] propose un modèle décrivant le comportement acoustique de la cavité de couplage en considérant la propagation d'ondes planes suivant l'axe de la cavité (Eq. (1.23)). Néanmoins, compte tenu de la non-uniformité du champ de déplacement de la membrane du microphone émetteur et des différences de diamètres (faibles) entre la cavité de couplage et la partie mobile de la membrane des deux microphones, l'influence des modes radiaux sur les résultats d'étalonnages est non négligeable, plus particulièrement en hautes fréquences [9,15].

Dans la référence [9], les auteurs proposent un modèle plus élaboré décrivant le comportement acoustique de la cavité de couplage, tenant compte des modes supérieurs ainsi que des effets des couches limites viscothermiques. Pour autant, le modèle établi repose sur l'hypothèse que les membranes des microphones ont un mouvement non uniforme et suppose connue la forme de leur profil de vitesse. Ce profil de vitesse y est donné sous diverses formes élémentaires dont la précision est certainement insuffisante dans le cadre de l'étalonnage primaire des microphones en pression. Par ailleurs, l'influence de la non-uniformité du champ de pression incident sur l'efficacité d'un microphone, est à l'heure actuelle inconnue. Dans la référence [15], K. Rasmussen propose de corriger les effets de cette non-uniformité à l'aide d'un facteur de pondération appliqué au champ de pression incident sur la membrane du microphone récepteur. Néanmoins, cette pondération repose sur des bases empiriques non vérifiées à l'heure actuelle.

C'est l'objet de ce chapitre que de proposer, plus exactement de tenter d'ouvrir la voie à une nouvelle modélisation analytique de microphones électrostatiques (Type B&K 4180) tenant compte de l'ensemble des paramètres du microphone, tout en restant raisonnablement simple de manière à pouvoir l'insérer facilement dans le modèle global qui inclut deux microphones, un récepteur et un émetteur couplés par une cavité cylindrique. Autant cette modélisation ne pourra répondre à l'attente que dans la mesure où elle pourra être revue et complétée pour prendre plus finement en compte certains paramètres géométriques, autant elle nous permet aujourd'hui de vérifier l'hypothèse retenue par K Rasmussen [15] pour corriger les effets de la non-uniformité du champ de pression dans la cavité de couplage sur l'impédance acoustique de transfert et donc sur l'efficacité même du microphone.

N.B. : Cette recherche de nouvelle modélisation n'est ici qu'une ébauche, le temps très court qui a pu être consacré à cette aspect du travail de thèse n'ayant pas permis d'analyser ni les insuffisances du modèle proposé ni la pertinence et l'exactitude des données numériques retenues.

2.2 Modèle analytique d'un microphone électrostatique

Le système de coordonnées cylindriques (z,w) utilisé est défini sur la figure 2.1. Une couche de fluide compressible dissipatif d'épaisseur $\epsilon(w)$ est animée d'un mouvement associé au déplacement harmonique $\xi(w)$ d'une membrane (tension T_m et masse surfacique σ_s) de rayon a_m fixée à sa périphérie, cette couche de fluide étant limitée en $w=a_m$ par une paroi cylindrique rigide et en $z=0$ par une électrode rigide perforée (N_k orifices, de rayons a_k et de longueurs ℓ_k) de rayon $a_{el}<a_m$ laissant apparaître une fente périphérique cylindrique d'épaisseur e_f et de longueur ℓ_f, cette fente et les trous de l'électrode débouchant dans un volume fermé V_c. Le système est supposé posséder une symétrie de révolution autour de l'axe z. Le tableau 2.1 précise les dimensions et les caractéristiques (extraites de la référence [16]) des éléments constitutifs d'un microphone électrostatique ½" B&K Type 4134, (ancienne génération de microphone en pression, néanmoins proche dans sa conception du microphone ½" étalon de laboratoire actuel, B&K Type 4180). Les résultats présentés sont obtenus pour des conditions standard de température et de pression dans l'air.

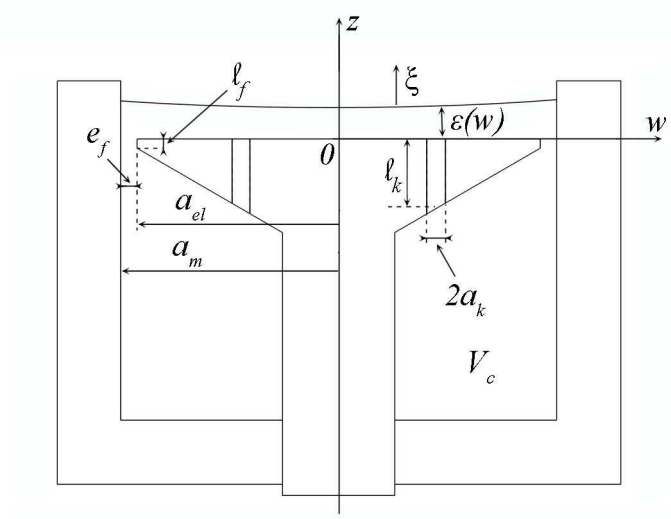


Figure 2.1. Schéma d'un microphone électrostatique.

Membrane :	Rayon a_m	4,45.10^{-3} m
	Tension T_m	3162,3 N.m^{-1}
	Masse surfacique σ_s	4.45.10^{-2} Kg.m^{-2}
Lame de fluide :	Epaisseur $\epsilon(a_m)$	2,077.10^{-5} m
Electrode :	Rayon a_{el}	3,607.10^{-3} m
	Nombre d'orifices N_k	6
	Rayon des orifices a_k	5,08.10^{-4} m
	Longueur des orifices ℓ_k	8,43.10^{-4} m
	Largeur de la fente annulaire $e_f = a_m - a_{el}$	8,43.10^{-4} m
	Longueur de la fente annulaire ℓ_f	3,048.10^{-4} m
Cavité arrière :	Volume V_c	1,264.10^{-7} m^3

Tableau 2.1. Dimensions et caractéristiques des éléments constitutifs d'un microphone électrostatique ½" Type B&K 4134 [16].

2.2.1 Equations fondamentales du mouvement acoustique

Pour le problème posé, l'amplitude des mouvements acoustiques est suffisamment faible pour pouvoir en linéariser les équations. Les variables décrivant l'état dynamique et thermodynamique du fluide sont (les définitions et équations fondamentales reportées ci-dessous sont celles du début de l'Annexe A) :

- l'écart instantané de pression p ,
- la vitesse particulaire $\vec{v}$,
- l'écart instantané de masse volumique ρ' ,
- l'écart instantané de température τ .

Les paramètres caractéristiques des propriétés du fluide sont les suivants :

- la masse volumique ρ_0 ,
- les coefficients de viscosité de cisaillement μ et de volume η ,
- le coefficient de conduction thermique λ ,
- le coefficient de compressibilité isotherme χ_T ,
- les chaleurs massiques par unité de masse à pression constante et à volume constant C_P et C_V , et leur rapport $\gamma = C_P / C_V$,
- le taux d'accroissement de pression par unité d'accroissement de température à volume constant $\hat{\beta} = (\partial P / \partial T)_V$.

Les équations linéaires homogènes du mouvement du fluide sont au nombre de trois [3, § 2.5.1].

- L'équation de Navier-Stokes

$$\frac{1}{c_0}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 c_0}\vec{\text{grad}}(p) = \ell_v \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v})) - \ell'_v \vec{\text{rot}}\,\vec{\text{rot}}(\vec{v}) \quad , \tag{2.1}$$

où ℓ_v et ℓ'_v sont les longueurs caractéristiques définies par

$$\ell_v = \frac{1}{\rho_0 c_0}\left(\frac{4}{3}\mu + \eta\right) \quad \text{et} \quad \ell'_v = \frac{\mu}{\rho_0 c_0} \quad ,$$

et où $c_0 = \sqrt{\gamma / (\rho_0 \chi_T)}$ est la célérité adiabatique du son.

- L'équation de Fourier pour la conduction de la chaleur

$$\left[\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell_h \Delta \right] \tau = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta} \gamma} \frac{1}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t} , \tag{2.2}$$

où $\ell_h = \lambda / (\rho_0 c_0 C_P)$ désigne une longueur caractéristique de diffusion thermique.

- L'équation de conservation de la masse exprimée dans un volume $\mathcal{D}_0$

$$\iiint_{\mathcal{D}_0} \left[\frac{\gamma}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (p - \hat{\beta} \tau) + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}) \right] d\mathcal{D}_0 = \iint_{\mathcal{D}_0} (\rho_0 q) d\mathcal{D}_0 , \tag{2.3}$$

où q désigne le débit volumique d'une source acoustique dans le domaine considéré $\mathcal{D}_0$.

2.2.2 Equation de propagation

Compte tenu de la faible valeur de l'épaisseur $\epsilon(w)$ de la lame de fluide par rapport au diamètre $2a_m$ de la membrane et à la longueur d'onde acoustique, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices [3, § 3.6] peuvent être retenues pour simplifier le système d'équations (2.1, 2.2 et 2.3). En premier lieu l'écart instantané de pression p_ℓ dans la lame de fluide étant (quasi) uniforme sur l'épaisseur $\epsilon(w)$, il est considéré comme indépendant de la coordonnée z et peut être noté

$$p_\ell(w, z) = p_\ell(w) . \tag{2.4}$$

Par suite, la composante axiale du gradient de pression est négligeable par rapport à sa composante radiale,

$$|\operatorname{grad}_w(p_\ell)| \gg \left| \frac{\partial p_\ell}{\partial z} \right| , \tag{2.5}$$

et la composante axiale de la vitesse particulaire est très petite devant sa composante radiale,

$$|v_w| \gg |v_z| . \tag{2.6}$$

Par ailleurs, en raison de l'importance des effets liés à la viscosité de cisaillement, la variation de la vitesse particulaire suivant la variable z est très supérieure à sa variation suivant la direction w,

$$\left| \frac{\partial}{\partial w} v(w, z) \right| \ll \left| \frac{\partial}{\partial z} v(w, z) \right| . \tag{2.7}$$

i. Equation de Navier-Stokes

Ainsi, la composante radiale de l'équation de Navier-Stokes (2.1) prend la forme approchée suivante (équation de Poiseuille) :

$$\left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \ell'_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_w(w, z) = \frac{-1}{\rho_0 c_0} \frac{\partial}{\partial w} p_\ell(w) . \tag{2.8}$$

A cette équation est associée une condition de non glissement sur la membrane en $z = \epsilon(w)$, soit

$$v_w(w, \epsilon(w)) = 0 . \tag{2.9}$$

En $z = 0$, la présence des orifices dans l'électrode et de l'ouverture périphérique fait que la condition de non glissement n'est pas vérifiée. Au niveau de chaque orifice, la vitesse radiale peut

être approchée par (équation d'Euler)

$$v_w(w_k,0)\approx\frac{-1}{j\,\omega\,\rho_0}\frac{\partial}{\partial w}\,p_\ell(w_k)\,. \tag{2.10}$$

Pour prendre en compte ce glissement sur les orifices, un effet de moyenne sur toute la surface est retenu par l'approximation [17]

$$v_w(w,0)\approx\frac{-y_w}{j\,\omega\,\rho_0}\frac{\partial}{\partial w}\,p_\ell(w)\,, \tag{2.11}$$

où

$$y_w\approx\frac{\sum_k S_k}{S_{el}}\,, \tag{2.12}$$

S_k désignant la surface du k^{ième} orifice et $S_{el}=\pi a_{el}^2$ la surface de l'électrode arrière (il est clair que ce modèle très simplifié comporte un certain arbitraire en particulier en ce qu'il omet le lien entre les vitesses tangentielle et normale au niveau des orifices).

La solution du problème (2.8), (2.9) et (2.11), en régime harmonique (le facteur $e^{j\,\omega t}$ est omis), est écrite sous la forme de la somme de la solution particulière de l'équation (2.8) et de la solution générale de l'équation sans second membre :

$$v_w(w\,,z)=\frac{-1}{j\,\omega\,\rho_0}\frac{\partial}{\partial w}\,p_\ell(w)\left[1-\frac{(2-y_w)\cos(k_v(z-\epsilon(w)/2))}{2\cos(k_v\epsilon(w)/2)}+\frac{y_w\sin(k_v(z-\epsilon(w)/2))}{2\sin(k_v\epsilon(w)/2)}\right], \tag{2.13}$$

où le nombre d'onde de diffusion visqueuse k_v est défini par

$$k_v=\frac{1-j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k_0}{\ell'_v}}\,. \tag{2.14}$$

La valeur moyenne de la vitesse radiale v_w sur l'épaisseur de la couche de fluide prend alors la forme suivante :

$$\langle v_w(w)\rangle_\epsilon=\frac{-1}{j\,\rho_0\,\omega}F_v(w)\frac{\partial}{\partial w}\,p_\ell(w)\,, \tag{2.15}$$

avec

$$F_v(w)=1-f_v(w)\,, \tag{2.16.a}$$

et

$$f_v(w)=\frac{(2-y_w)}{2}\frac{\tan(k_v\epsilon(w)/2)}{k_v\epsilon(w)/2}\,. \tag{2.16.b}$$

ii. Equation de Fourier

L'écart instantané de température τ s'annule sur les deux électrodes en $z=\epsilon(w)$ et $z=0$: il s'agit ici d'une approximation du fait de la présence des orifices. A l'instar de la vitesse particulaire, sa variation suivant la variable w reste très inférieure à sa variation suivant z :

$$\left|\frac{\partial}{\partial w}\tau(w\,,z)\right|\ll\left|\frac{\partial}{\partial z}\tau(w\,,z)\right|\,. \tag{2.17}$$

Par suite, l'équation de conduction de la chaleur (2.2) prend la forme approchée

$$\left[\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t}-\ell_h\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tau=\frac{\gamma-1}{\hat{\beta}\gamma}\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t}p_\ell(w)\,. \tag{2.18}$$

La solution de cette équation qui satisfait aux conditions aux frontières

$$\begin{cases}\tau(w,0)=0 & \forall w\,, \quad (2.19.a)\\ \tau(w,\epsilon(w))=0 & \forall w\,, \quad (2.19.b)\end{cases}$$

s'écrit

$$\tau(w,z)=\frac{\gamma-1}{\hat{\beta}\gamma}p_\ell(w)\left[1-\frac{\cos(k_h(z-\epsilon(w)/2))}{\cos(k_h\epsilon(w)/2)}\right], \tag{2.20}$$

où le nombre d'onde de diffusion thermique k_h est défini par

$$k_h=\frac{1-j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k_0}{\ell_h}}\,. \tag{2.21}$$

L'expression de la valeur moyenne de la variation de température τ sur l'épaisseur de la couche du fluide s'écrit alors

$$\langle\tau(w)\rangle_\epsilon=\frac{\gamma-1}{\hat{\beta}\gamma}F_h(w)\,p_\ell(w)\,, \tag{2.22}$$

avec

$$F_h(w)=1-f_h(w)\,, \tag{2.23}$$

et

$$f_h(w)=\frac{\tan(k_h\epsilon(w)/2)}{k_h\epsilon(w)/2}\,. \tag{2.24}$$

iii. Equation de conservation de la masse

Enfin, en considérant un domaine élémentaire $\mathcal{D}_0$ d'épaisseur comprise entre w et $w+dw$ délimité par la membrane et l'électrode arrière, le premier membre de l'équation de conservation de la masse (2.3) prend la forme simplifiée suivante [18]

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{D}_0}&\left[\frac{\gamma}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}(p_\ell-\hat{\beta}\tau)+\rho_0\,\mathrm{div}(\vec{v})\right]d\mathcal{D}_0\\ &\approx\left[\frac{j\omega\gamma}{c_0^2}(p_\ell-\hat{\beta}\langle\tau(w)\rangle_\epsilon)+\frac{\rho_0}{w\epsilon(w)}\frac{\partial}{\partial w}(\langle v_w(w)w\epsilon(w)\rangle_\epsilon)\right]2\pi\epsilon(w)\,w\,dw\,,\end{aligned} \tag{2.25}$$

et compte tenu de ce que $v_z(w,\epsilon(w))=-j\omega\xi(w)$ le second membre s'écrit

$$\iiint_{\mathcal{D}_0}(\rho_0\,q)\,d\mathcal{D}_0=-2\pi\rho_0\,w\,dw\left[j\omega\xi(w)-v_z(w,0)\right]. \tag{2.26}$$

Ainsi, la loi de conservation de la masse s'écrit elle :

$$\frac{j\omega\gamma}{\rho_0c_0^2}(p_\ell-\hat{\beta}\langle\tau\rangle_\epsilon)+\frac{1}{w\epsilon(w)}\frac{\partial}{\partial w}(\langle v_w\rangle_\epsilon w\epsilon(w))=\frac{-1}{\epsilon(w)}\left[j\omega\xi(w)-v_z(w,0)\right]. \tag{2.27}$$

iv. Equation de comportement des orifices

Il reste à présent à exprimer la composante v_z de la vitesse particulaire en $z=0$ liée à la présence des orifices dans l'électrode arrière et la fente périphérique. Dans un orifice cylindrique indice k, la vitesse suivant l'axe z dans l'orifice v_{kz} s'écrit (Eq. (A.11.b))

$$v_{kz}(w_t,z)=\frac{-1}{j\omega\rho_0}\frac{\partial p_k}{\partial z}\left[1-\frac{J_0(k_v w_t)}{J_0(k_v a_k)}\right], \tag{2.28}$$

où p_k est la pression dans le k^{ième} orifice qui en première approximation est supposée indépendante de la cordonnée radiale w_t (à noter que cette solution est équivalente à la solution (2.13) avec $y_\epsilon=0$ et en permutant les rôles des coordonnées w et z). En intégrant cette équation sur la surface S_k du k^{ième} orifice, le débit suivant z dans l'orifice s'écrit

$$U_k=\iint_{S_k} v_{kz}\,dS_k=\frac{-S_k}{j\rho_0\omega}(1-f_{vk})\frac{\partial p_k}{\partial z}, \tag{2.29}$$

avec

$$f_{vk}=\frac{2J_1(k_v a_k)}{k_v a_k J_0(k_v a_k)}. \tag{2.30}$$

En considérant l'approximation ($\ell_k>0$)

$$\frac{\partial p_k}{\partial z}\approx\frac{p(w_k,0)-p_c}{\ell_k}, \tag{2.31}$$

où p_c désigne la pression supposée ici uniforme dans la cavité arrière. Ainsi, le débit sortant (au niveau $z=0$) d'un orifice s'écrit

$$U_k(w_k)=-Y_k\left[p_\ell(w_k,0)-p_c\right], \tag{2.32}$$

où l'admittance acoustique Y_k s'écrit

$$Y_k=\frac{S_k(1-f_{vk})}{j\omega\rho_0\ell_k}, \tag{2.33}$$

et où ℓ_k est la longueur du k^{ième} orifice (corrigée éventuellement de la correction de longueur classique, $\Delta\ell_k=8a_k/(3\pi)$, [3]).

Le modèle de la fente périphérique du microphone est approché en considérant une fente annulaire plate. Ce modèle est *a priori* considéré comme suffisant dans la situation concrète à laquelle nous sommes intéressés ici. La formulation simplifiée de la vitesse suivant l'axe z de la fente v_{fz} s'écrit (équation A.9 ou 2.13 avec $y_\epsilon=0$)

$$v_{fz}(w_f,z)\approx v_{fw}(w_f,z)=\frac{-1}{j\omega\rho_0}\frac{\partial}{\partial w_f}p_f(w_f)\left[1-\frac{\cos(k_v(z-e_f/2))}{\cos(k_v e_f/2)}\right], \tag{2.34}$$

où $e_f=a_m-a_e$ désigne l'épaisseur de la fente et p_f le champ de pression à l'intérieur de la fente.

Le débit suivant z de la fente périphérique de surface $S_f=\pi\left(a_m^2-a_e^2\right)$ s'écrit dans ces conditions

$$U_f(w_f)=-Y_f\left[p_\ell(w_f,0)-p_c\right], \tag{2.35}$$

l'admittance acoustique Y_f s'écrivant

$$Y_f = \frac{S_f\left(1 - f_{v,f}\right)}{j\,\omega\,\rho_0 \ell_f}\,, \tag{2.36}$$

où ℓ_f désigne la longueur de la fente et où

$$f_{v,f}(w) = \frac{\tan\left(k_v e_f / 2\right)}{k_v e_f / 2}\,. \tag{2.37}$$

A l'instar de la vitesse radiale v_w, un effet de moyenne sur toute la surface de l'électrode arrière est retenu pour exprimer la vitesse v_z en $z = 0$. Le débit de l'ensemble des ouvertures sur l'électrode suivant z en $z = 0$ s'écrit

$$S_0 \langle v_z \rangle_w = \sum_{k=1}^{N_k} U_k(w_k) + U_f(w_f) = \sum_{k=1}^{N_k} -Y_k\left[p_\ell(w_k,0) - p_c\right] - Y_f\left[p_\ell(w_f,0) - p_c\right], \tag{2.38}$$

où S_0 désigne la surface des ouvertures sur l'électrode.

En considérant l'approximation

$$p_\ell(w,0) \approx p_\ell(w_k,0) \approx p_\ell(w_f,0)\,, \tag{2.39}$$

il vient d'après l'équation (2.38)

$$S_o \langle v_z \rangle_w \approx -Y\left[p_\ell(w,0) - p_c\right], \tag{2.40}$$

où

$$Y = \sum_{k=1}^{N} Y_k + Y_f\,. \tag{2.41}$$

En considérant un modèle « petite cavité » [3, § 3.5] pour décrire le comportement acoustique de la cavité arrière, la pression acoustique p_c prend la forme

$$p_c = \frac{-\gamma P_0}{j\,\omega\,V_c} S_o \langle v_z \rangle_w\,, \tag{2.42}$$

où V_c désigne le volume de la cavité arrière. Le report de cette équation dans la relation (2.40) permet d'écrire finalement une expression approchée pour la vitesse v_z en $z = 0$:

$$v_z(w,0) \approx -y_\epsilon\, p_\ell(w)\,, \tag{2.43}$$

avec

$$y_\epsilon = \frac{Y / S_0}{1 + \dfrac{\gamma P_0}{j\,\omega\,V_c} Y} \frac{S_0}{S_m}, \tag{2.44}$$

La dissipation des couches limites thermiques de la petite cavité arrière peut être prise en compte en remplaçant dans l'équation (2.44) le terme V_c par [3]

$$V_c\left[1 + \frac{1-i}{\sqrt{2}}(\gamma - 1)\frac{S_c}{V_c}\sqrt{\frac{c_0\,\ell_h}{\omega}}\right],$$

où S_c désigne la surface de la cavité arrière.

v. Equation de comportement de la lame de fluide

Le report des équations (2.15), (2.22) et (2.43) dans l'équation de conservation de la masse (2.27) conduit à l'équation de propagation suivante :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial w^2}+\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{\epsilon(w)}\frac{\partial}{\partial w}\epsilon(w)+\frac{1}{F_v(w)}\frac{\partial}{\partial w}F_v(w)\right)\frac{\partial}{\partial w}+\frac{\omega^2}{F_v(w)c_0^2}(1+(\gamma-1)f_h(w))\right]p_\ell(w) = \frac{j\omega\rho_0}{F_v(w)\epsilon(w)}\left(j\omega\xi(w)+y_\epsilon p_\ell(w)\right), \tag{2.45}$$

soit

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial w^2}+\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{\epsilon(w)}\frac{\partial}{\partial w}\epsilon(w)+\frac{1}{F_v(w)}\frac{\partial}{\partial w}F_v(w)\right)\frac{\partial}{\partial w}+\chi^2\right]p_\ell(w)=\frac{-\omega^2\rho_0}{F_v(w)\epsilon(w)}\xi(w)\,, \tag{2.46}$$

où

$$\chi^2=\frac{\omega^2}{c_0^2}\frac{1+(\gamma-1)f_h(w)}{1-f_v(w)}-j\omega\frac{\rho_0 y_\epsilon}{\epsilon(w)\left(1-f_v(w)\right)}\,. \tag{2.47}$$

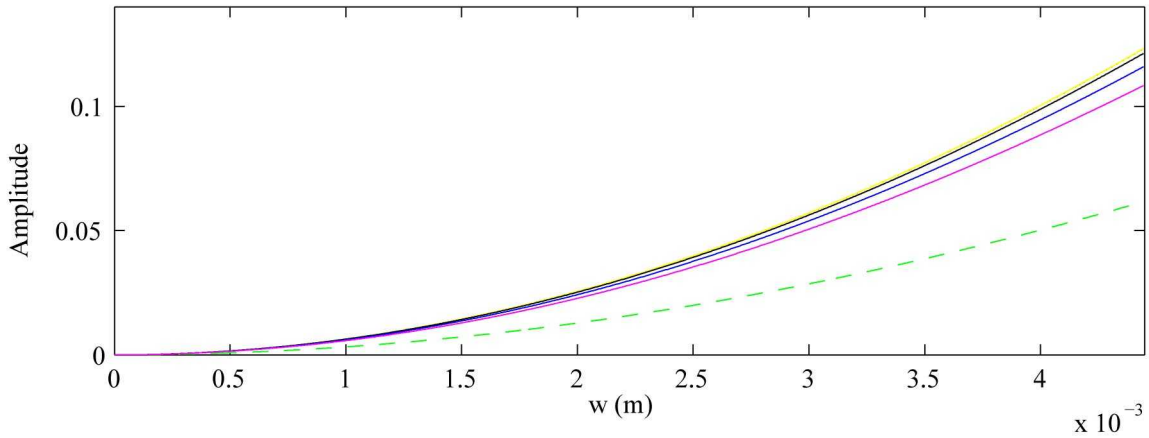


Figure 2.2. Valeurs absolues des fonctions $(w/F_v(w)\partial_w F_v(w))$ *aux fréquences 100 Hz (courbe jaune), 1 kHz (courbe rouge), 10 kHz (courbe noire), 20 kHz (courbe bleue), 30 kHz (courbe mauve) et de la fonction* $(w/\epsilon(w)\partial_w\epsilon(w))$ *(courbe verte) en fonction de la coordonnée radiale* w *pour une forme* $\epsilon(w)$ *parabolique où* $\epsilon(a_m)=20{,}77\ \mu$m *et* $\epsilon(0)=\epsilon(a_m)-0{,}64\ \mu$m .

Le premier membre de l'équation de propagation (2.46) fait apparaître les fonctions $\left[1/\epsilon(w)\right]\partial_w\epsilon(w)$ et $\left[1/F_v(w)\right]\partial_w F_v(w)$ qui traduisent la variation de l'épaisseur de la lame de fluide en fonction de la distance (w) au centre du dispositif. Ces deux fonctions sont à comparer à la fonction $1/w$ qui provient du système de coordonnées cylindriques. La figure 2.2 représente les modules des fonctions $(w/F_v(w)\partial_w F_v(w))$ (à comparer à l'unité) à 100 Hz (courbe jaune), 1 kHz (courbe rouge), 10 kHz (courbe noire), 20 kHz (courbe bleue), 30 kHz (courbe mauve), et le module de la fonction $(w/\epsilon(w)\partial_w\epsilon(w))$ (à comparer à l'unité) (courbe verte) en fonction de la coordonnée radiale w pour une forme $\epsilon(w)$ parabolique où $\epsilon(a_m)=20{,}77\ \mu m$ et $\epsilon(0)=\epsilon(a_m)-\xi_0(0)$. La déformée statique $\xi_0(w)$ s'écrit (en supposant $a_{el}\approx a_m$) :

$$\xi_0(w)\approx\frac{p_{s0}}{4T_m}(a_m^2-w^2)\,, \tag{2.48}$$

la force électrostatique par unité de surface s'écrivant pour un condensateur plan

$$p_{s0}=\frac{U_0^2\epsilon_0}{2\epsilon^2(a_m)}\,, \tag{2.49}$$

où $U_0=200$ V désigne la tension statique et $\epsilon_0\approx 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1} la permittivité du vide. Compte tenu des données du problème, $\xi_0(0)\approx 0{,}64$ μm d'où $\epsilon(0)\approx\epsilon(a_m)\approx 20$ μm.

Compte tenu des résultats obtenus (figure 2.2), la déflexion statique de la membrane peut être négligée en première approximation. Dans la référence [18], les auteurs proposent une méthode qui tient compte de ces facteurs, cette méthode pourra au besoin être reprise ultérieurement.

L'équation de propagation prend alors la forme simplifiée suivante :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial w^2}+\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial w}+\chi^2\right]p_\ell(w)=\frac{-\omega^2\rho_0}{F_v\epsilon}\xi(w)\,, \tag{2.50}$$

à laquelle est associée la condition en frontière $w=a_m$

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}p_\ell(w)\right)_{w=a_m}=0\,, \tag{2.51}$$

2.2.3 Champ de pression acoustique dans la lame de fluide

La solution de l'équation de propagation (2.50) satisfaisant à la condition (2.51) est recherchée sous la forme d'un développement sur la base des fonctions propres orthonormées $\Xi_n(w)$ du cylindre

$$p_\ell(w)=\sum_{\mu=0}^{\infty}p_{\ell\mu}\Xi_{\ell\mu}(w)\,, \tag{2.52}$$

où les fonctions propres orthonormées $\Xi_{\ell\mu}(w)$ s'écrivent

$$\Xi_{l\mu}(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_m J_0(\gamma_\mu)}J_0\left(\gamma_\mu\frac{w}{a_m}\right), \tag{2.53}$$

les coefficients γ_μ désignant les zéros de la dérivée première de la fonction de Bessel J_0 (soit $J'_0(\gamma_\mu)=0$, le premier étant noté γ_0), et où les coefficients $p_{\ell\mu}$ sont donnés par l'expression

$$p_{\ell\mu}=\frac{-\omega^2\rho_0}{F_v\epsilon}\frac{\langle\xi(w_0)|\Xi_{\ell\mu}(w_0)\rangle_m}{\chi^2-(\gamma_\mu/a_m)^2}\,, \tag{2.54}$$

où le produit scalaire est défini par

$$\langle\xi(w_0)|\Xi_{\ell\mu}(w_0)\rangle_m=2\pi\int_0^{a_m}\xi(w_0)\Xi_{\ell\mu}(w_0)w_0\,dw_0\,. \tag{2.55}$$

2.2.4 Champ de déplacement de la membrane

Dans le cas général (configuration émetteur et récepteur), le champ de déplacement normal $\xi(w)$ de la membrane, compté positif dans le sens des z croissants répond au problème suivant :

$$T_m(\Delta_w+k_w^2)\xi(w)=p_{av}(w)-p_\ell(w)-p_s(w)\,, \tag{2.56}$$

où T_m désigne la tension de la membrane, $p_{av}(w)$ désigne la pression à l'avant de la membrane,

$p_\ell(w)$ désigne la pression dans la lame de fluide à l'arrière de la membrane, $-p_s(w)$ désigne la force électrostatique par unité de surface appliquée sur la membrane en régime harmonique ($e^{j\omega t}$) et

$$k_w^2=\omega^2\frac{\sigma_s}{T_m}\,, \tag{2.57}$$

où σ_s désigne la masse surfacique de la membrane.

En considérant le microphone comme un condensateur quasi plan, la force électrostatique est inversement proportionnelle au carré de l'épaisseur $\epsilon(w)$ (Eq. (2.49)). La variation relative de la force électrostatique par unité de surface entre $w=0$ et $w=a_m$ vaut, pour $\epsilon(a_m)=20{,}77\ \mu\text{m}$ et $\epsilon(0)=\epsilon(a_m)-0{,}64\ \mu\text{m}$

$$\frac{P_s(a_m)-p_s(0)}{p_s(0)}=\frac{\epsilon^2(0)}{\epsilon^2(a_m)}-1\approx-0{,}06\,. \tag{2.58}$$

Ainsi, la force électrostatique par unité de surface p_s peut-elle être supposée uniforme sur la surface de la membrane.

L'équation (2.56) peut être écrite sous la forme

$$T_m(\Delta_w+k_w^2)\xi(w)=[p_{av}(w)-p_{av}(a_m)]-[p_\ell(w)-p_\ell(a_m)]+[p_{av}(a_m)-p_\ell(a_m)-p_s] \tag{2.59}$$

où les facteurs $p_{av}(a_m)$ et $p(a_m)$ ont été ajoutés et retranchés dans le second membre pour assurer la compatibilité des formes de solutions modales pour un second membre donné (Eq. (2.64)).

La solution pour le déplacement de la membrane satisfaisant à la condition de Dirichlet en $w=a_m$ peut être exprimée de la manière suivante, somme de la solution générale de l'équation sans second membre $J_0(k_w w)$ et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (somme d'une constante B_0 et d'un développement modal) :

$$\xi(w)=B_0\left(1-\frac{J_0(k_w w)}{J_0(k_w a_m)}\right)+\sum_{\mu=0}^{\infty}\xi_\mu\Psi_\mu(w)\,. \tag{2.60}$$

où les fonctions propres orthonormées $\Psi_\mu(w)$ s'écrivent

$$\Psi_\mu(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_m J_1(j_\mu)}J_0\left(j_\mu\frac{w}{a_m}\right), \tag{2.61}$$

j_μ représentant les zéros de la fonction de Bessel J_0 (le premier étant noté j_0) et où les coefficients B_0 et ξ_μ sont donnés par les expressions

$$\begin{cases} B_0=\dfrac{p_{av}(a_m)-p_\ell(a_m)-p_s}{T_m k_w^2}\,, & \text{(2.62.a)}\\[2ex] \xi_\mu=\dfrac{\langle p_{av}(w_0)-p_{av}(a_m)\,|\,\Psi_\mu(w_0)\rangle_m-\langle p_\ell(w_0)-p_\ell(a_m)\,|\,\Psi_\mu(w_0)\rangle_m}{T_m(k_w^2-(j_\mu/a_m)^2)}\,. & \text{(2.62.b)} \end{cases}$$

où le numérateur de l'expression du coefficient ξ_n représente le produit scalaire sur le domaine $w\in(0,a_m)$

$$\begin{aligned}\left\langle p_{av}(w_0)-p_{av}(a_m)\middle|\Psi_\mu(w_0)\right\rangle_m-\left\langle p_\ell(w_0)-p_\ell(a_m)\middle|\Psi_\mu(w_0)\right\rangle_m \\ =2\pi\int_0^{a_m}\left([p_{av}(w_0)-p_{av}(a_m)]-[p_\ell(w_0)-p_\ell(a_m)]\right)\Psi_\mu(w_0)w_0\,dw_0 .\end{aligned} \tag{2.63}$$

A noter que la partie « modale » de la solution est solution de l'équation

$$T_m(\Delta_w+k_w^2)\sum_{\mu=0}^{\infty}\xi_\mu\Psi_\mu(w)=[p_{av}(w)-p_{av}(a_m)]-[p_\ell(w)-p_\ell(a_m)] , \tag{2.64}$$

où $\Delta_w\equiv-\left(j_\mu/a_m\right)^2$; pour $w=a_m$ l'égalité est bien satisfaite ($0=0$) du fait du choix retenu pour le second membre.

A ce point de l'exposé, la solution du problème présenté est donnée par les deux solutions couplées pour les deux inconnues, la pression acoustique $p_\ell(w)$ (Eqs. 2.52 à 2.55) et le champ de déplacement de la membrane $\xi(w)$ (Eq. 2.60 à 2.63).

2.3 Efficacité en pression

Pour un microphone utilisé en récepteur et pour un champ de pression à l'avant de la membrane p_{av} uniforme, l'efficacité en pression M_p s'écrit :

$$M_p=\frac{u_r}{p_{av}} , \tag{2.65}$$

où u_r est la tension en circuit ouvert générée aux bornes des électrodes. Compte tenu du déplacement $\xi(w)$ de la membrane, pour une électrode arrière plane et en négligeant la déflexion statique de la membrane, la tension u_r s'écrit

$$u_r=\frac{2\pi U_0}{S_{el}\epsilon}\int_0^{a_{el}}\xi(w)\,w\,dw , \tag{2.66}$$

U_0 étant la tension de polarisation du microphone.

Lorsque la pression à l'avant de la membrane p_{av} n'est pas uniforme, la définition (2.65) de l'efficacité en pression n'est plus adaptée. Une solution consiste à considérer une pression moyenne sur la surface de la membrane [10], soit pour l'efficacité

$$M_p=\frac{u_r}{\langle p_{av}(w)\rangle_m} . \tag{2.67}$$

Néanmoins, cette définition ne rend pas réellement compte de l'influence de la non-uniformité du champ de pression sur l'efficacité, l'influence du champ de pression sur l'efficacité étant plus importante là ou le déplacement de la membrane est plus important. K. Rasmussen [15] propose de corriger les effets de la non-uniformité du champ de pression sur l'efficacité avec un facteur de pondération appliqué au champ de pression $p_{av}(w)$, soit

$$M_p=\frac{u_r}{\langle\bar{v}(w)\,p_{av}(w)\rangle_m} , \tag{2.68}$$

où $\bar{v}(w)$ est le facteur de pondération ayant la forme du champ de vitesse (ou de déplacement) $v(w)=j\omega\xi(w)$ de la membrane, soit

$$\bar{v}(w)=\frac{v(w)}{\langle v(w)\rangle_m}\,. \tag{2.69}$$

Cette pondération traduit un facteur de couplage qui ne repose pas ici sur des arguments précis. On se propose ici de tester ces deux définitions (2.67) et (2.68) en fonction du champ de pression à l'avant de la membrane afin de vérifier la stabilité de l'efficacité du microphone obtenue.

Le champ de pression $p_{av}(w)$ est écrit sous la forme d'un développement modal, soit

$$p_{av}(w)=\sum_{\mu=0}^{\infty} p_\mu \Xi_\mu(w)\,, \tag{2.70}$$

où les fonctions propres normalisées $\Xi_\mu(w)$ s'écrivent :

$$\Xi_\mu(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_m J_0(\gamma_\mu)} J_0\left(\gamma_\mu \frac{w}{a_m}\right). \tag{2.71}$$

Ainsi, le problème couplé est caractérisé par le champ de pression $p_\ell(w)$ dans la lame de fluide du microphone (Eq. (2.52)), par le champ de déplacement de la membrane $\xi(w)$ (Eq. (2.60)) et par le champ de pression à l'avant de la membrane $p_{av}(w)$ (Eq. (2.70)). Les coefficients inconnus du problème forment trois ensembles : $p_{\ell\mu}$, B_0 et ξ_μ, définis respectivement par les équations (2.54), (2.62.a, où les variations de la force électrostatique par unité de surface sont négligées $p_s=0$, la tension u_r étant celle en circuit ouvert (impédance électrique infinie)) et (2.62.b). La résolution du problème est effectuée en écrivant ces équations sous forme matricielle ; le détail de ces calculs est reporté en Annexe D pour ne pas alourdir ici le propos.

i. Champ de pression à l'avant de la membrane uniforme : efficacité en pression

Un champ de pression uniforme à l'avant de la membrane est obtenu en ne considérant que le premier mode du développement (2.70), soit : $p_0=\sqrt{\pi}a_m$ et $p_n=0\,\forall\, n\geq 1$, conduisant ainsi à $p_{av}=1$ Pa. L'efficacité en pression obtenue en utilisant les caractéristiques d'un microphone ½" B&K Type 4134 (tableau 2.1) est représentée en module sur la figure 2.3 en fonction de la fréquence (trait plein). Le niveau en basses fréquences (-40 dB) est légèrement inférieur à celui annoncé par le constructeur (-38 dB) [19]. Ce niveau dépend néanmoins fortement de la tension T_m et de la masse surfacique ρ_s de la membrane et ces données sont variables d'une référence à l'autre. Par exemple, en utilisant le couple (T_m, ρ_s) donné dans la référence [20] pour un microphone ½" B&K Type 4180, le niveau calculé de l'efficacité en basse fréquences est de -38,5 dB.

Au delà de 10 kHz, une variation importante du niveau de l'efficacité est observée. Cette variation atteint 20 dB et est nettement supérieure à celle donnée par le constructeur (maximum 1,5 dB). Cette différence est très certainement due aux approximations effectuées dans le développement du modèle du microphone, entre autres au niveau de l'amortissement interne de la membrane et au niveau de la prise en compte des orifices de l'électrode sous la forme d'une admittance moyenne, qui néglige les effets dissipatifs liés aux discontinuités de bord des orifices. De la sorte la résistance acoustique de l'ensemble est sous-estimée. En divisant l'admittance y_ϵ des ouvertures sur l'électrode (Eq. (2.44)) par un facteur dix, la variation observée au delà de 10 kHz peut être nettement atténuée (trait discontinu). Mais ceci nécessiterait une étude plus approfondie ; notamment certains résultats de la littérature devraient pouvoir être adaptés pour évaluer les effets de bord [21,22,23].

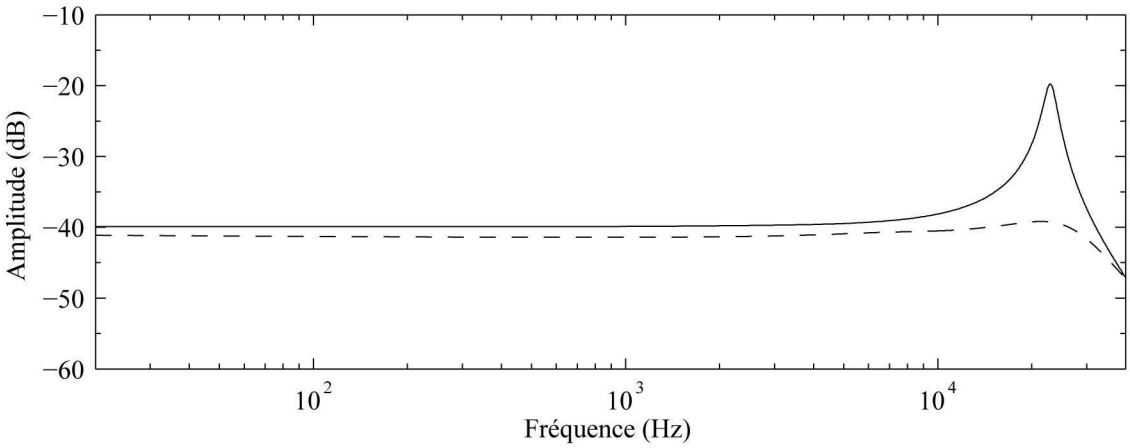


Figure 2.3. Module calculé de l'efficacité en pression M_p (en dB, ref. 1V/Pa) d'un microphone ½" B&K Type 4134 obtenu pour un champ de pression à l'avant de la membrane uniforme, à partir des caractéristiques du microphone données dans le tableau 2.1 (trait plein) et en divisant l'admittance y_e des ouvertures sur l'électrode (Eq. (2.44)) par un facteur dix (trait discontinu).

ii. Champ de pression à l'avant de la membrane non uniforme : efficacité en pression, définition (2.67)

Un champ de pression à l'avant de la membrane non uniforme est ici modélisé en ne considérant que les deux premiers modes du développement (2.70) non nul, soit en imposant $\langle p_{av}(w)\rangle_m = 1$ Pa :

$$p_0 = \sqrt{\pi}\, a_m\,,\quad p_1 = k\, p_0 \text{ (où } k \in \mathbb{R}\text{) et } p_n = 0, \forall\, n \geq 2\,. \tag{2.72}$$

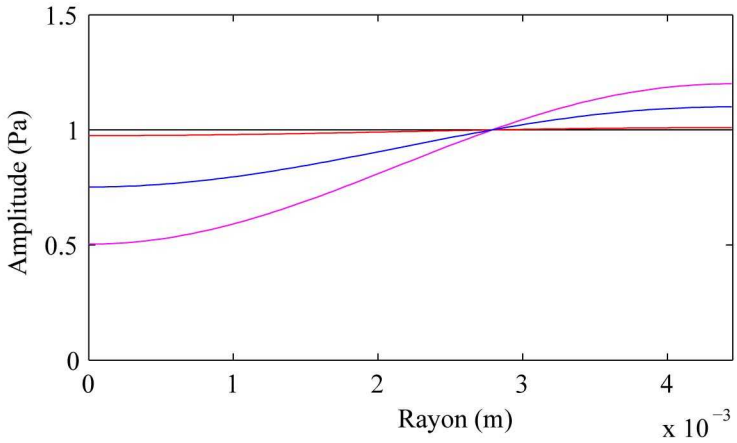


Figure 2.4. Amplitude du champ de pression à l'avant de la membrane $p_{av}(w)$ en fonction du rayon de la membrane du microphone (½") défini par les équations (2.70), (2.71) et (2.72) où $k = 0$ (mode plan, courbe noire), $k = 0{,}01$ (courbe rouge), $k = 0{,}1$ (courbe bleue) et $k = 0{,}2$ (courbe mauve).

La figure 2.4 représente quatre profils de champ de pression à l'avant de la membrane en fonction du rayon de la membrane avec $k = 0$ (mode plan, courbe noire), $k = 0{,}01$ (courbe rouge), $k = 0{,}1$ (courbe bleue) et $k = 0{,}2$ (courbe mauve). La figure 2.5.a représente les efficacités obtenues avec les champs de pression à l'avant de membrane ainsi définis en considérant la définition (2.67). La figure 2.5.b montre les différences entre les efficacités obtenues avec un champ de pression à l'avant de la membrane non uniforme et celle obtenue en mode plan. Ainsi, la définition (2.67) conduit à des efficacités différentes selon le profil du champ de pression à l'avant de la membrane et ne semble pas tenir compte des effets de la non-uniformité du champ de pression sur l'efficacité du

microphone.

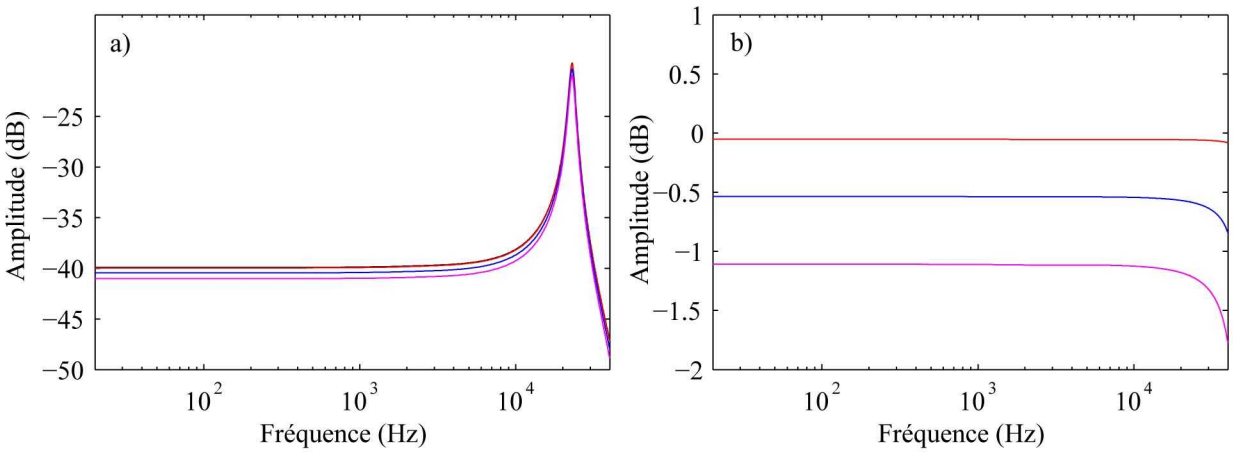


Figure 2.5. a) Module de l'efficacité en pression M_p (en dB, ref. 1V/Pa) calculé avec la définition (2.67), en fonction des champs de pression à l'avant de la membrane définis sur la figure 2.4 : $k=0$ (mode plan, courbe noire), $k=0{,}01$ (courbe rouge), $k=0{,}1$ (courbe bleue) et $k=0{,}2$ (courbe mauve). b) Différences entre les efficacités calculées avec $k=0{,}01$ (courbe rouge), $k=0{,}1$ (courbe bleue), $k=0{,}2$ (courbe mauve) et l'efficacité calculée avec $k=0$ (mode plan).

iii. Champ de pression à l'avant de la membrane non uniforme : efficacité en pression, définition (2.68)

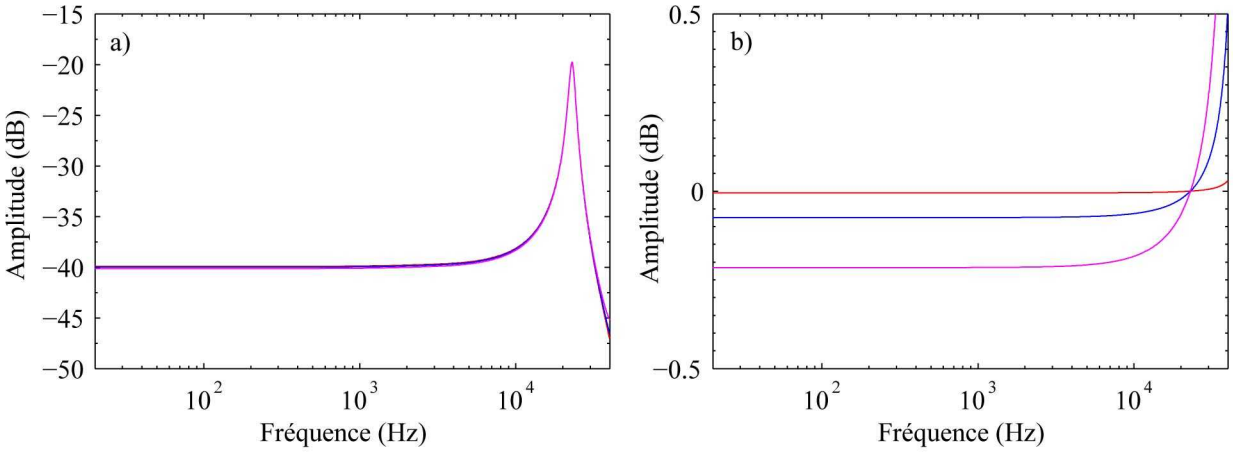


Figure 2.6. a) Module de l'efficacité en pression M_p (en dB, ref. 1V/Pa) calculé avec la définition (2.68), en fonction des champs de pression à l'avant de la membrane définis sur la figure 2.4 : $k=0$ (mode plan, courbe noire), $k=0{,}01$ (courbe rouge), $k=0{,}1$ (courbe bleue) et $k=0{,}2$ (courbe mauve). b) Différences entre les efficacités calculées avec $k=0{,}01$ (courbe rouge), $k=0{,}1$ (courbe bleue), $k=0{,}2$ (courbe mauve) et l'efficacité calculée avec $k=0$ (mode plan).

L'efficacité du microphone est à présent calculée en considérant la définition (2.68) où la pression moyenne à l'avant de la membrane est pondérée par le profil de vitesse $\bar{v}(w)$ de la membrane (Eq. (2.69)) [15]. La figure 2.6.a représente les efficacités obtenues en considérant les champs de pression $p_{av}(w)$ définis sur la figure 2.4 (Eqs. (2.70), (2.71) et (2.72) avec $k=0$ (mode plan, courbe noire), $k=0{,}01$ (courbe rouge), $k=0{,}1$ (courbe bleue) et $k=0{,}2$ (courbe mauve)). La figure 2.6.b montre les différences entre les efficacités obtenues avec un champ de pression à l'avant de la membrane non uniforme et celle obtenue en mode plan. Ainsi, les efficacités obtenues en considérant le facteur de pondération $\bar{v}(w)$ convergent davantage vers l'efficacité obtenue pour $p_{av}(w)$ uniforme. Ce facteur de pondération semble donc corriger les effets de la non-uniformité du

champ pression à l'avant de la membrane sur l'efficacité du microphone. En pratique, le champ de pression à l'avant du microphone est celui d'une cavité de couplage (cf. infra paragraphe 2.4) ; par suite les coefficients du développement modal de la pression à l'avant de la membrane du récepteur sont fonctions de la fréquence ce qui implique que le facteur k introduit précédemment est lui-même fonction de la fréquence (contrairement au choix retenu précédemment). Il convient donc à ce point d'effectuer une modélisation globale du système d'étalonnage constitué de deux microphones, un récepteur et un émetteur, couplés par une cavité de couplage cylindrique.

2.4 Modélisation globale du système d'étalonnage

Le système étudié est représenté sur la figure 2.7 ; il est supposé à symétrie axiale. Il est constitué de deux microphones électrostatiques de même type, l'un émetteur et l'autre récepteur, couplés par une colonne de fluide compressible dissipatif contenue dans un cylindre de longueur ℓ et de rayon a. Les membranes des microphones émetteur en $z=0$ et récepteur en $z=\ell$, respectivement de rayon a_e et a_r (légèrement inférieur au rayon a de la cavité) sont animées des déplacements $\xi_e(w)$ et $\xi_r(w)$. Les champs de pression sont notés $p(z,w)$, $p_{\ell e}(w)$, $p_{\ell r}(w)$, p_{ce} et p_{cr} respectivement dans la cavité de couplage, dans les couches de fluides d'épaisseurs ϵ_e et ϵ_r, dans les cavités arrières des microphones émetteur et récepteur de volumes V_{ce} et V_{cr}.

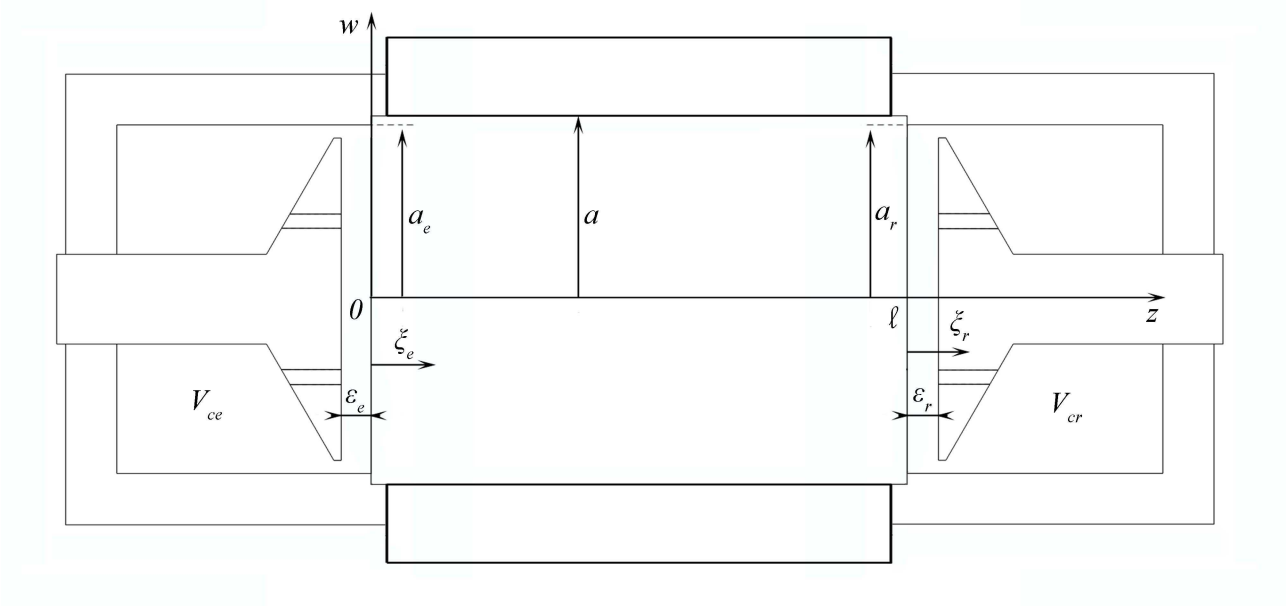


Figure 2.7. Etalonnage en pression par la méthode de la réciprocité : schéma de principe.

2.4.1 Champs de déplacement des membranes et champs acoustiques

La résolution du problème impose la connaissance des formes de solutions des pressions acoustiques dans les différents domaines ainsi que les formes de solutions des champs de déplacement des membranes des microphones émetteur et récepteur ; ces solutions sont reportées ci-dessous.

i. Champ de pression dans la cavité de couplage

Le champ de pression dans la cavité de couplage a fait l'objet d'un important travail de modélisation [10]. Les auteurs proposent un modèle analytique développé sur la base d'une solution

modale, reposant sur la formulation intégrale et prenant en compte la nature dissipative du fluide. Les développements qui suivent sont extraits de cette étude [14, § 4] et [10], reportée en Annexe B.

Le problème est simplifié en supposant le champ de pression dans la cavité de couplage à symétrie axiale. Il s'écrit sous la forme d'un développement sur la base des fonctions propres orthonormées du cylindre (Eq. B.9)

$$p(w,z)=\sum_{\mu=0}^{\infty} p_\mu(z)\,\Xi_\mu(w)\,, \tag{2.73}$$

où

$$\Xi_\mu(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a\,J_0(\gamma_\mu)}\,J_0\!\left(\gamma_\mu\frac{w}{a}\right), \tag{2.74}$$

les coefficients p_μ étant donnés par l'expression (B.10) (avec $y_c=0$, $v_e=j\,\omega\zeta_e$ et $v_R=j\,\omega\zeta_r$)

$$p_\mu(z)=\frac{-\omega^2\rho_0}{1-K_v}\left[g_\mu(z,0)\langle\xi_e(w_0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle_e+g_\mu(z,\ell)\langle\xi_r(w_0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle_r\right], \tag{2.75}$$

et K_v étant donné par l'expression (A.20).

La fonction de Green $g_\mu(z,z_0)$ s'écrit

$$\begin{cases} g_\mu(z,z_0)=-\dfrac{\cos(k_{z\mu}z+\varphi_\mu)\cos(k_{z\mu}(z_0-\ell)-\varphi_\mu)}{k_{z\mu}\sin(k_{z\mu}\ell+2\varphi_\mu)}, & \text{si } z<z_0, \qquad (2.76.a)\\ g_\mu(z,z_0)=-\dfrac{\cos(k_{z\mu}z_0+\varphi_\mu)\cos(k_{z\mu}(z-\ell)-\varphi_\mu)}{k_{z\mu}\sin(k_{z\mu}\ell+2\varphi_\mu)}, & \text{si } z>z_0, \qquad (2.76.b) \end{cases}$$

où

$$k_{z\mu}^2=k_0^2-(\gamma_\mu/a)^2\,, \tag{2.77}$$

et

$$\tan\varphi_{0,\ell\mu}=\frac{-j\,k_0\zeta_{z0,\ell\mu}}{k_{z\mu}}\,, \tag{2.78}$$

$\zeta_{z0,\ell\mu}$ désignant l'admittance thermo-visqueuse en parois en $z=0$ et $z=\ell$

$$\begin{cases} \zeta_{z0,\ell\mu}\approx\dfrac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{k_0}\left[\dfrac{(\gamma_\mu/a_{e,r})^2}{k_0^2}\sqrt{\ell_v'}+(\gamma-1)\sqrt{\ell_h}\right], & \text{pour } Re(k_0^2)\geq(\gamma_\mu/a_{e,r})^2, \qquad (2.79.a)\\ \zeta_{z0,\ell\mu}\approx\dfrac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{k_0}\left[\sqrt{\ell_v'}+(\gamma-1)\sqrt{\ell_h}\right], & \text{pour } Re(k_0^2)\leq(\gamma_\mu/a_{e,r})^2. \qquad (2.79.b) \end{cases}$$

ii. Champ de pression dans la couche de fluide d'épaisseur ε_e du microphone émetteur

Le champ de pression dans la couche de fluide d'épaisseur ϵ_e du microphone émetteur est donné par les expressions (2.52 à 2.55), soit

$$p_{\ell e}(w)=\sum_{\mu=0}^{\infty} p_{\ell e\mu}\,\Xi_{e\mu}(w)\,, \tag{2.80}$$

où les fonctions propres orthonormées $\Xi_{en}(w)$ s'écrivent

$$\Xi_{e\mu}(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_e J_0(\gamma_\mu)}J_0\left(\gamma_\mu\frac{w}{a_e}\right), \tag{2.81}$$

les coefficients $p_{\ell e\mu}$ étant donnés par l'expression

$$p_{\ell e\mu}=\frac{-\omega^2\rho_0}{F_{ve}\epsilon_e}\frac{\langle\xi_e(w_0)|\Xi_{e\mu}(w_0)\rangle_e}{\chi_e^2-(\gamma_\mu/a_e)^2}, \tag{2.82}$$

où F_{ve} et χ_e^2 sont donnés respectivement par les équations (2.16.a) et (2.47) avec $\epsilon(w)=\epsilon_e$.

iii. Champ de déplacement de la membrane du microphone émetteur

Le champ de déplacement ξ_e de la membrane du microphone émetteur est donné par les équations (2.60 à 2.62), soit

$$\xi_e(w)=B_{0e}\left(1-\frac{J_0(k_{we}w)}{J_0(k_{we}a_e)}\right)+\sum_{\mu=0}^{\infty}\xi_{e\mu}\Psi_{e\mu}(w), \tag{2.83}$$

où les fonctions propres orthonormées $\Psi_{e\mu}(w)$ s'écrivent

$$\Psi_{e\mu}(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_e J_1(j_\mu)}J_0\left(j_\mu\frac{w}{a_e}\right), \tag{2.84}$$

les coefficients B_{0e} et $\xi_{e\mu}$ étant donnés par les expressions

$$\begin{cases} B_{0e}=\dfrac{p(a_e,0)-p_{\ell e}(a_e)-p_s}{T_{me}k_{we}^2}, & \text{(2.85.a)}\\ \xi_{e\mu}=\dfrac{\langle p(w_0,0)-p(a_e,0)|\Psi_{e\mu}(w_0)\rangle_e-\langle p_{\ell e}(w_0)-p_{\ell e}(a_e)|\Psi_{e\mu}(w_0)\rangle_e}{T_{me}(k_{we}^2-(j_\mu/a_e)^2)}, & \text{(2.85.b)}\end{cases}$$

T_{me} désignant la tension de la membrane de l'émetteur et

$$k_{we}^2=\omega^2\frac{\sigma_s}{T_{me}}. \tag{2.86}$$

iv. Champ de pression dans la couche de fluide d'épaisseur ε_r du microphone récepteur

Le champ de pression dans le film de fluide d'épaisseur ϵ_r du microphone récepteur s'écrit

$$p_{\ell r}(w)=\sum_{\mu=0}^{\infty}p_{\ell r\mu}\Xi_{r\mu}(w), \tag{2.87}$$

où les fonctions propres orthonormées $\Xi_{r\mu}(w)$ s'écrivent

$$\Xi_{r\mu}(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_r J_0(\gamma_\mu)}J_0\left(\gamma_\mu\frac{w}{a_r}\right). \tag{2.88}$$

Compte tenu de ce que le champ de déplacement $\xi_r(w)$ de la membrane réceptrice est compté positif suivant l'axe z (figure 2.7), le signe du membre de droite de l'équation de propagation (2.45) est changé. Cela conduit à l'expression des coefficients $p_{\ell r\mu}$ suivante (Eq. 2.54) :

$$p_{\ell r\mu}=\frac{\omega^2\rho_0}{F_{vr}\epsilon_r}\frac{\langle\xi_r(w_0)|\Xi_{r\mu}(w_0)\rangle_r}{\chi_r^2-(\gamma_\mu/a_r)^2}, \tag{2.89}$$

où la fonction F_{vr} est donnée par l'équation (2.16.a et b) avec $\epsilon(w)=\epsilon_r$ et où χ_r^2 s'écrit compte tenu du discours précédent (Eq. 2.47) :

$$\chi_r^2=\frac{\omega^2}{c_0^2}\frac{1+(\gamma-1)f_{hr}}{1-f_{vr}}+j\,\omega\frac{\rho_0 y_{\epsilon_r}}{\epsilon_r\left(1-f_{vr}\right)}\,, \tag{2.90}$$

où les fonctions f_{hr} et f_{vr} sont respectivement données par les équations (2.24) et (2.16.b) avec $\epsilon(w)=\epsilon_r$ et où l'admittance y_{ϵ_r} est de signe opposé à l'admittance y_{ϵ_e} (Eqs. (2.43) et (2.44)).

v. Champ de déplacement de la membrane du microphone récepteur

Pour le microphone récepteur, le champ de déplacement de la membrane répond au problème (2.56) où les variations de la force électrostatique par unité de surface sont négligées $p_s=0$ puisque le microphone récepteur est connecté à une impédance électrique infinie. Le champ de déplacement de la membrane s'écrit :

$$\xi_r(w)=B_{0r}\left(1-\frac{J_0(k_{wr}w)}{J_0(k_{wr}a_r)}\right)+\sum_{\mu=0}^{\infty}\xi_{r\mu}\Psi_{r\mu}(w)\,, \tag{2.91}$$

où les fonctions propres orthonormées $\Psi_{r\mu}(w)$ s'écrivent

$$\Psi_{r\mu}(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_r J_1(j_\mu)}J_0\left(j_\mu\frac{w}{a_r}\right)\,. \tag{2.92}$$

A l'instar du paragraphe précédent, compte tenu de ce que le champ de déplacement $\xi_r(w)$ est compté positif suivant l'axe z (figure 2.7), le signe du second membre de l'équation (2.56) est changé. Cela conduit aux expressions des coefficients B_{0r} et $\xi_{r\mu}$ suivantes :

$$\begin{cases} B_{0r}=-\dfrac{p(a_r,\ell)-p_{\ell r}(a_r)}{T_{mr}\,k_{wr}^2}, & \text{(2.93.a)}\\[2ex] \xi_{r\mu}=-\dfrac{\left\langle p(w_0,\ell)-p(a_r,\ell)\middle|\Psi_{r\mu}(w_0)\right\rangle_r-\left\langle p_{\ell r}(w_0)-p_{\ell r}(a_r)\middle|\Psi_{r\mu}(w_0)\right\rangle_r}{T_{mr}(k_{wr}^2-(j_\mu/a_r)^2)}, & \text{(2.93.b)} \end{cases}$$

T_{mr} désignant la tension de la membrane du récepteur et

$$k_{wr}^2=\omega^2\frac{\sigma_s}{T_{mr}}\,. \tag{2.94}$$

2.4.2 Résultats théoriques

Le problème est caractérisé par les champs de pression $p_{\ell e}$ et $p_{\ell r}$ dans les lames de fluides des microphones émetteur et récepteur (Eqs. (2.80) et (2.87) et par les champs de déplacement de leur membrane ξ_e et ξ_r (Eqs. (2.83) et (2.91)) couplés entre eux par le champ de pression dans la cavité cylindrique (Eq. (2.73)). Ainsi, les coefficients inconnus du problème forment six ensembles : $p_{\ell e\mu}$, $p_{\ell r\mu}$, B_{0e}, $\xi_{e\mu}$, B_{0r} et $\xi_{r\mu}$ définis respectivement par les équations (2.82), (2.89), (2.85.a et b) et (2.93.a et b) couplés aux champ de pression dans la cavité de couplage (Eqs. (2.73), (2.74),(2.75) et (2.76.a et b)). Compte tenu du nombre important d'équations couplées, la résolution du problème est effectuée en écrivant ces équations sous forme matricielle ; le détail de ces calculs est reporté en Annexe D pour ne pas alourdir ici le propos.

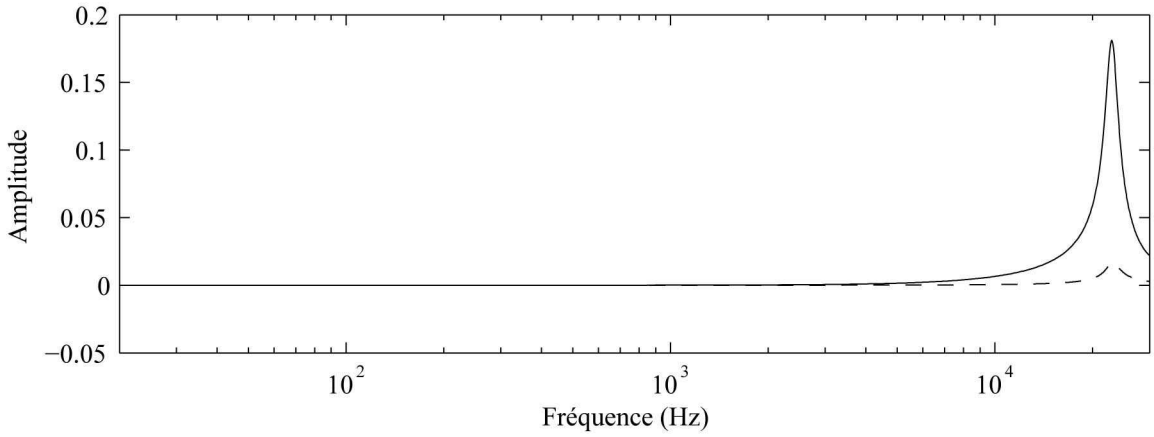


Figure 2.8. Module du rapport k des deux premiers coefficients ($p_1(\ell)/p_0(\ell)$, trait plein) et ($p_2(\ell)/p_0(\ell)$, trait discontinu) du développement modal (Eq. (2.75)) du champ de pression en $z=\ell$ à l'avant de la membrane du microphone récepteur, obtenu pour une cavité de couplage courante ($a=4{,}7$ mm ; $\ell=4{,}7$ mm).

La figure 2.8 présente le module du rapport des deux premiers coefficients ($p_1(\ell)/p_0(\ell)$, trait plein) du développement modal (Eq. (2.73)) du champ de pression en $z=\ell$ à l'avant de la membrane du microphone récepteur, obtenu pour une cavité de couplage courante ($a=4{,}7$ mm , $\ell=4{,}7$ mm) et en considérant les microphones émetteur et récepteur identiques (cf. tableau 2.1). Sur cette même figure la courbe en trait discontinu montre que le terme suivant ($p_2(\ell)/p_0(\ell)$) du développement (2.73) apporte une contribution négligeable y compris en hautes fréquences (par rapport à celle du premier mode).

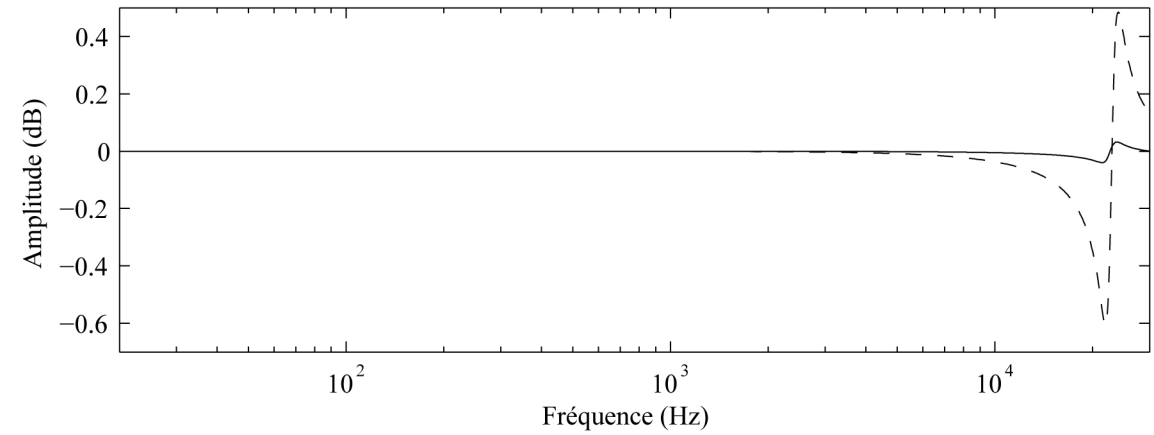


Figure 2.9. Différence entre les efficacités obtenues avec le champ de pression incident défini par le développement modal (2.73) où le rapport $p_1(\ell)/p_0(\ell)$ est donné sur la figure 2.8 et celle obtenue pour un champ de pression uniforme ; en considérant : la définition (2.67) (sans pondération, trait discontinu) et la définition (2.68) (avec pondération $\bar{v}(w)$, Eq. (2.69), trait plein)

La figure 2.9 présente la différence entre les efficacités obtenues avec le champ de pression à l'avant de la membrane ainsi défini (non uniforme) et celle obtenue pour un champ de pression uniforme ; en considérant : la définition (2.67) (sans pondération, trait discontinu) et la définition (2.68) (avec pondération $\bar{v}(w)$, Eq. (2.69), trait plein). Ainsi, l'efficacité obtenue en considérant le facteur de pondération $\bar{v}(w)$ converge davantage vers l'efficacité obtenue avec une pression à l'avant de la membrane uniforme. Ce facteur de pondération semble corriger les effets de la non-uniformité du champ de pression dans la cavité de couplage sur la mesure de l'efficacité du microphone. Néanmoins, ce résultat doit être nuancé du fait que le modèle du microphone

développé ici n'est pas satisfaisant en haute fréquences (cf. paragraphe 2.3). Les méthodes numériques envisagées à l'avenir permettront peut être d'apporter un éclairage sur ce point.

2.5 Conclusion

L'étude présentée dans ce chapitre porte sur l'étalonnage des microphones en cavité, plus particulièrement sur les effets de la non-uniformité du champ de pression à l'avant de la membrane du microphone sur les résultats de l'étalonnage. Dans le cadre de l'étalonnage en pression par la méthode de la réciprocité, compte tenu de la non-uniformité du champ de déplacement de la membrane du microphone émetteur et des différences de diamètres (faibles) entre la cavité de couplage et la partie mobile de la membrane des deux microphones, l'influence des modes radiaux sur les résultats d'étalonnages est non négligeable. Dans la référence [15], K. Rasmussen propose de corriger les effets de cette non-uniformité à l'aide d'un facteur de pondération appliqué au champ de pression à l'avant de la membrane du microphone récepteur, cette pondération conduisant alors à une meilleur reproductibilité des résultats de l'étalonnage.

Les résultats reportés ici sont obtenus pour des microphones électrostatiques ½". Les résultats obtenus pour l'efficacité, issus d'une modélisation approchée du microphone, sont conformes aux résultats attendus en basses fréquences, mais par contre s'en écartent aux fréquences supérieures à 10 kHz. Par ailleurs, le bien fondé du facteur de pondération retenu par K. Rasmussen, pour corriger les effets liés à la non-uniformité du champ de pression à l'avant de la membrane du microphone dans l'expression de son efficacité, a été vérifié d'abord en considérant des champs de pression très particuliers, puis en reprenant la modélisation globale du système d'étalonnage constitué de deux microphones et une cavité de couplage. Cette dernière modélisation montre l'intérêt d'exprimer de façon réaliste le champ de pression à l'avant de la membrane en fonction de la fréquence.

Compte tenu des imperfections du modèle du microphone et du poids des modes supérieurs dans la cavité de couplage, des modèles beaucoup plus précis, voire des méthodes numériques, auront a être mis en œuvre sur la base de travaux récents [24,25].

Deuxième partie

Méthode de réciprocité en champ libre

Chapitre 3

Etalonnage en champ libre des microphones par la méthode de la réciprocité

3.1 Introduction

Les mesures acoustiques effectuées à l'aide de sonomètres ou autres dispositifs microphoniques nécessitent des microphones de travail étalonnés de manière précise. Habituellement, ces microphones sont étalonnés par comparaison avec des microphones de référence nommés microphones étalons de laboratoire. Ces microphones étalons doivent à leur tour être étalonnés à l'aide d'une méthode primaire aussi précise que possible.

Les microphones étalons de laboratoire sont étalonnés à l'heure actuelle par la méthode de la réciprocité, que ce soit pour un usage du microphone en pression (norme CEI 61084-2 [8]) ou en champ libre (norme CEI 61094-3 [26]). Cette méthode nécessite l'usage de trois microphones couplés deux à deux par un milieu de couplage, soit une cavité acoustique de forme cylindrique pour l'étalonnage en pression, soit un milieu infini pour l'étalonnage en champ libre. Récemment, la méthode d'étalonnage en pression par la méthode de la réciprocité à fait l'objet de travaux de modélisation analytique précis de la cavité de couplage [14,9,10]. Ces travaux ont permis une amélioration significative de cette technique d'étalonnage conduisant à une incertitude sur les efficacités des microphones de l'ordre de 0,05 dB en module, ce qui en fait la méthode d'étalonnage la plus précise à l'heure actuelle. Néanmoins, dans la majorité des cas, les microphones de travail sont utilisés dans des conditions de champ libre ce qui nécessite en tout état de cause une méthode permettant l'étalonnage des microphones étalons dans les mêmes conditions d'environnement.

L'étalonnage en champ libre des microphones par la méthode de la réciprocité a vocation à répondre à cette exigence. Il repose sur les mêmes bases que l'étalonnage en pression mais reste néanmoins plus délicat à mettre en œuvre en raison des faibles signaux reçus. Les premiers travaux traitant du principe de réciprocité pour des systèmes électroacoustiques ont étés publiés dans les années 20 par W. Schottky [27]. Plus tard, dans les années 40, en se basant sur les travaux de W. Schottky, W. R. MacLean [28] propose une procédure permettant l'étalonnage en champ libre des microphones à l'aide de trois transducteurs. Dans ces mêmes années, d'autres auteurs [29,30] ont présenté le théorème du principe de réciprocité pour un système électroacoustique ainsi que quelques notions théoriques tels que les centres acoustiques des microphones [29,31]. Il s'en est suivi la publication des premiers résultats expérimentaux par I. Rudnick et M. N. Stein [32]. Dans les années 80, plusieurs laboratoires de métrologie ont travaillé à la mise en place de bancs d'étalonnages en champ libre de microphones par la méthode de la réciprocité. Ces travaux ont abouti à une première comparaison clé [33] (comparaison appartenant à un ensemble de

comparaisons sélectionnées par un Comité consultatif afin de vérifier les principales techniques et méthodes du domaine) pour des microphones étalons de types LS1P et LS2P, soit respectivement 1" et ½". Les disparités importantes des résultats d'étalonnage constatées entre certains laboratoires ont alors mis en évidence la nécessité d'un filtrage des signaux électriques mis en jeu [34,35].

Une deuxième comparaison clé (CCAUV.A-K4 [36]) concernant l'étalonnage en champ libre des microphones LS2P (½") par la méthode de la réciprocité est actuellement en cours. Dans le cadre de cette comparaison clé, le LNE a cherché à améliorer le dispositif de mesure ainsi que la chaîne de traitement liée à cette technique d'étalonnage en champ libre. L'objet de ce chapitre est de présenter les bases théoriques sur lesquelles repose cette méthode d'étalonnage, de présenter le dispositif expérimental mis en œuvre au LNE, de répertorier les difficultés qui sont apparues, et enfin de présenter les solutions utilisées pour contourner ces difficultés, et les améliorations apportées.

3.2 Principe de réciprocité en champ libre

Le transducteur considéré ici est un tube cylindrique (contenant notamment l'électronique de proximité) supposé semi-infini, dont la surface est désignée par S_t, tube fermé par une surface vibrante S_m, la somme $S=S_m+S_t$ désignant la surface totale du transducteur (figure 3.1). Le domaine $\mathcal{D}$ est illimité et le fluide, supposé continu, homogène et isotrope, est caractérisé par sa masse volumique ρ_0 et la célérité du son c_0.

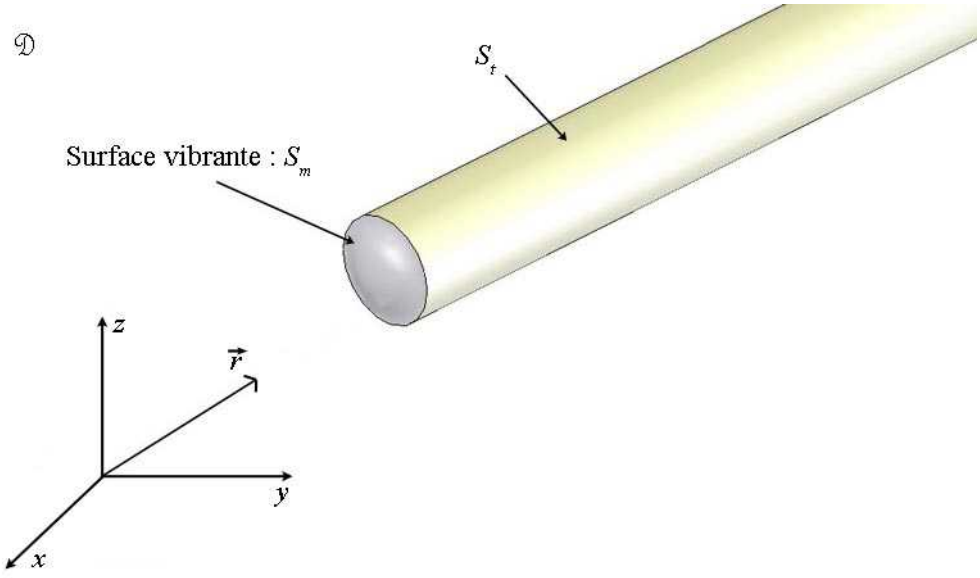


Figure 3.1. Tube semi-infini fermé par une surface vibrante ; schéma et notations utilisées.

Un point du milieu est désigné par le vecteur $\vec{r}$. Les fluctuations de tension électrique aux bornes du transducteur sont notées u_r et les fluctuations du courant électrique le traversant i_e. Les quantités $p(\vec{r})$ et $v(\vec{r})$ désignent respectivement la pression acoustique et la vitesse particulaire au point $\vec{r}$ du fluide, $v_n(\vec{r})$ désigne plus précisément le champ de vitesse normale de la surface S du transducteur (nul sur S_t).

Les bases théoriques du principe de réciprocité ont été publiées dans la référence [29]. De manière générale, les équations de ce système électroacoustique s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} p(\vec{r}) = \iint_S z_0(\vec{r}, \vec{r}_0) v_n(\vec{r}_0) dS_0 + h(\vec{r}) i_e, & \forall \vec{r} \in S, \quad (3.1.a) \\ u_r = \iint_S h'(\vec{r}_0) v_n(\vec{r}_0) dS_0 + Z_b i_e, & (3.1.b) \end{cases}$$

où $z_0(\vec{r}, \vec{r}_0)$ est une impédance acoustique non locale, $h(\vec{r})$ et $h'(\vec{r})$ des coefficients de couplage électromécaniques locaux et Z_b l'impédance électrique du transducteur. Ces quantités sont indépendantes de $p(\vec{r})$, $v_n(\vec{r})$, u_r et i_e, mais dépendent de la fréquence.

Un transducteur est dit réciproque lorsqu'il conserve les mêmes caractéristiques lors d'une utilisation en émetteur ou en récepteur. Un transducteur électrostatique répondant à cette définition est caractérisé par les relations suivantes [29,30,3] :

$$\begin{cases} z_0(\vec{r}, \vec{r}_0) = z_0(\vec{r}_0, \vec{r}), & \forall \vec{r} \in S, \quad (3.2.a) \\ h(\vec{r}) = h'(\vec{r}), & \forall \vec{r} \in S. \quad (3.2.b) \end{cases}$$

3.2.1 Fonctionnement du transducteur en émetteur

Le domaine d'étude considéré est un espace infini dans lequel est placé le tube (supposé semi-infini) muni d'une membrane émettrice à son extrémité. Sous forme différentielle le problème s'écrit de la manière suivante, pour une source harmonique ($e^{j\omega t}$) :

$$\begin{cases} (\Delta + k_0^2) p(\vec{r}) = 0, & \forall \vec{r} \in \mathcal{D}, \quad (3.3.a) \\ \partial_n p(\vec{r}) = -j k_0 \rho_0 c_0 v_n(\vec{r}), & \forall \vec{r} \in S_m, \quad (3.3.b) \\ \partial_n p(\vec{r}) = 0, & \forall \vec{r} \in S_t, \quad (3.3.c) \\ \text{condition de Sommerfeld à l'infini,} & (3.3.d) \end{cases}$$

où ∂_n représente la dérivée suivant la normale locale à la surface S orientée vers l'extérieur du domaine, et $k_0 = \omega / c_0$ le nombre d'onde.

Le champ de pression acoustique $p(\vec{r})$ dans le domaine $\mathcal{D}$ peut s'écrire sous la forme intégrale suivante [3]

$$p(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{D}} G(\vec{r}, \vec{r}_0) f_s(\vec{r}_0) \, d\mathcal{D}_0 + \iint_S [G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_n p(\vec{r}_0) - p(\vec{r}_0) \partial_n G(\vec{r}, \vec{r}_0)] dS_0, \qquad \forall \vec{r} \in \mathcal{D}, \quad (3.4)$$

où la fonction $f_s(\vec{r}_0)$ représente l'action de sources qui seraient réparties à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$ (dans le cas présent $f_s(\vec{r}_0) = 0$), et où la fonction $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ est une fonction de Green satisfaisant à l'équation

$$(\Delta + k_0^2) G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r}, \vec{r}_0), \qquad \forall \vec{r} \in \mathcal{D}, \quad (3.5)$$

où $\delta(\vec{r}, \vec{r}_0)$ représente la distribution de Dirac.

En choisissant une fonction de Green satisfaisant à la condition de Neumann sur la surface du transducteur,

$$\partial_n G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, \qquad \forall \vec{r} \in S, \quad (3.6)$$

et en utilisant la condition aux frontières (3.3.b), l'expression du champ créé (3.4) se simplifie et s'écrit sous la forme

$$p(\vec{r})=-j k_0 \rho_0 c_0 \iint_S G(\vec{r},\vec{r}_0) v_n(\vec{r}_0) dS_0 , \qquad \forall \vec{r}\in\mathcal{D} . \tag{3.7}$$

La vitesse normale sur la membrane du transducteur peut être écrite en fonction de l'intensité i_e le traversant en faisant usage des équations (3.1.a) et (3.7). Il vient alors

$$\iint_S z_0(\vec{r},\vec{r}_0) v_n(\vec{r}_0) dS_0 + h(\vec{r}) i_e = -j k_0 \rho_0 c_0 \iint_S G(\vec{r},\vec{r}_0) v_n(\vec{r}_0) dS_0 , \qquad \forall \vec{r}\in S , \tag{3.8}$$

soit

$$-h(\vec{r}) i_e = \iint_S \left[z_0(\vec{r},\vec{r}_0) + j k_0 \rho_0 c_0 G(\vec{r},\vec{r}_0) \right] v_n(\vec{r}_0) dS_0 , \quad \forall \vec{r}\in S . \tag{3.9}$$

En posant,

$$K(\vec{r},\vec{r}_0) = z_0(\vec{r},\vec{r}_0) + j k_0 \rho_0 c_0 G(\vec{r},\vec{r}_0) , \tag{3.10}$$

il est possible de montrer qu'il existe une fonction notée $\{K(\vec{r}_0,\vec{r}_0')\}^{-1}$ [37] telle que d'après l'équation (3.9)

$$v_n(\vec{r}_0) = -i_e \iint_S \{K(\vec{r}_0,\vec{r}_0')\}^{-1} h(\vec{r}_0') dS_0' , \qquad \forall \vec{r}_0 \in S. . \tag{3.11}$$

On définit le rendement ponctuel en champ libre $R_{ff}(\vec{r})$ (indice *ff* pour free-field) du transducteur qui le caractérise en émission par le rapport entre la pression $p(\vec{r})$ et l'intensité i_e, soit

$$R_{ff}(\vec{r}) = \frac{p(\vec{r})}{i_e} , \qquad \forall \vec{r}\in\mathcal{D} . \tag{3.12}$$

En faisant usage des relations (3.7) et (3.11), cette quantité s'écrit :

$$R_{ff}(\vec{r}) = j k_0 \rho_0 c_0 \iint_S \iint_S G(\vec{r},\vec{r}_0) \{K(\vec{r}_0,\vec{r}_0')\}^{-1} h(\vec{r}_0') dS_0' dS_0 , \qquad \forall \vec{r}\in\mathcal{D} . \tag{3.13}$$

3.2.2 Fonctionnement du transducteur en récepteur

Le milieu est à présent supposé contenir une source suffisamment loin d'un point d'observation où est situé un transducteur récepteur. Sous forme différentielle le problème s'écrit :

$$\begin{cases} (\Delta + k_0^2) p(\vec{r}) = -f_s(\vec{r}), & \forall \vec{r}\in\mathcal{D} , & \text{(3.14.a)} \\ \partial_n p(\vec{r}) = -j k_0 \rho_0 c_0 v_n(\vec{r}), & \forall \vec{r}\in S_m , & \text{(3.14.b)} \\ \partial_n p(\vec{r}) = 0, & \forall \vec{r}\in S_t , & \text{(3.14.c)} \\ \text{condition de Sommerfeld à l'infini,} & & \text{(3.14.d)} \end{cases}$$

où $f_s(\vec{r})$ est une fonction source extérieure au transducteur. Le champ de pression acoustique $p(\vec{r})$ dans le domaine $\mathcal{D}$ peut s'écrire sous la forme intégrale suivante

$$p(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{D}} G(\vec{r},\vec{r}_0) f_s(\vec{r}_0) d\mathcal{D}_0 + \iint_S [G(\vec{r},\vec{r}_0) \partial_n p(\vec{r}_0) - p(\vec{r}_0) \partial_n G(\vec{r},\vec{r}_0)] dS_0 , \qquad \forall \vec{r}\in\mathcal{D} . \tag{3.15}$$

En choisissant la même fonction de Green que précédemment (3.5 et 3.6) et en utilisant la condition aux frontières (3.14.b), l'expression du champ de pression (3.15) se simplifie et s'écrit

sous la forme,

$$p(\vec{r})=p_g(\vec{r})-j k_0\,\rho_0\,c_0\iint_S G(\vec{r}\,,\vec{r}_0)\,v_n(\vec{r}_0)\,dS_0\,,\qquad \forall\vec{r}\in\mathcal{D}\,, \tag{3.16}$$

où l'intégrale double représente le champ de pression dû au mouvement de la membrane du récepteur et où $p_g(\vec{r})$ représente l'intégrale triple de l'équation (3.15), somme du champ direct (en l'absence du transducteur) et du champ diffracté par la surface S du transducteur supposée parfaitement rigide en tous points ($v_n=0$), du fait du choix de la fonction de Green.

En faisant usage des équations (3.1.a) et (3.16) il vient

$$\iint_S z_0(\vec{r}\,,\vec{r}_0)\,v_n(\vec{r}_0)\,dS_0+h(\vec{r})\,i_e=p_g(\vec{r})-j k_0\,\rho_0\,c_0\iint_S G(\vec{r}\,,\vec{r}_0)\,v_n(\vec{r}_0)\,dS_0\,,\qquad \forall\vec{r}\in S\,, \tag{3.17}$$

soit

$$p_g(\vec{r})-h(\vec{r})\,i_e=\iint_S K(\vec{r}\,,\vec{r}_0)\,v_n(\vec{r}_0)\,dS_0\,,\qquad \forall\vec{r}\in S\,, \tag{3.18}$$

avec $K(\vec{r}\,,\vec{r}_0)=z_0(\vec{r}\,,\vec{r}_0)+j k_0\,\rho_0\,c_0 G(\vec{r}\,,\vec{r}_0)$. La vitesse normale de la membrane en présence d'une source lointaine s'écrit alors d'après l'équation (3.18) sous la forme [37] :

$$v_n(\vec{r}_0)=\int_S \{K(\vec{r}_0\,,\vec{r}_0\,')\}^{-1}[\,p_g(\vec{r}_0\,')-h(\vec{r}_0\,')\,i_e]\,dS_0\,'\,,\qquad \forall\vec{r}_0\in S\,. \tag{3.19}$$

En faisant usage de l'équation (3.1.b), la tension aux bornes du transducteur s'écrit alors

$$u_r=Z_b\,i_e+\iint_S\iint_S h'(\vec{r}_0)\{K(\vec{r}_{0,}\vec{r}_0\,')\}^{-1}[\,p_g(\vec{r}_0\,')-h(\vec{r}_0\,')\,i_e]\,dS_0\,'\,dS_0\,. \tag{3.20}$$

On définit à présent l'efficacité ponctuelle du transducteur en champ libre $M_{ff}(\vec{r})$ qui le caractérise en réception par le rapport entre la tension u_{r0} à ses bornes en circuit ouvert (courant i_e nul) et la pression acoustique $p_0(\vec{r})$ qu'il y aurait en un point $\vec{r}$ si le transducteur était absent du milieu, soit

$$M_{ff}(\vec{r})=\frac{u_{r0}}{p_0(\vec{r})}\,. \tag{3.21}$$

En circuit ouvert ($i_e=0$), la tension aux bornes du transducteur s'écrit d'après l'équation (3.17)

$$u_{r0}=\iint_S\iint_S h'(\vec{r}_0)\{K(\vec{r}_{0,}\vec{r}_0\,')\}^{-1}\,p_g(\vec{r}_0\,')\,dS_0\,'\,dS_0\,, \tag{3.22}$$

où pour une source ponctuelle située en $\vec{r}_s$ la pression $p_g(\vec{r}_0\,')$ prend la forme

$$p_g(\vec{r}\,'_0)=\iiint_{\mathcal{D}} G(\vec{r}_0\,',\vec{r}_0)\,f_s(\vec{r}_0)\,d\mathcal{D}_0=j k_0\,\rho_0\,c_0\,Q_0\,G(\vec{r}_0\,',\vec{r}_s)\,, \tag{3.23}$$

où Q_0 est le débit volumique de la source. En l'absence du transducteur dans le milieu, le champ de pression direct créé par cette source ponctuelle en un point quelconque $\vec{r}$ peut être écrit sous la forme

$$p_0(\vec{r})=\frac{j k_0\,\rho_0\,c_0\,Q_0}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-j k_0\,|\vec{r}-\vec{r}_s|}}{|\vec{r}-\vec{r}_s|}\,. \tag{3.24}$$

En faisant usage des relations (3.22, 3.23 et 3.24), l'efficacité ponctuelle en champ libre $M_{ff}(\vec{r})$ (Eq. 3.21) s'écrit

$$M_{ff}(\vec{r}) = 4\pi|\vec{r}-\vec{r}_s|\,\mathrm{e}^{ik_0|\vec{r}-\vec{r}_s|}\iint_S\iint_S h'(\vec{r}_0)\{K(\vec{r}_0,\vec{r}_0')\}^{-1}G(\vec{r}_0',\vec{r}_s)\,dS_0'\,dS_0\,. \tag{3.25}$$

Dans le cas particulier où l'efficacité ponctuelle en champ libre $M_{ff}(\vec{r}_c)$ est exprimée au point $\vec{r}_c$, où $\vec{r}_c$ représente la position du centre acoustique du transducteur en question (concept discutée au chapitre 4), cette quantité est communément nommée l'efficacité en champ libre du microphone définie d'après la norme CEI 61094-3 [26] comme « le quotient de la tension à circuit ouvert du microphone par la pression acoustique qui existerait à l'emplacement du centre acoustique du microphone, en l'absence de celui-ci ».

3.2.3 Produit des efficacités en champ libre de deux microphones

On considère à présent deux microphones réciproques, chacun placé dans une tige cylindrique semi-infinie, sur le même axe, en supposant qu'ils ne se perturbent pas (ce qui n'est pas le cas dans la réalité, cf. § 3.3.2 [38]). Les positions des centres acoustiques des microphones sont notées $\vec{r}_1$ pour le microphones 1 et $\vec{r}_2$ pour le microphone 2 (figure 3.2).

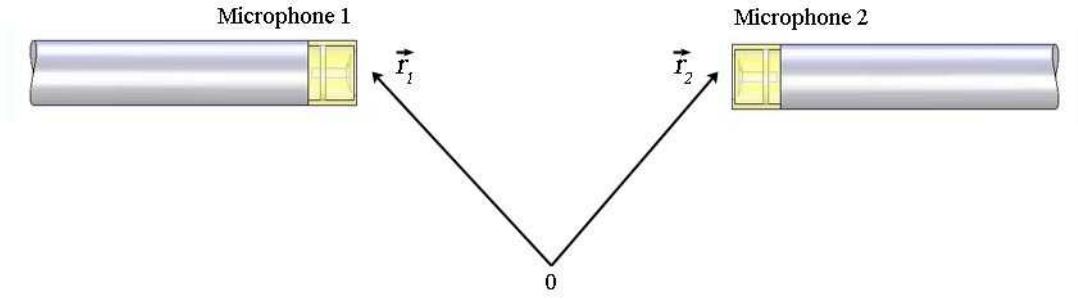


Figure 3.2. Etalonnage des microphones en champ libre par la méthode de la réciprocité ; schéma et notations utilisées.

L'efficacité en champ libre du microphone 1 et son rendement en $\vec{r}_2$ s'écrivent d'après les équations (3.25) et (3.13)

$$\begin{cases} M_{ff1}(\vec{r}_1) = \dfrac{u_{r01}}{p_0(\vec{r}_1)} = 4\pi|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\,\mathrm{e}^{jk_0|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\iint_S\iint_S h'(\vec{r}_0)\{K(\vec{r}_0,\vec{r}_0')\}^{-1}G(\vec{r}_0',\vec{r}_2)\,dS_0'\,dS_0\,, & \text{(3.26.a)} \\ R_{ff1}(\vec{r}_2) = \dfrac{p(\vec{r}_2)}{i_{e1}} = jk_0\rho_0 c_0\iint_S\iint_S G(\vec{r}_2,\vec{r}_0)\{K(\vec{r}_0,\vec{r}_0')\}^{-1}h(\vec{r}_0')\,dS_0'\,dS_0\,. & \text{(3.26.b)} \end{cases}$$

En faisant usage de la relation de réciprocité des transducteurs (3.2.a) et de la relation de réciprocité de la fonction de Green, d'après l'équation (3.10) il vient la propriété suivante

$$K(\vec{r}_0,\vec{r}_0') = K(\vec{r}_0',\vec{r}_0)\,, \tag{3.27}$$

et par suite, en utilisant la propriété (3.2.b), les équations (3.26.a et b) conduisent à la relation

$$\frac{M_{ff1}(\vec{r}_1)}{R_{ff1}(\vec{r}_2)} = \frac{4\pi|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\,\mathrm{e}^{jk_0|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}}{jk_0\rho_0 c_0} = Y_T(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,, \tag{3.28}$$

où $Y_T(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ représente une admittance acoustique de transfert. Par analogie, pour le microphone 2, il vient la relation

$$\frac{M_{ff2}(\vec{r}_2)}{R_{ff2}(\vec{r}_1)}=\frac{4\pi|\vec{r}_2-\vec{r}_1|e^{jk_0|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}}{jk_0\rho_0c_0}=Y_T(\vec{r}_2,\vec{r}_1)\,. \tag{3.29}$$

De plus, par définition du rendement $R_{ff1}(\vec{r}_2)$ (Eq. 3.12) et de l'efficacité $M_{ff2}(\vec{r}_2)$ (Eq. 3.21), il vient

$$M_{ff2}(\vec{r}_2)R_{ff1}(\vec{r}_2)=\frac{u_{r02}}{p_0(\vec{r}_2)}\frac{p(\vec{r}_2)}{i_{e1}}\,. \tag{3.30}$$

La pression $p(\vec{r}_2)$ est la pression acoustique au point $\vec{r}_2$ sur le microphone récepteur (microphone 2, au niveau de son centre acoustique) émise par le microphone émetteur (microphone 1) depuis son centre acoustique $\vec{r}_1$ (il est donc supposé ponctuel de telle sorte que la fonction de Green (Eq. 1.7) est celle du champ libre), alors que la pression $p_0(\vec{r}_2)$ représente la pression mesurée au point $\vec{r}_2$ (position du centre acoustique du microphone 2) par le microphone récepteur en l'absence de celui-ci. Dans ces conditions particulières (émetteur réduit à son centre acoustique) $p_0(\vec{r}_2)=p(\vec{r}_2)$, la relation (3.30) se simplifie et s'écrit

$$M_{ff2}(\vec{r}_2)R_{ff1}(\vec{r}_2)=\frac{u_{r02}}{i_{e1}}=Z_{E12}\,. \tag{3.31}$$

où Z_{E12} désigne l'impédance électrique de transfert, rapport de la tension mesurée aux bornes du microphone récepteur en circuit ouvert sur le courant traversant le microphone émetteur. En inversant le rôle des microphones, soit le microphone 1 en récepteur et le microphone 2 en émetteur, par analogie, il vient la relation suivante

$$M_{ff1}(\vec{r}_1)R_{ff2}(\vec{r}_1)=\frac{u_{r01}}{i_{e2}}=Z_{E21}\,. \tag{3.32}$$

En utilisant les équations (3.28) et (3.31) ou les équations (3.27) et (3.32) il vient

$$M_{ff1}(\vec{r}_1)M_{ff2}(\vec{r}_2)=Y_T(\vec{r}_1,\vec{r}_2)Z_{E12}=Y_T(\vec{r}_2,\vec{r}_1)Z_{E21}\,, \tag{3.33}$$

où $Z_{E12}=Z_{E21}$ puisque

$$Y_T(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=Y_T(\vec{r}_2,\vec{r}_1)=\frac{4\pi|\vec{r}_1-\vec{r}_2|e^{jk_0|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}}{jk_0\rho_0c_0}\,. \tag{3.34}$$

Un troisième microphone est à présent utilisé, remplaçant soit le microphone 1, soit le microphone 2 (figure 3.2). La position de son centre acoustique est notée $\vec{r}_3$. Lorsque ce microphone est utilisé uniquement en tant que récepteur, par analogie avec les équations (3.31) et (3.32), il vient

$$\begin{cases} M_{ff3}(\vec{r}_3)R_{ff1}(\vec{r}_3)=\dfrac{u_{r03}}{i_{e1}}=Z_{E13}\,, & \text{(3.35.a)} \\ M_{ff3}(\vec{r}_3)R_{ff2}(\vec{r}_3)=\dfrac{u_{r03}}{i_{e2}}=Z_{E23}\,. & \text{(3.35.b)} \end{cases}$$

Enfin, en reportant ces équations dans les relations (3.28) et (3.29) en considérant les rendements $R_{ff1}(\vec{r}_3)$ et $R_{ff2}(\vec{r}_3)$ il vient

$$\begin{cases} M_{ff1}(\vec{r}_1)M_{ff3}(\vec{r}_3)=Z_{E13}Y_T(\vec{r}_1,\vec{r}_3)=Z_{E13}\dfrac{4\pi|\vec{r}_1-\vec{r}_3|e^{jk_0|\vec{r}_1-\vec{r}_3|}}{jk_0\rho_0c_0}, & (3.36.a) \\ M_{ff2}(\vec{r}_2)M_{ff3}(\vec{r}_3)=Z_{E23}Y_T(\vec{r}_2,\vec{r}_3)=Z_{E23}\dfrac{4\pi|\vec{r}_2-\vec{r}_3|e^{jk_0|\vec{r}_2-\vec{r}_3|}}{jk_0\rho_0c_0}. & (3.36.b) \end{cases}$$

Ainsi, en combinant les équations (3.33), (3.36.a) et (3.36.b), il est possible d'obtenir individuellement l'efficacité en champ libre de chaque microphone à partir des mesures des impédances électriques de transfert Z_{E12}, Z_{E13} et Z_{E23}. A noter que les équations de réciprocité des transducteurs (1.2.a et b) n'interviennent que dans la définition des équations (3.27), (3.28) et (3.29), équations caractéristiques des microphones réciproques 1 et 2. De ce fait, le troisième microphone utilisé uniquement en récepteur n'est pas nécessairement réciproque.

Dans la pratique, il faut tenir compte des phénomènes dissipatifs, le produit des efficacités en champ libre de deux microphones s'écrit alors de manière générale

$$M_{ff\mu}M_{ff\nu}=Z_{E\mu\nu}Y_{T\mu\nu}=Z_{E\mu\nu}\frac{2d}{jf\rho_0}e^{jk_0d}e^{\gamma d}, \qquad (3.37)$$

où $(\mu,\nu)=1,2,3$, où d est la distance entre les centres acoustiques des deux microphones testés, f désigne la fréquence et où γ représente l'affaiblissement linéique de propagation dans l'air.

3.3 Dispositif expérimental utilisé au LNE et difficultés de mesure

L'étalonnage en champ libre des microphones par la méthode de la réciprocité nécessite de faire usage d'un dispositif expérimental dont les imperfections doivent être soigneusement prises en compte et de disposer d'un environnement champ libre (salle anéchoïque). C'est l'objet du paragraphe que de présenter ce dispositif et de répertorier les difficultés.

3.3.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé est décrit sur la figure 3.3. Les microphones sont montés sur des préamplificateurs adaptés, le tout placé dans une salle anéchoïque. La chaîne de mesure se compose des éléments présentés ci-dessous.

- Un analyseur vectoriel (1250 de Schlumberger) qui effectue les mesures nécessaires (voies émettrice et réceptrice) et fournit le signal d'entrée au microphone émetteur grâce à un générateur interne.
- Un appareil de réciprocité (5998 de Brüel & Kjær) conçu originellement pour l'étalonnage en pression des microphones par la méthode de réciprocité. Bien qu'il soit conçu pour le conditionnement des voies émettrice et réceptrice, seule la voie émettrice est utilisée permettant ainsi de limiter les problèmes de diaphonie entre voies, problèmes discutés au paragraphe suivant. Cet appareil, relié au préamplificateur (Type ZE 0796) du microphone émetteur, dispose d'un générateur interne de 200 V pour la polarisation de ce microphone, de filtres passe-haut (1 ; 20 ; 100 Hz) et d'amplificateurs de gains réglables (0 à 50 dB) (cf. Annexe F.1).
- Un amplificateur à gains réglables (-20 à 90 dB) de type Nexus (2690 Brüel & Kjær) fonctionnant sur batterie qui conditionne les signaux de la voie réceptrice. Cet appareil est relié au préamplificateur du microphone récepteur (Type 2673-W-001, préamplificateur à faible bruit conçu pour une utilisation en champ libre et disposant d'un gain interne de +20 dB) ; il

dispose d'un générateur interne de 200 V pour la polarisation du microphone, de filtres passe-bas (0,1 ; 20 Hz) et passe-haut (0,1 à 100 kHz) (cf. Annexe F.2).

- Un boitier électronique permettant une insertion de tension au microphone récepteur (cf. discours ci-après).
- Un ordinateur pour le pilotage et le stockage des données. Le logiciel d'acquisition est réalisé en Visual Basic et enregistre les résultats de mesure dans une feuille de calcul Excel.

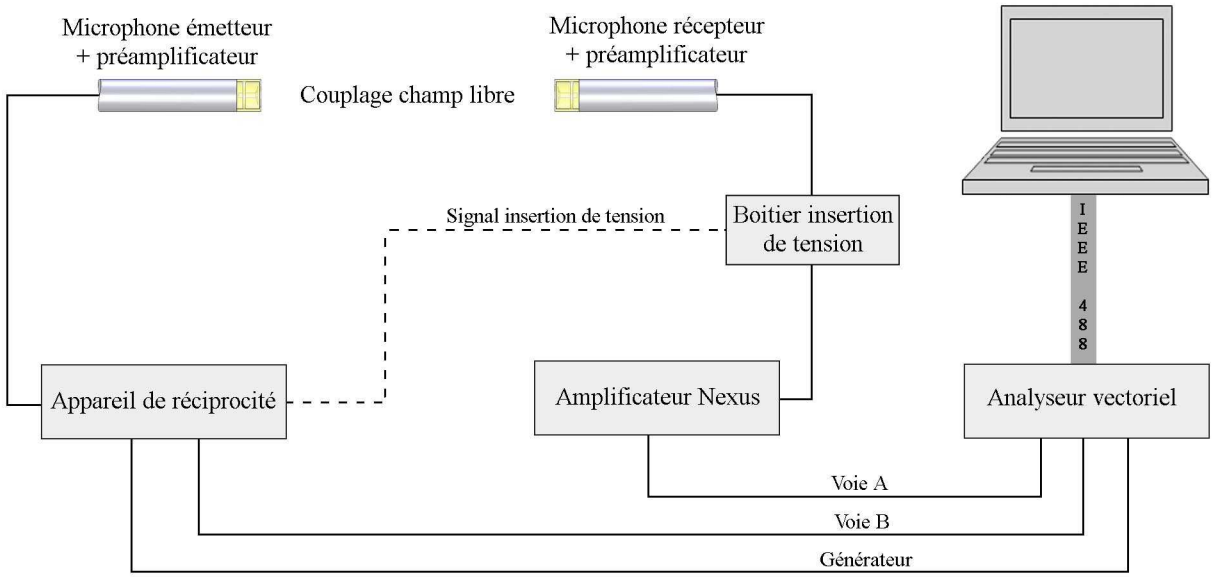


Figure 3.3. Etalonnage des microphones en champ libre par la méthode de réciprocité ; dispositif expérimental.

L'impédance électrique de transfert $Z_E = u_{r0}/i_e$ entre les deux microphones, rapport de la tension à circuit ouvert u_{r0} aux bornes du microphone récepteur sur le courant i_e traversant le microphone émetteur est mesurée comme suit : le courant i_e est déduit de la mesure d'une tension $u_E = i_e/(j\omega C_{ref})$, C_{ref} étant une capacité de référence présente dans le préamplificateur du microphone émetteur et régulièrement étalonnée ; la tension à circuit ouvert u_{r0} aux bornes du microphone récepteur n'est pas accessible par une simple mesure en raison des imperfections de l'amplificateur utilisé (capacités parasites et donc impédance d'entrée non infinie) et nécessite l'usage de la technique dite de « la tension insérée », technique décrite dans la norme CEI 1094-2 [8] et fondée sur un certain nombre d'hypothèses discutées et vérifiées dans la référence [14, § 1.2.3].

La mesure de l'impédance électrique de transfert s'effectue en deux temps, la méthode est décrite dans la référence [14, § 2.4] et se résume ainsi :

- dans un premier temps, une tension électrique u_g est appliquée sur l'électrode arrière du microphone émetteur générant ainsi une pression acoustique, qui agissant sur la membrane du microphone récepteur génère une tension u_{r0} à ces bornes. Deux tensions u_A et u_B sont ainsi relevées aux sorties de l'appareil de réciprocité et de l'amplificateur Nexus. La chaîne de mesure est décrite sur la figure 3.4, les deux microphones étant représentés par leur schéma équivalent de Thévenin (impédances électriques Z_{Thr} et Z_{The}).

  Les tensions u_A et u_B s'expriment en fonction de i_e et u_{r0} par les relations

$$u_B = h_B F_B g_B u = h_B F_B g_B \frac{-i_e}{j\omega (C_{ref} + C_{pB})}, \tag{3.38}$$

et

$$u_A = h_A F_A g_A u_r = h_A F_A g_A \frac{1/(j\omega C_{pA})}{Z_{Thr} + 1/(j\omega C_{pA})} u_{r0}, \tag{3.39}$$

où les quantités $h_{A,B}$, $g_{A,B}$, $F_{A,B}$, $C_{PA,B}$ désignent les gains, filtrages, et capacités parasites.

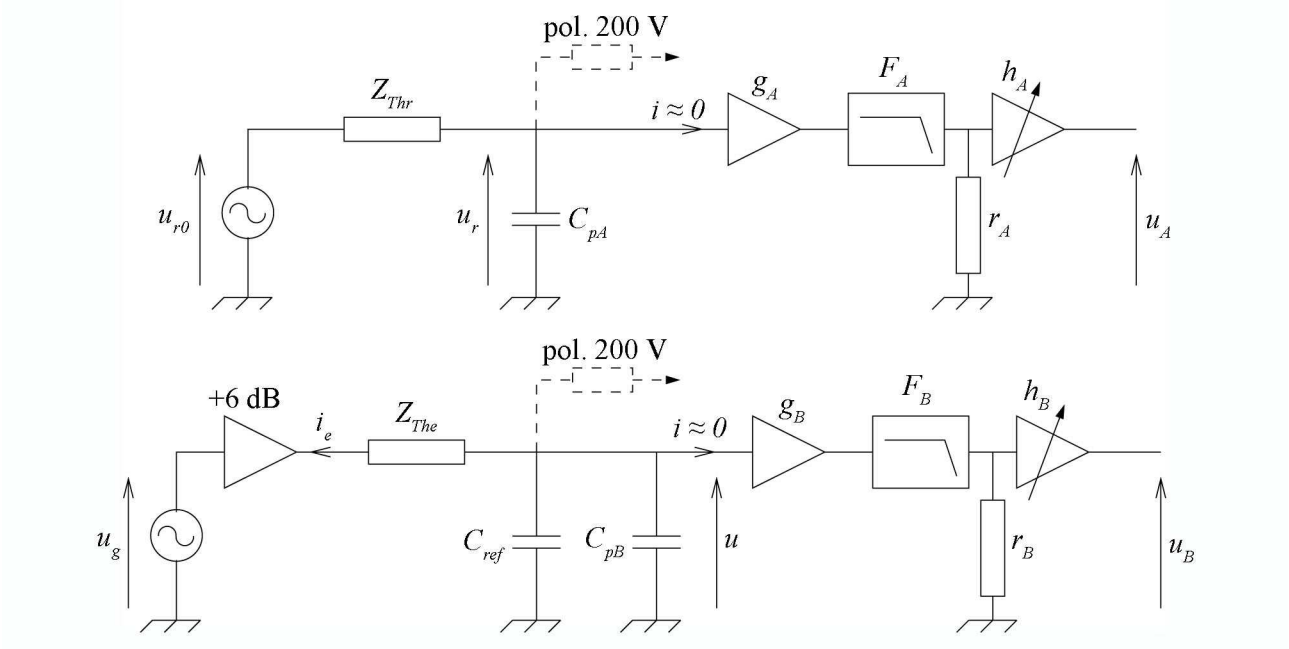


Figure 3.4. Mesure de l'impédance électrique de transfert : première partie.

- Dans un deuxième temps (figure 3.5), les deux microphones sont excités électriquement par une même tension de référence u_{ref}. A noter que pour la mesure des tensions, dans la pratique l'amplificateur Nexus n'est pas prévu pour l'insertion de tension : un boîtier permettant cette opération est ajouté entre l'amplificateur Nexus et le préamplificateur du microphone récepteur.

  Les tensions u_A' et u_B' s'expriment en fonction de u_{ref} par les relations

$$u_B' = h_B F_B g_B u' = h_B F_B g_B \frac{C_{ref}}{C_{ref} + C_{pB}} u_{ref}, \tag{3.40}$$

et

$$u_A' = h_A F_A g_A u_r' = h_A F_A g_A \frac{1/(j\omega C_{pA})}{Z_{Thr} + 1/(j\omega C_{pA})} u_{ref}. \tag{3.41}$$

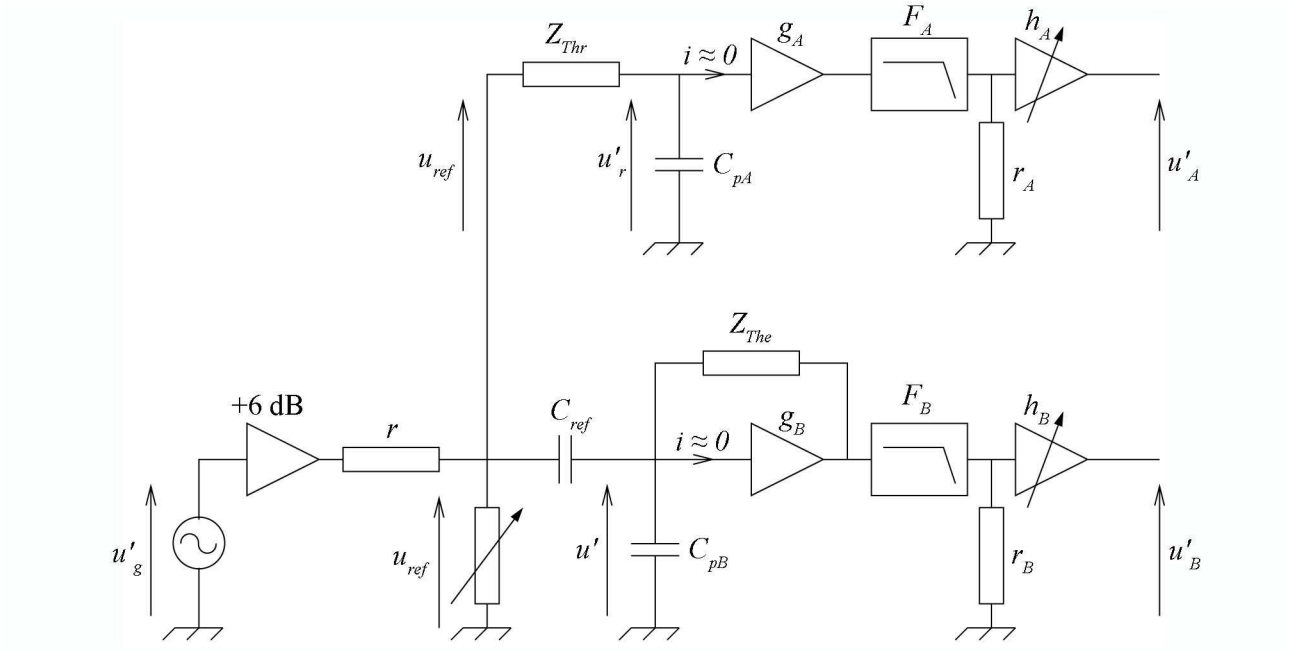


Figure 3.5. Mesure de l'impédance électrique de transfert : deuxième partie.

En faisant le rapport des relations (1.40, 1.38) et (1.39, 1.41), il vient

$$\frac{u_B{}'}{u_B} = \frac{j\omega C_{ref}}{-i_e} u_{ref} \qquad \text{et} \qquad \frac{u_A}{u_A{}'} = \frac{u_{r0}}{u_{ref}} . \tag{3.42}$$

L'impédance électrique de transfert s'écrit alors

$$Z_E = \frac{u_{r0}}{i_e} = \frac{-1}{j\omega C_{ref}} \frac{u_A}{u_B} \frac{u_B{}'}{u_A{}'} . \tag{3.43}$$

L'impédance électrique de transfert se déduit ainsi des mesures des rapports de tensions u_A/u_B et $u_B{}'/u_A{}'$, la valeur de la capacité C_{ref} étant connue (dans le cas présent C_{ref}=4744 pF).

3.3.2 Sources de perturbations

Idéalement, l'étalonnage en champ libre des microphones par la méthode de la réciprocité exige un environnement parfaitement anéchoïque et un matériel de mesure de qualité. En réalité, les dimensions finies de la chambre anéchoïque, les faibles niveaux sonores mis en jeu, la présence de matériels (les microphones, supports ...) dans l'environnement sont des sources de perturbations lors de la mesure de l'impédance électrique de transfert qu'il convient de prendre en compte.

Les sources de perturbations peuvent être classées en trois types :

- diaphonie entre les voies émettrice et réceptrice,
- échos sur des objets,
- bruits électrique et acoustique.

La diaphonie est un phénomène d'interférence d'un signal sur un autre. Ce phénomène peut être produit de plusieurs façons : par couplage inductif, un courant circulant dans un fil génère un champ magnétique autour de celui-ci qui induit une tension dans les boucles voisines ; par couplage capacitif, les variations de tension entre un conducteur et son environnement génèrent un champ

électrique variable, celui-ci créant à son tour un courant dans les conducteurs proches ; il peut également être dû à des impédances communes aux deux voies (boucles de masses). Pour le problème posé, la diaphonie entre les voies émettrice et réceptrice est atténuée en séparant autant qu'il se peut ces deux voies. Ainsi, seule la voie émettrice de l'appareil de réciprocité (5998 de Brüel & Kjær, cf. Annexe F.1) est utilisée, la voie réceptrice est conditionnée par un amplificateur de type Nexus, fonctionnant sur batterie afin de minimiser les perturbations de mode commun apportées par le secteur des deux appareils. Les deux voies sont réunies à l'entrée de l'analyseur vectoriel qui effectue les mesures des rapports de tensions entre voies (figure 3.3).

Compte tenu des contraintes matérielles qui s'imposent, les échos sur des objets sont nombreux avec des conséquences plus ou moins importantes selon les cas. L'influence des perturbations se fait sentir à la fois sur la tension mesurée aux bornes du microphone récepteur et dans une moindre mesure sur le courant alimentant le microphone émetteur [34]. L'impact de ces échos dépend de la distance entre l'objet responsable de l'écho et les transducteurs. Ainsi, compte tenu de la loi de décroissance en $1/r$ de l'amplitude de la pression acoustique, l'influence de l'écho est d'autant plus faible que l'objet en question est éloigné des deux transducteurs. Ces perturbations se répercutent sur l'impédance électrique de transfert Z_E mesurée en fonction de la fréquence sous forme d'oscillations périodiques, leurs fréquences étant liées au chemin acoustique parcouru. Leurs amplitudes dépendent quant à elles de la puissance acoustique émise par la source, de la forme et de la surface de l'objet responsable de l'écho.

- Les parois de la salle anéchoïque.
  La salle anéchoïque disponible au LNE est particulièrement bien adaptée pour ce projet puisqu'elle possède un volume important (500 m^3 utile) et une fréquence de coupure de 70 Hz. Ainsi, les parois présentent une bonne absorption dans la gamme de fréquence [1 kHz; 40 kHz] et sont suffisamment éloignées des deux microphones (minimum 3 m).
- Les supports des microphones.
  Le support du microphone émetteur est une tige de diamètre sensiblement égal à celui du microphone et du préamplificateur, cette tige est directement encastrée dans une des parois de la salle anéchoïque se rapprochant ainsi des conditions idéales (tige semi-infinie)(figure 3.6). Le support du microphone récepteur est un dispositif plus complexe (figure 3.6). Le microphone est placé à l'extrémité d'une tige (diamètre sensiblement égal à celui du microphone et du préamplificateur) soutenue par un dispositif permettant un réglage vertical et horizontal. Ce dispositif est composé d'éléments complexes susceptibles d'engendrer des échos perturbateurs. Ils sont donc éloignés et placés à environ 2 m du microphone récepteur.
- Les perturbation d'un microphone par l'autre [38].
  Les deux microphones sont placés l'un en face de l'autre, il se créé alors une succession d'échos, les premiers étant les plus perturbateurs. Cette perturbation est d'autant plus importante que les deux microphones sont proches l'un de l'autre. La solution consiste donc à éloigner les deux microphones ce qui implique un signal reçu plus faible, ce qui n'est pas sans conséquence.
- Les autres objets.
  Certains éléments du dispositif expérimental doivent être placés dans l'environnement de mesure (thermomètre, hydromètre, câbles). Pour les raisons évoquées ci-après, l'appareil de réciprocité et l'amplificateur Nexus sont également placés dans la salle anéchoïque. Tous ces éléments sont donc éloignés autant que faire se peut des deux microphones (minimum 3 m).

Compte tenu des faibles niveaux sonores mis en jeu (notamment en basses fréquences), les bruits électrique et acoustique sont des sources de perturbations importantes. Le rapport signal sur bruit peut être amélioré de trois façons différentes : en effectuant les mesures en fréquences pures (méthode harmonique), en rapprochant les deux microphones l'un de l'autre et en utilisant un

équipement électrique de qualité.

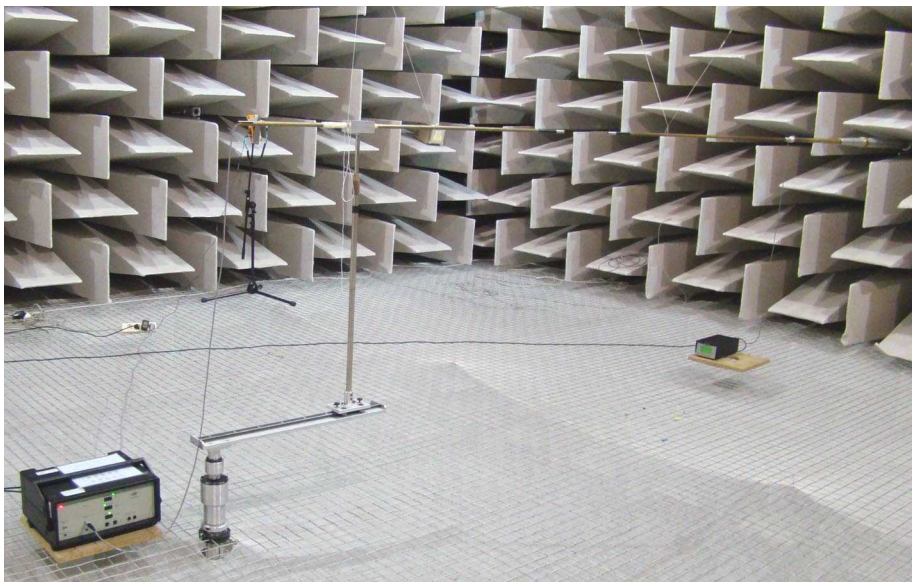


Figure 3.6. Dispositif expérimental utilisé pour la mesure de l'impédance électrique de transfert Z_E .

Ainsi, le dispositif de mesure engendre des perturbations de natures diverses et les solutions évoquées ci-dessus afin d'en limiter les effets sont parfois contradictoires. Ceci implique des concessions dans les choix qui doivent être faits.

Les impédances électriques de transfert Z_E mesurées résultent de la superposition d'un signal principal (champ direct entre les microphones émetteur et récepteur) et de perturbations de natures diverses. Ces perturbations, exceptés les bruits électrique et acoustique sont caractérisées par des chemins acoustiques différents. En s'appuyant sur cette particularité, il est possible d'isoler le signal principal (chemin acoustique égal à la distance entre les deux microphones) des signaux perturbateurs. Ainsi, il est préférable de privilégier l'atténuation des bruits électrique et acoustique au détriment des autres sources de perturbations, sachant que celles-ci peuvent être traitées ultérieurement. Pour ces raisons, le compromis suivant a été choisi : les deux microphones sont espacés à des distances comprises entre 25 et 35 cm, les amplificateurs sont placés au plus proche des microphones (environ 3 m) dans la salle anéchoïque permettant ainsi de limiter la longueur des câbles entre les amplificateurs et les préamplificateurs (câbles de 3 m), câbles spécifiques à plusieurs voies (alimentation, polarisation, signal) de moins bonne qualité que les câbles coaxiaux dans lesquels les signaux essentiels sont extrêmement faibles (quelques mV) et donc assujettis aux perturbations électriques.

3.4 Filtrage des fonctions de transfert mesurées

La première comparaison clé de l'étalonnage en champ libre des microphones par la méthode de la réciprocité [33] a mis en évidence la nécessité d'une méthode de filtrage permettant d'apporter des solutions aux problèmes évoqués dans le paragraphe précédent. Une méthode classique de filtrage appliquée au problème en question est définie dans les références [34,35]. C'est l'objet du paragraphe que de présenter et d'optimiser cette méthode de filtrage.

3.4.1 Principes généraux

L'impédance électrique de transfert $Z_E(f)$ (Eq. 3.43) mesurée en amplitude et en phase en fonction de la fréquence contient l'information recherchée (champ direct entre les microphones émetteur et récepteur) mais également l'information parasite liée aux perturbations citées dans le paragraphe 3.3.2. Ces signaux (exceptés ceux liés aux bruits électrique et acoustique), caractérisés par divers chemins acoustiques, se traduisent dans la réponse impulsionnelle du système (Transformée de Fourier Inverse (TF^{-1}) de l'impédance électrique de transfert $Z_E(f)$ définie en entrée par le courant i_e alimentant le microphone émetteur et en sortie par la tension u_{r0} aux bornes du microphone récepteur) par des impulsions caractérisées par des retards fonctions des chemins acoustiques parcourus. En faisant usage des méthodes classiques de filtrage, il est alors possible d'isoler le signal principal des échos perturbateurs.

i. Filtrage dans le domaine temporel, méthode précédemment en usage [35]

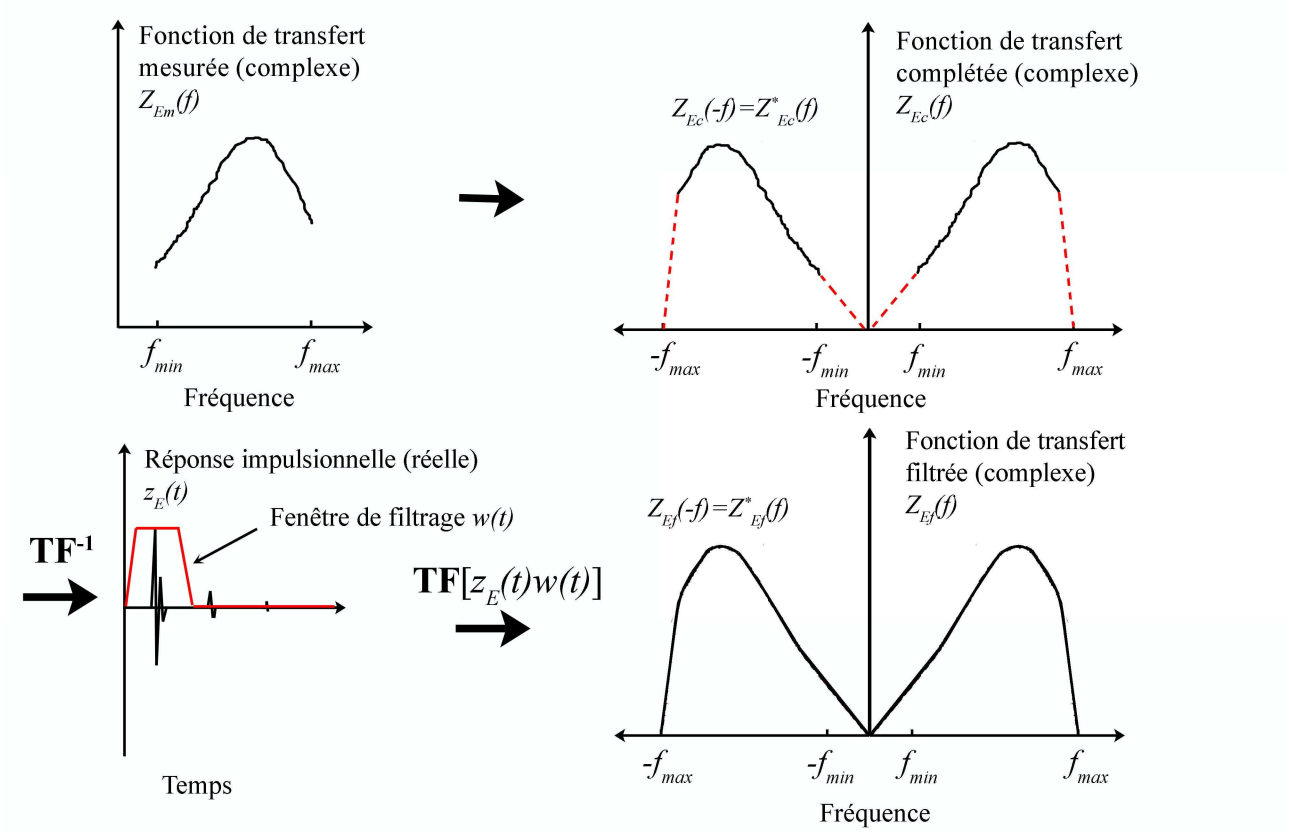


Figure 3.7. Procédure de filtrage d'une impédance électrique de transfert (complexe) dans le domaine temporel (seul les modules des impédances électriques de transfert sont représentés).

La méthode classique de filtrage utilisée précédemment pour le problème en question, décrite dans la référence [35] et schématisée sur la figure 3.7 se résume ainsi :

- l'impédance électrique de transfert $Z_{Em}(f)$ est mesurée en module et en phase à un pas fréquentiel Δf dans une bande fréquentielle limitée $[f_{min}; f_{max}]$ (f_{min} étant imposée par la cohérence des signaux émis et reçus, compte tenu du faible rapport signal sur bruit dans les basses fréquences, pour des microphones ½" espacés de 30 cm $f_{min} \approx 1\,\text{kHz}$),
- l'impédance électrique de transfert mesurée est ensuite complétée dans la bande fréquentielle $[0; f_{min}]$ par des données idéales extrapolées ou pouvant être extraites d'étalonnages en pression effectués par la méthode de la réciprocité (cf. paragraphe 3.4.2) ; par ailleurs, un filtre

passe-bas est appliqué à l'impédance électrique de transfert mesurée de manière à l'atténuer artificiellement dans les hautes fréquences (cette dernière opération ayant pour but de limiter les effets indésirables d'oscillations de la TF^{-1} d'une fenêtre rectangulaire) ; puis, l'impédance électrique de transfert obtenue est prolongée en fréquences négatives avec la propriété $Z_{Ec}(-f)=Z_{Ec}^{*}(f)$ (l'astérisque désignant le complexe conjugué), il vient alors l'impédance électrique de transfert $Z_{Ec}(f)$,

- la troisième étape consiste à calculer la réponse impulsionnelle $z_E(t)=\mathrm{TF}^{-1}\left[Z_{Ec}(f)\right]$ ($z_E(t)$ étant réelle compte tenu de l'opération précédente), puis à isoler l'impulsion principale à l'aide d'une fenêtre temporelle $w(t)$ adaptée,
- enfin, l'impédance électrique de transfert filtrée $Z_{Ef}(f)$ est obtenue en calculant la Transformée de Fourier (TF) du produit $z_E(t)\,w(t)$.

ii. Filtrage dans le domaine fréquentiel, méthode proposée dans le présent travail

Le théorème de la convolution, soit la relation

$$\mathrm{TF}\left[z_E(t)w(t)\right]=Z_{Ec}(f)*W(f)\,, \tag{3.44}$$

où $W(f)$ et $Z_{Ec}(f)$ sont respectivement les TF de $w(t)$ et $z_E(t)$ montre que la procédure de filtrage décrite précédemment peut être faite par convolution à l'aide d'une fenêtre spectrale $W(f)$ rigoureusement choisie. Dans un espace fréquentiel discrétisé, l'opération de convolution s'écrit

$$Z_{Ef}(f_n)=\sum_{k=-N/2}^{N/2} Z_{Ec}(f_{n-k})\,W(f_k)\,. \tag{3.45}$$

où la fenêtre spectrale $W(f_k)$ (où $f_k=k\Delta f$) est de support fini $N+1$ (nombre d'échantillons fréquentiels), nécessairement impair et symétrique par rapport à $W(f_{k=0})$ de manière à ne pas introduire de décalages en fréquence sur la fonction filtrée. La figure 3.8 schématise cette opération de filtrage d'une fonction discrète quelconque avec une fenêtre spectrale $W(f_k)$ (support $N+1=9$).

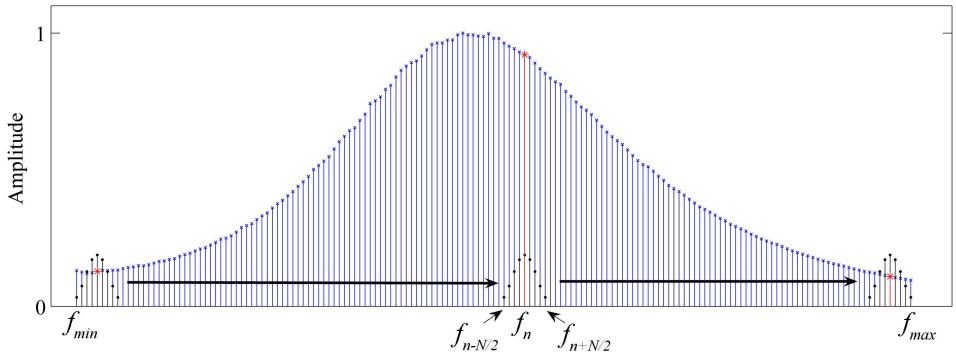


Figure 3.8. Procédure de filtrage dans le domaine fréquentiel : convolution d'une fonction de transfert (éventuellement complexe, points bleus) par une fenêtre spectrale (points noirs) de manière à obtenir une fonction de transfert filtrée (points rouges).

On note que l'obtention d'un point de la fonction de transfert filtrée (celui de fréquence f_n par exemple) ne nécessite que la connaissance des seuls points de fréquences $f_{n-N/2}$ à $f_{n+N/2}$ de la fonction de transfert à filtrer du fait que le support de la fenêtre spectrale est fini. Ainsi, le filtrage direct par convolution peut être effectué directement sur l'impédance électrique de transfert mesurée $Z_{Em}(f_n)$ sans aucune opération préalable (telles celles présentées au paragraphe i précédent). Aussi, le contrôle des effets de bords aux extrémités de la bande fréquentielle est plus simple du fait que la connaissance de l'ordre de la fenêtre spectrale $W(f_k)$ permet d'anticiper les fréquences extrêmes

f_{min} et f_{max} à mesurer. Enfin, cette méthode de filtrage est particulièrement intéressante lorsque par exemple l'étalonnage est demandé en 1/3 d'octave (ce qui est généralement le cas, aux fréquences dites normales [39]), puisque le nombre d'échantillons de $Z_{Em}(f_n)$ à mesurer peut être limité aux $N+1$ échantillons indispensables au filtrage autour des points fréquentiels à étalonner, comme schématisé sur la figure 3.9. Aussi, en prolongeant ce raisonnement, un étalonnage à fréquence unique peut être imaginé.

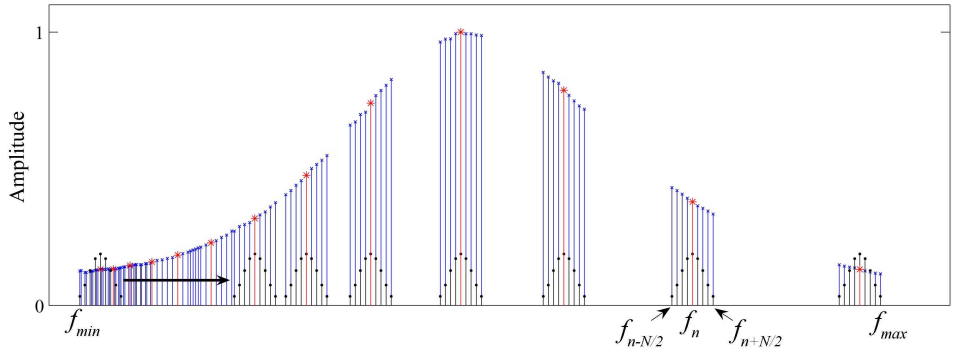


Figure 3.9. Procédure de filtrage dans le domaine fréquentiel : convolution de la fonction de transfert (éventuellement complexe, points bleus) par une fenêtre spectrale (points noirs) de manière à obtenir une fonction de transfert filtrée en 1/3 d'octave (points rouges).

3.4.2 Pré-traitement de la fonction de transfert

La bande fréquentielle retenue pour l'étalonnage des microphones ½" dans le cadre de cette étude est la suivante : [1 kHz ; 31,5 kHz]. L'étalonnage, et par conséquent, le filtrage des mesures à 1 kHz implique des mesures des impédances électriques de transfert aux fréquences inférieures à 1 kHz. Or, compte tenu du faible rapport signal sur bruit en basses fréquences, ces mesures ne peuvent être effectuées. Par conséquent, les données manquantes sont obtenues à partir d'étalonnages en pression effectués par la méthode de la réciprocité suivant la méthode ci-dessous.

L'efficacité d'un microphone en champ libre M_{ff} est liée à son efficacité en pression M_P par la relation [26]

$$M_{ff} = M_P S(f,\theta)\frac{Z_a}{Z_a + Z_{a,r}} = M_P \Delta_{ff}, \tag{3.46}$$

où Z_a est l'impédance acoustique du microphone, $Z_{a,r}$ l'impédance de rayonnement et $S(f,\theta)$ le facteur de diffraction fonction de la fréquence et de l'angle d'incidence. Les coefficients Δ_{ff} liant l'efficacité en champ libre M_{ff} à l'efficacité en pression M_P sont nommés « coefficients champ libre » et dépendent entre autres de la température statique. Le document technique CEI 61094-7 [40] fournit un polynôme issu de diverses expérimentations permettant le calcul de leur module en fonction de la température. En ce qui concerne les phases, pour des microphones de type LS2P (½"), seule à notre connaissance la référence [41] présente sous forme graphique des données expérimentales. En basses fréquences (longueur d'onde petite devant la dimension transversale du microphone), l'impédance de rayonnement est très petite devant l'impédance acoustique du microphone et le facteur de diffraction tend vers 1. De ce fait, les coefficients champ libre Δ_{ff} tendent vers 1 en module et sont faibles en phase (cf. tableau 3.1), les efficacités en champ libre et en pression sont donc sensiblement égales.

Fréquence (Hz)	400	500	630	800	1000
Module (dB)	7.10^{-4}	0,006	0,015	0,031	0,056
Phase (degré)	0,21	0,26	0,33	0,41	0,52

Tableau 3.1. Corrections champ libre Δ_{ff} en module (en dB, $20\log_{10}(\Delta_{ff})$) et en phase (en degré) à 23°C en incidence normale pour un microphone LS2P (B&K Type 4180) [40,41].

Les efficacités en champs libre M_{ff} se déduisent ainsi des efficacités en pression M_P pour les fréquences inférieures à $1\ \text{kHz}$ en apportant éventuellement la correction Δ_{ff} de manière à minimiser l'erreur. L'impédance électrique de transfert en basses fréquences s'écrit d'après la relation (3.37)

$$Z_{Ebf\mu\nu}=\left(M_{P\mu}M_{P\nu}\Delta_{ff}^2\right)\frac{j\rho_{\mu\nu}f}{2d}\mathrm{e}^{-jk_{\mu\nu}d}e^{-\gamma_{\mu\nu}d},\qquad \forall f<1\,\text{kHz},\tag{3.47}$$

où d désigne la distance entre les centres acoustiques des deux microphones (numérotés μ et ν), où $\rho_{\mu\nu}$, $k_{\mu\nu}$ et $\gamma_{\mu\nu}$ désignent respectivement la masse volumique, le nombre d'onde et l'affaiblissement linéique de l'air évalués en fonction des conditions d'environnements lors des expérimentations [26,42] (température statique $T_{\mu\nu}$, pression statique $P_{\mu\nu}$ et humidité relative de l'air $HR_{\mu\nu}$). Cependant, il n'existe actuellement aucune donnée disponible de centres acoustiques pour les microphones de type LS2P (½") aux fréquences inférieures à 1 kHz. Cette contrainte peut être levée en travaillant directement sur le produit des efficacités en champ libre de deux microphones. Aux basses fréquences (inférieures à $1\ \text{kHz}$), ce produit est déduit d'un étalonnage en pression et pour les fréquences supérieures, il est déduit de la mesure en champ libre de l'impédance électrique de transfert $Z_{Em\mu\nu}(f)$. Le produit des efficacités en champ libre de deux microphones s'écrit d'après l'équation (3.37) sous la forme

$$\begin{cases} M_{ff\mu}M_{ff\nu}=M_{P\mu}M_{P\nu}\Delta_{ff}^2, & \forall f<1\,\text{kHz}, \quad (3.48.a)\\ M_{ff\mu}M_{ff\nu}=\dfrac{2(d_m-d_\mu-d_\nu)}{j\rho_{\mu\nu}f}Z_{Em\mu\nu}\mathrm{e}^{jk_{\mu\nu}(d_m-d_\mu-d_\nu)}e^{\gamma_{\mu\nu}(d_m-d_\mu-d_\nu)}, & \forall f\geq 1\,\text{kHz}, \quad (3.48.b)\end{cases}$$

où d_m désigne la distance entre les membranes des deux microphones et $d_{\mu,\nu}$ les positions des centres acoustiques des microphones émetteur et récepteur (par rapport à leurs membranes), fonctions de la fréquence et comptées positives devant les membranes des microphones (cf. chapitre 4).

Il n'en reste pas moins que, pour que la transition entre les deux domaines fréquentiels soit satisfaisante (Eqs. 3.48.a et b), les conditions d'environnement (pression statique, température statique et humidité) doivent être sensiblement les mêmes pour les mesures extraites de l'étalonnage en pression et celles effectuées en champ libre. En pratique, cela est rarement le cas et leurs variations influent sur les propriétés acoustiques des microphones, nécessitant ainsi des coefficients correctifs. La norme CEI 61094-3 [26] recommande de ramener les résultats d'un étalonnage dans les conditions d'environnement de référence, soit une pression statique $\mathrm{P_0}=1013{,}25\,\text{hPa}$, une température statique $\mathrm{T_0}=23\,°\mathrm{C}$ et un taux d'humidité relatif $\mathrm{HR_0}=50\,\%$. La référence [20] présente de façon théorique et expérimentale les effets des variations de pression statique et de température statique sur les efficacités en pression des microphones LS1P Type B&K 4160 (1") et LS2P Type B&K 4180 (½"). Le document technique [43], plus récent, propose, pour plusieurs types de microphones et en fonction de leurs fréquences de résonance f_0, des polynômes permettant le calcul en module et en phase en fonction de la fréquence f des facteurs correctifs notés δ_P^P et δ_T^P corrigeant respectivement les effets des variations de pression statique et de température statique sur

les efficacités en pression M_p. A noter que, actuellement, aucune étude n'a mis en évidence l'influence notable des variations d'humidité courantes sur l'efficacité des microphones ; ces variations ne sont donc pas prises en compte. Les efficacités en pression M_P corrigées des variations de température et de pression statiques s'écrivent donc sous la forme

$$\begin{cases} M_P(T_0)=\delta_T^P(f, f_0, T_0-T_{\mu\nu})M_P(T_{\mu\nu}), & \text{(3.49.a)} \\ M_P(P_0)=\delta_P^P(f, f_0, P_0-P_{\mu\nu})M_P(P_{\mu\nu}). & \text{(3.49.b)} \end{cases}$$

Les facteurs correctifs δ_P^P et δ_T^P connus [20, 43] sont prévus pour corriger les efficacités en pression M_P et *a priori*, ils ne s'appliquent pas aux efficacités en champ libre M_{ff}. Ces deux efficacités (M_P et M_{ff}) sont liées entre elles par la relation (3.46) et la référence [44, § 4] montre que la contribution de la charge acoustique $Z_a/(Z_a+Z_{a,r})$ sur les corrections champ libre Δ_{ff} est très petite comparée à la contribution du facteur de diffraction $S(f,\theta)$. Ainsi, les effets des variations de pression et de température statiques sur la charge acoustique $Z_a/(Z_a+Z_{a,r})$ sont ignorés. Le facteur de diffraction $S(f,\theta)$ est peu sensible aux variations de pression statique mais l'est en revanche aux variations de température statique puisqu'elles influent directement sur la célérité du son et donc sur la longueur d'onde. En conséquence, le facteur correctif noté δ_P^{ff} corrigeant les effets des variations de pression statique sur les efficacités en champ libre M_{ff} est le même que celui corrigeant les effets de ces mêmes variations sur les efficacités en pression M_P, soit

$$\delta_P^{ff}=\delta_P^P. \tag{3.50}$$

D'autre part, en utilisant les relations (3.46) et (3.49.a) il vient

$$\frac{M_{ff}(T_0)}{M_{ff}(T_{\mu\nu})}=\delta_T^P(f, f_0, T_0-T_{\mu\nu})\frac{\Delta_{ff}(T_0)}{\Delta_{ff}(T_{\mu\nu})}. \tag{3.51}$$

Par suite, le facteur correctif noté δ_T^{ff} corrigeant l'effet des variations de température statique sur les efficacités en champ libre M_{ff} s'écrit

$$\delta_T^{ff}(f, f_0, T_0-T_{\mu\nu})=\delta_T^P(f, f_0, T_0-T_{\mu\nu})\frac{\Delta_{ff}(T_0)}{\Delta_{ff}(T_{\mu\nu})}. \tag{3.52}$$

Finalement, le système d'équations (3.48) définissant le produit des efficacités en champ libre de deux microphones pour une large bande fréquentielle s'écrit dans les conditions d'environnement de référence

$$\begin{cases} M_{ff\,\mu}M_{ff\,\nu}=M_{P\mu}M_{P\nu}\Delta_{ff}^2, & \forall f<1\,\text{kHz}, \quad \text{(3.53.a)} \\ M_{ff\,\mu}M_{ff\,\nu}=\dfrac{2(d_m-d_\mu-d_\nu)}{j\rho_{\mu\nu}f}Z_{Em\mu\nu}\mathrm{e}^{ik_{\mu\nu}(d_m-d_\mu-d_\nu)}e^{\gamma_{\mu\nu}(d_m-d_\mu-d_\nu)} & \\ \quad .\delta_T^{ff}(f, f_{0\mu}, \Delta T_{\mu\nu})\delta_P^{ff}(f, f_{0\mu}, \Delta P_{\mu\nu})\delta_T^{ff}(f, f_{0\nu}, \Delta T_{\mu\nu})\delta_P^{ff}(f, f_{0\nu}, \Delta P_{\mu\nu}), & \forall f\geq 1\,\text{kHz}, \quad \text{(3.53.b)} \end{cases}$$

où $f_{0\mu,\nu}$ sont les fréquences de résonances des microphones émetteur et récepteur déduites d'expérimentations [14, § 2], où $\Delta T_{\mu\nu}=T_0-T_{\mu\nu}$ et $\Delta P_{\mu\nu}=P_0-P_{\mu\nu}$ représentent respectivement les variations de température et de pression statique entre les conditions d'environnement de référence et expérimentales en champ libre et où les efficacités en pression $M_{P\mu,\nu}$ sont données dans les conditions d'environnement de référence.

La figure 3.10 représente un exemple du produit des efficacités en champ libre de deux

microphones LS2P (½") obtenu expérimentalement en champ libre (trait plein) dans la gamme fréquentielle [1 kHz ; 33,5 kHz] et à partir d'un étalonnage en pression par la méthode de la réciprocité (trait discontinu) pour les basses fréquences. Comme le laisse apparaître cette figure, la transition entre les deux types de données est imparfaite en raison des oscillations de la courbe issue des mesures en champ libre, oscillations dues aux perturbations évoquées au paragraphe 3.3.2.

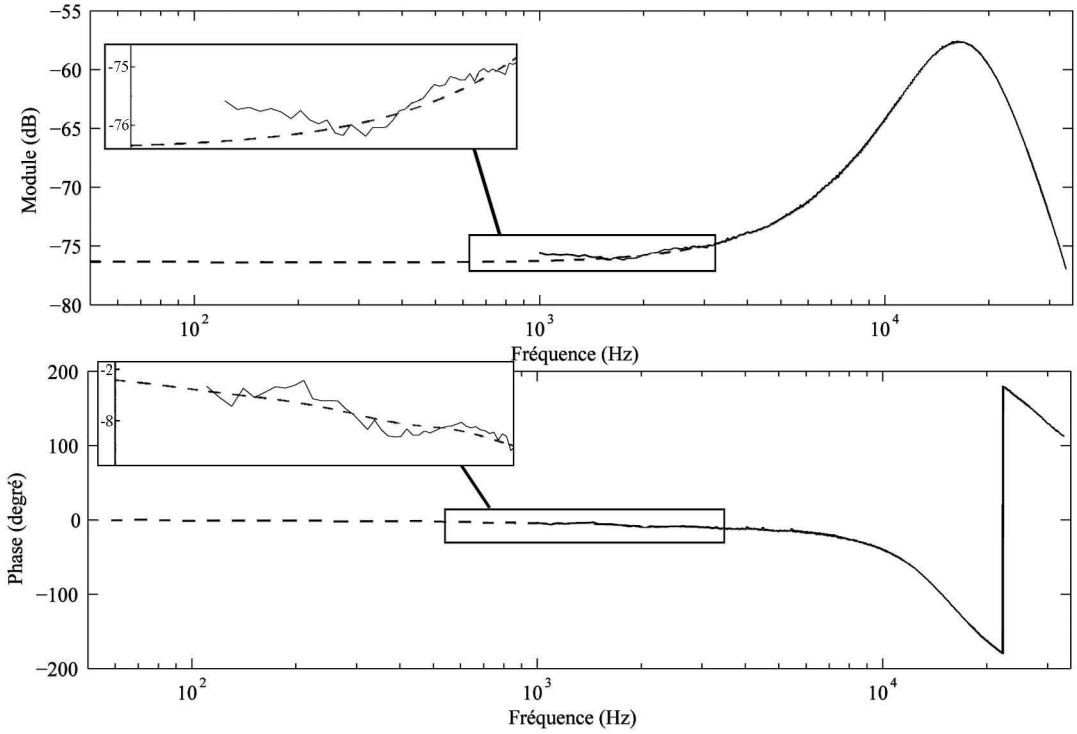


Figure 3.10. Produit des efficacités en champ libre de deux microphones obtenu à partir de mesures effectuées dans un environnement champ libre (trait plein) et estimé à partir d'un étalonnage en pression par la méthode de la réciprocité (trait discontinu) .

3.4.3 Synthèse de la fenêtre de filtrage

La performance du filtrage est étroitement liée au choix de la fenêtre de filtrage spectrale $W(f_k)$. Ce choix doit être fait en fonction des perturbations à supprimer, ce qui nécessite une étude préalable de l'influence réelle du dispositif de mesure sur la fonction de transfert (produit des efficacités en champ libre de deux microphones, Eqs. (3.53.a et b)).

i. Identification des perturbations

L'évaluation de l'influence du dispositif de mesure sur le produit des efficacités défini par les équations (3.53.a) et (3.53.b) est réalisée en calculant sa TF^{-1}. La figure 3.11 représente en fonction de l'espace $c_0 t$ la TF^{-1} d'un produit d'efficacités $M_{ff\mu} M_{ff\nu}$ obtenu pour un couple de microphones LS2P (½") espacés de 30 cm, l'impédance électrique de transfert $Z_{Em\mu\nu}(f_n)$ ayant été mesurée à un pas fréquentiel $\Delta f = 50$ Hz. A noter que la discrétisation de l'espace fréquentiel à pour conséquence par TF^{-1} la périodisation de l'espace temporel avec une période $T = 1/\Delta f$, soit $T = 20$ ms $\left(c_0 T \approx 6{,}92\,\mathrm{m}\right)$. Cette périodisation doit être prise en considération afin d'anticiper les éventuels problèmes de repliement d'échos (cf. discours ci-après). Le pic principal, correspondant au champ direct entre les microphones émetteur et récepteur est centré autour de $c_0 t = 0\,\mathrm{m}$, ceci en raison de la multiplication par $e^{ik_0(d_m - d_1 - d_2)}$ effectuée dans l'équation (3.53.b), sans quoi, le pic

principal serait centré autour de $c_0 t = 0{,}3\,\mathrm{m}$ équivalent à la distance entre les deux microphones testés.

Les figures 3.12.a, b et c représentent les TF^{-1} de trois produits d'efficacités $M_{ff\mu} M_{ffv}$ obtenus pour trois distances entre microphones, tracées de manière plus précise en dilatant l'échelle verticale permettant ainsi l'observation des échos liés aux perturbations. La diaphonie est décalée par rapport au pic principal d'un facteur $c_0 t$ égal à la distance en module entre les microphones. Le premier écho sur le microphone émetteur est quant à lui décalé par rapport au pic principal d'un facteur $c_0 t$ égal à 2 fois la distance entre les microphones. Les échos dus aux supports des microphones et autres appareillages sont visibles au delà de $c_0 t = 2\,\mathrm{m}$, un des échos est plus important : il correspond à une pièce du système de fixation du microphone récepteur situé dans le prolongement de la tige de support à environ 1 m du microphone récepteur. Enfin, un dernier écho est visible à $c_0 t \approx 0{,}3\,\mathrm{m}$ correspondant à une source de perturbation située à environ 15 cm du microphone récepteur. Il s'agit probablement d'une perturbation liée à une discontinuité de la tige supportant le microphone récepteur (discontinuité entre le support du préamplificateur et la tige). Cette perturbation a été négligée au départ et compte tenu du délai imposé par le protocole de la comparaison clé, ce défaut n'a pas pu être corrigé. Conformément aux attentes, les figures montrent également qu'à signal égal, le bruit est plus important lorsque les deux microphones sont éloignés. Ceci explique le masquage par le bruit total de certains échos perturbateurs évoqués précédemment lorsque les microphones sont espacés de 35 cm.

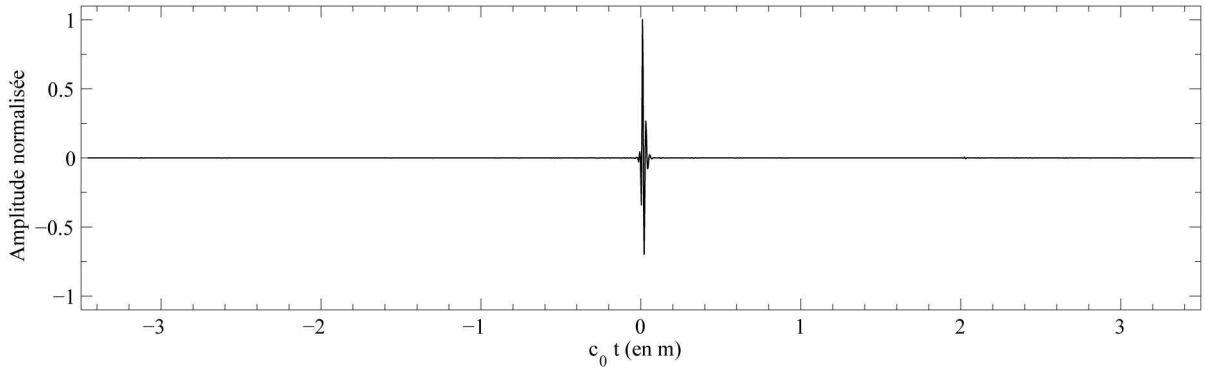


Figure 3.11. TF^{-1} (amplitude normalisée) du produit des efficacités en champ libre de deux microphones LS2P (½") espacés de 30 cm.

Il est à noter que, *a priori*, la caractérisation de certains échos dus aux parois de la salle anéchoïque nécessite un pas fréquentiel d'échantillonnage Δf plus petit que celui choisi (50 Hz). En effet, la périodisation de l'espace temporel par TF^{-1} ($c_0 T \approx 6.98\,\mathrm{m}$) a pour conséquence le repliement de certains échos, le danger étant alors qu'un écho de paroi soit confondu avec le pic principal et ne soit pas filtré. Dans le cas présent, une étude plus approfondie permet de lever cette ambiguïté. La première paroi de la salle est située à environ 3 m des deux microphones (paroi parallèle à l'axe des microphones) ce qui correspond à un chemin acoustique environ égal à 6 m en prenant en compte les dispositions des deux microphones dans la salle (pas de repliement dans le cas présent). Les figures 3.12.a, b et c devraient donc présenter un écho à $c_0 t \approx -0{,}98\,\mathrm{m}$, ce qui n'est pas le cas, montrant ainsi une bonne atténuation des parois de la salle anéchoïque. Un cas plus particulier peut être étudié : il s'agit de la porte de la salle anéchoïque, constituée de pièces mécaniques plus imposantes et pouvant introduire des perturbations plus importantes. La porte est située à environ 5 m du microphone récepteur. Compte tenu de la disposition des microphones dans la salle (porte perpendiculaire à l'axe des microphones), le chemin acoustique parcouru est de environ 10,3 m (± 5 cm selon les configurations). Dans le cas présent, l'écho ne peut être visible sur les figures 3.12.a, b et c que par repliement à $c_0 t = 10{,}3 [6{,}98] = 3{,}32\,\mathrm{m}$ (±5 cm selon les

configurations) ce qui garantit quoi qu'il en soit un filtrage possible. Ces figures montrent quelques échos faibles autour du facteur $c_0 t$ en question, mais non nécessairement attribuables à la porte de la salle anéchoïque (supports, amplificateurs).

Ainsi, le pas fréquentiel d'échantillonnage $\Delta f = 50$ Hz choisi est parfaitement adapté au problème en question, d'une part parce que les échos de parois sont négligeables compte tenu des distances qui séparent les microphones des parois, d'autre part parce que la disposition des microphones dans la salle a été choisie de manière à écarter tout repliement d'échos autour du pic principal pour les éléments ou il subsiste un doute (porte de la salle anéchoïque). Enfin, ce choix est d'autant plus justifié que le protocole imposé par la comparaison clé CCAUV.A-K4 [36] prévoit l'étalonnage des microphones aux fréquences dites « normales » définis dans la norme ISO 266 [39], toutes multiples de 50 Hz.

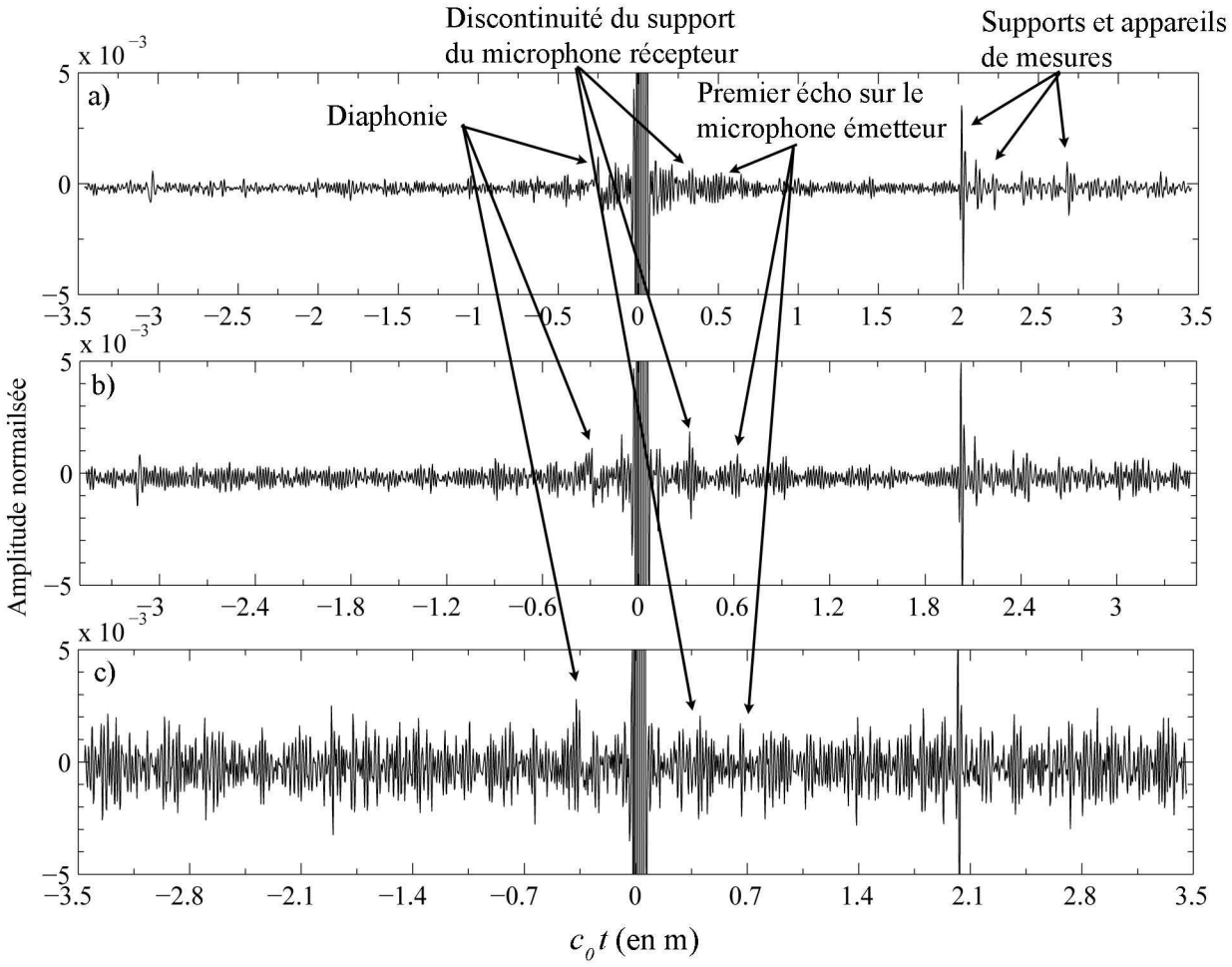


Figure 3.12. TF^{-1} (amplitude normalisée) du produit des efficacités en champ libre de deux microphones LS2P (½") : espacés de 25 (a), 30 (b) et 35 cm (c).

ii. Synthèse de la fenêtre de filtrage

L'étude des échos perturbateurs relatée au-dessus permet à présent le calcul d'une fenêtre de filtrage adaptée au problème. Le principe général consiste à définir une fenêtre dans l'espace temporel isolant le pic principal des échos perturbateurs.

Dans la littérature du domaine [34,35,44], la synthèse d'une telle fenêtre est effectuée en utilisant la méthode classique dite « méthode de la fenêtre ». Le filtre temporel $w(t)$ est créé à l'aide d'une

fonction de période $T=1/\Delta f$, par exemple une fenêtre rectangulaire, Hanning, Tukey (fenêtre recommandée dans la référence [35]) ou autres. Il en résulte une fenêtre spectrale $W(f_k)$ (obtenue par TF de la fenêtre temporelle $w(t)$) de support infini, non adaptée au filtrage d'une fonction de transfert définie dans une bande fréquentielle limitée. Une solution consiste à tronquer cette fenêtre spectrale idéale $W(f_k)$ et de ne garder que la partie centrale qui comprend les valeurs les plus grandes. Néanmoins, cette opération a pour conséquence l'introduction d'oscillations sur le gain du filtre temporel $w(t)$ connues sous le nom de phénomène de Gibbs. L'Annexe G.1 présente plus en détails ces observations.

La méthode retenue ici pour la synthèse de la fenêtre de filtrage est une méthode d'optimisation. La fenêtre spectrale $W(f_k)$ est déterminée de manière optimale en respectant le gabarit d'un filtre temporel à l'aide d'une méthode itérative. L'algorithme classique de Parks-McClellan [45,46], aussi connu sous le nom de Remez répond à ces exigences. Conçu pour la synthèse de filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF), un gabarit est défini dans l'espace fréquentiel, la méthode recherche alors itérativement les paramètres afin qu'avec un ordre minimal, le gabarit soit respecté au mieux. Cette méthode est basée sur une distribution uniforme de l'ondulation sur l'ensemble de la bande passante et de l'affaiblissement sur toute la bande coupée. L'ondulation dans la bande passante et l'affaiblissement minimal dans la bande coupée sont configurables séparément.

Dans le cas présent, du fait que les perturbations connues sont identifiables dans le domaine temporel, le gabarit du filtre est défini dans l'espace temporel, ses spécifications et les termes utilisés sont définis dans la figure 3.13 en fonction de l'espace $c_0 t$ pour des considérations pratiques. Les spécifications à définir sont les suivantes :

- la largeur de la fenêtre $c_0 T$ ($T=1/\Delta f$),
- la demi-largeur préservée $c_0 t_p$,
- la largeur de transition $c_0 t_{tr}$,
- l'affaiblissement minimum dans la largeur atténuée (en dB),
- le taux d'ondulation maximum dans la largeur préservée (en dB).

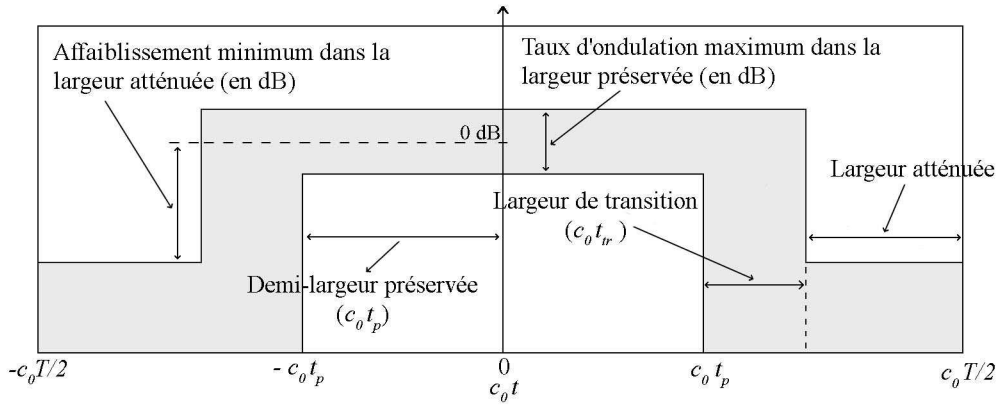


Figure 3.13. Gabarit du filtre temporel $w(t)$ représenté en fonction de $c_0 t$.

La fenêtre temporelle $w(t)$ doit être conçue avec un palier unitaire autour de $c_0 t=0$ très plat, soit un faible taux d'ondulation maximum dans la largeur préservée et un affaiblissement minimum dans la largeur atténuée aussi faible que possible tout en gardant un ordre de filtre raisonnable. Une étude de l'influence de ces paramètres est faite en Annexe G.2 pour une configuration où les microphones sont espacés de 30 cm. Il en résulte un filtre caractérisé par un compromis entre performance et ordre du filtre spectral $W(f_k)$ décrit dans le tableau 3.2 et représenté sur la figure 3.14 dans le domaine temporel. La figure 3.15 présente la fenêtre spectrale $W(f_k)$ obtenue, utilisée pour le filtrage par convolution des produits des efficacités en champ libre des microphones définis

par les relations (3.53.a et b).

Largeur de la fenêtre $c_0 T$ (en m)	6,98
Demi-largeur préservée $c_0 t_p$,(en m)	0,07
Largeur de transition $c_0 t_{tr}$,(en m)	0,23
Taux d'ondulation maximum dans la largeur préservée	0,03 dB
Affaiblissement minimum dans la largeur atténuée	-40 dB
Ordre $(N+1)$ du filtre $W(f_k)$ obtenu	75

Tableau 3.2. Paramètres utilisés pour la synthèse d'un filtre destiné au filtrage des produits des efficacités en champ libre de deux microphones lorsque ils sont espacés de 30 cm (algorithme de Parks-McClellan).

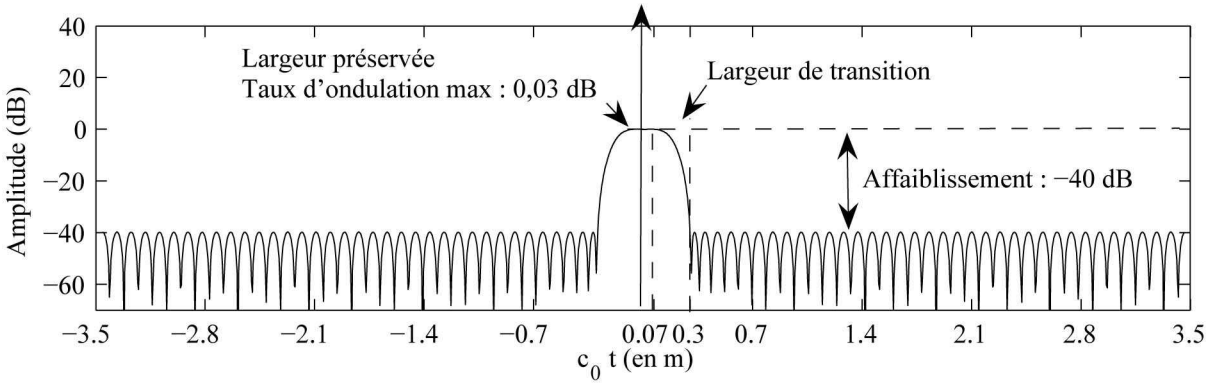


Figure 3.14. Fenêtre de filtrage temporelle $w(t)$ construite à partir des paramètres définis dans le tableau 3.2, ($c_0 T \approx 6{,}98$ m).

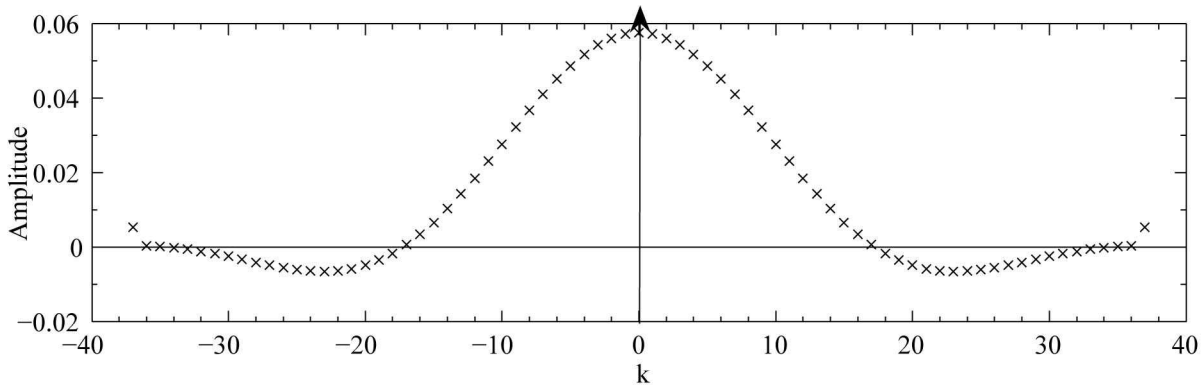


Figure 3.15. Fenêtre spectrale $W(f_k)$ du filtre défini dans le tableau 3.2 ($\Delta f = 50$ Hz).

3.5 Résultats et incertitudes

Ce paragraphe présente les résultats obtenus pour l'étalonnage en champ libre de trois microphones LS2P (½") Type B&K 4180 espacés de 30 cm.

3.5.1 Mesures et résultats

Comme décrit dans le paragraphe 3.3, les impédances électriques de transfert $Z_{Em\mu V}(f)$ sont mesurées par couple de microphones, soit trois mesures, dans la gamme de fréquence [1 kHz ; 33,5 kHz] à un pas fréquentiel $\Delta f = 50$ Hz . Les mesures sont effectuées en salle

anéchoïque dans les conditions d'environnement précisées dans le tableau 3.3. La figure 3.16 présente les trois impédances électriques de transfert mesurées.

Les opérations décrites dans le paragraphe 3.4.2 conduisent aux produits des efficacités en champ libre pour chaque couple de microphones ramenés aux conditions d'environnement de référence (Eqs. 3.53.a et b). Les efficacités en pression des microphones nécessaires aux prolongements des fonctions de transfert dans les basses fréquences sont issues d'étalonnages en pression indépendants effectués par la méthode de la réciprocité décrite dans la norme CEI 61094-2 [8]. Les centres acoustiques des microphones sont extraits de la norme CEI 61094-3 [26]. La figure 3.17 présente les produits des efficacités obtenus avant filtrage.

Couples de microphones (μ et ν)	1 et 2	1 et 3	2 et 3
Température statique $T_{\mu\nu}$ (en °C)	23	23	23
Pression statique $P_{\mu\nu}$ (en hPa)	1002,2	1001,5	1001,1
Humidité relative $HR_{\mu\nu}$ (en %)	48,1	47,8	47,6

Tableau 3.3 : Conditions d'environnements lors des mesures des impédances électriques de transfert en champ libre de 3 couples de microphones ½".

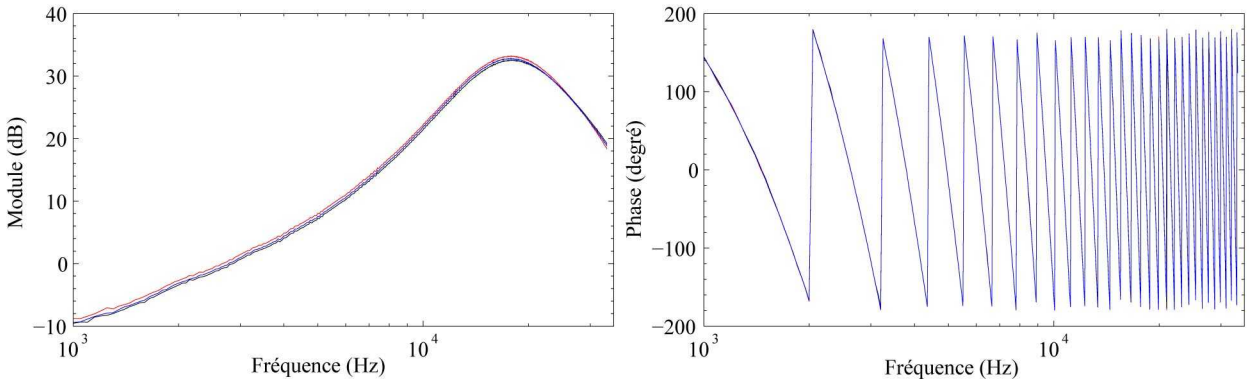


Figure 3.16. Impédances électriques de transfert en champ libre $Z_{Em\mu\nu}$ mesurées (module et phase) : Z_{Em12} (courbe bleue), Z_{Em13} (courbe noire), Z_{Em23} (courbe rouge).

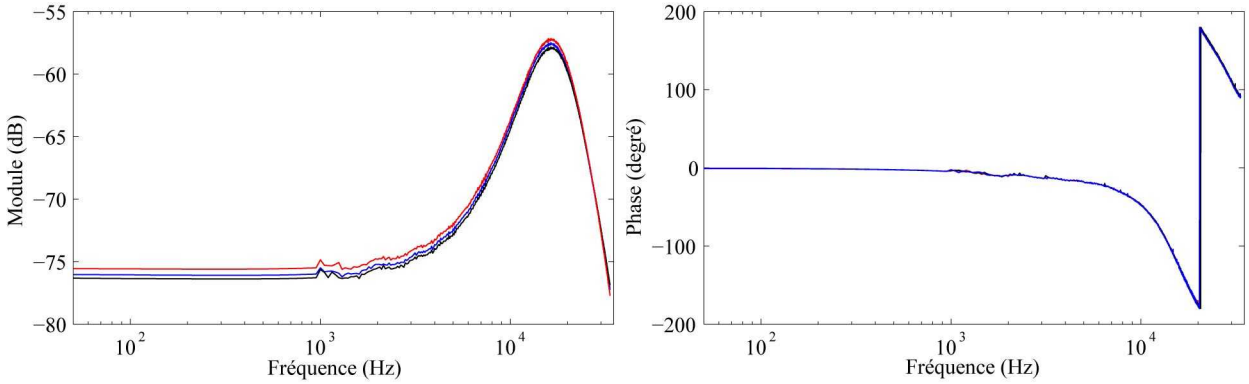


Figure 3.17. Produits des efficacités en champ libre $(M_{ff\mu} M_{ff\nu})$ complétés en basses fréquences (Eq. 3.53) avant filtrage (module et phase), ramenés aux conditions d'environnement de référence : $(M_{ff1} M_{ff2})$ (courbe bleue), $(M_{ff1} M_{ff3})$ (courbe noire), $(M_{ff2} M_{ff3})$ (courbe rouge).

Les opérations de filtrage appellent plusieurs remarques :

- compte tenu de l'ordre du filtre spectral $W(f_k)$ ($N+1=75$, cf. tableau 3.2) et du pas

fréquentiel d'échantillonnage ($\Delta f = 50\,\text{Hz}$), le filtrage en basses fréquences implique le prolongement dans les fréquences négatives des produits des efficacités $\left(M_{ff\mu} M_{ff\nu}\right)$ en considérant la propriété $\left(M_{ff\mu} M_{ff\nu}\right)(f_n) = \left(M_{ff\mu} M_{ff\nu}\right)^*(-f_n)$,

- de même, aux hautes fréquences, les $N/2 = 37$ derniers points fréquentiels du produit des efficacités $\left(M_{ff\mu} M_{ff\nu}\right)$ ne peuvent être filtrés correctement et sont exclus (bande fréquentielle [31,65 kHz; 33,5 kHz]),
- enfin, le processus de filtrage génère une déformation des produits des efficacités filtrés ; cette déformation nommée « érosion » et notée δ_e dépend de la fenêtre de filtrage choisie : elle évolue en fonction de la fréquence et est évaluée en Annexe G.2.1.i à moins de 0,005 dB en module pour la fenêtre de filtrage utilisée dans ce paragraphe.

Les produits d'efficacités $\left(M_{ff\mu} M_{ff\nu}\right)$ (complétés en fréquences négatives) sont alors convolués avec la fenêtre spectrale $W(f_k)$ (cf. figure 3.15 et tableau 3.2) et sont corrigés de l'effet d'érosion, soit les opérations :

$$\begin{cases} \left[M_{ff1} M_{ff2}\right]_c = \left(M_{ff1} M_{ff2}\right) * W / \delta_{e12}, & \text{(3.54.a)} \\ \left[M_{ff1} M_{ff3}\right]_c = \left(M_{ff1} M_{ff3}\right) * W / \delta_{e13}, & \text{(3.54.b)} \\ \left[M_{ff2} M_{ff3}\right]_c = \left(M_{ff2} M_{ff3}\right) * W / \delta_{e23}, & \text{(3.54.c)} \end{cases}$$

$\left[M_{ff\mu} M_{ff\nu}\right]_c$ désignant le produit des efficacités des microphones en champ libre filtrés et où $\delta_{e12} \approx \delta_{e13} \approx \delta_{e23}$.

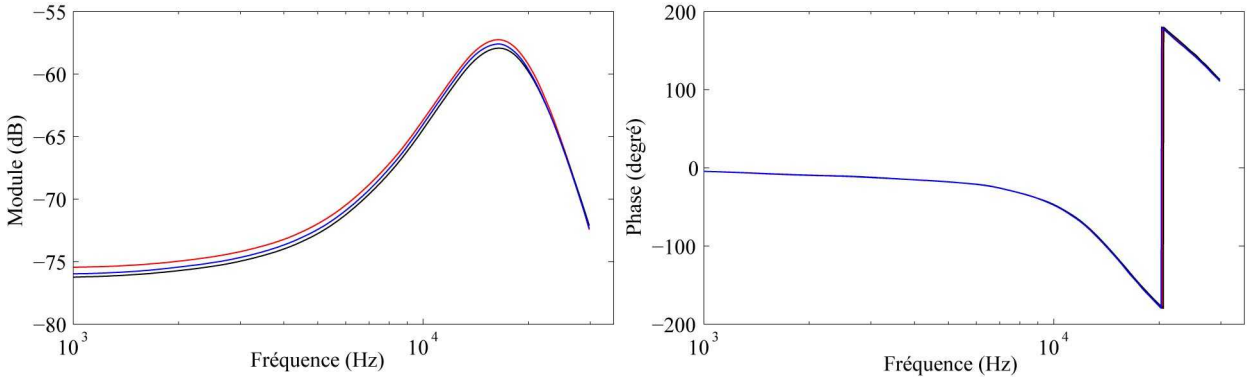


Figure 3.18. Produits des efficacités en champ libre $\left[M_{ff\mu} M_{ff\nu}\right]_c$ filtrés (module et phase) ramenés aux conditions d'environnement de référence : $\left[M_{ff1} M_{ff2}\right]_c$ (courbe bleue), $\left[M_{ff1} M_{ff3}\right]_c$ (courbe noire), $\left[M_{ff2} M_{ff3}\right]_c$ (courbe rouge).

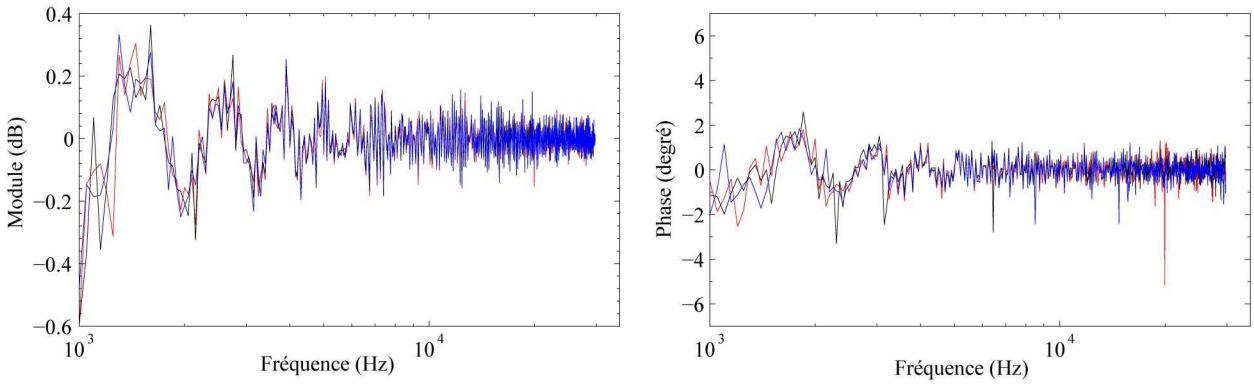


Figure 3.19. Perturbations filtrées (module et phase) sur les produits des efficacités en champ libre (opérations $\left[M_{ff\mu} M_{ff\nu}\right]_c / \left(M_{ff\mu} M_{ff\nu}\right)$) : $(\mu,\nu) = (1,2)$ (courbe bleue), $(\mu,\nu) = (1,3)$ (courbe noire) et $(\mu,\nu) = (2,3)$ (courbe rouge).

La figure 3.18 présente les produits des efficacités filtrés dans la bande fréquentielle utile [1 kHz ; 31,6 kHz]. Les perturbations filtrées sur les trois produits d'efficacités sont représentées en module et en phase sur la figure 3.19 (opérations $\left[M_{ff\mu}M_{ff\nu}\right]_c / \left(M_{ff\mu}M_{ff\nu}\right)$). Leur amplitude est non négligeable et montre l'importance du processus de filtrage mise en place. Des oscillations sont visibles en basses fréquences avec une périodicité de environ 1500 Hz , soit une perturbation ayant parcouru un chemin acoustique $c_0/1500 \approx 30$ cm . Il s'agit principalement des perturbations liées à la diaphonie qui émergent dans les basses fréquences au fur et à mesure que le rendement du microphone source diminue.

La résolution du système d'équations (3.54) conduit alors aux efficacités en champ libre filtrées de chaque microphone (figure 3.20).

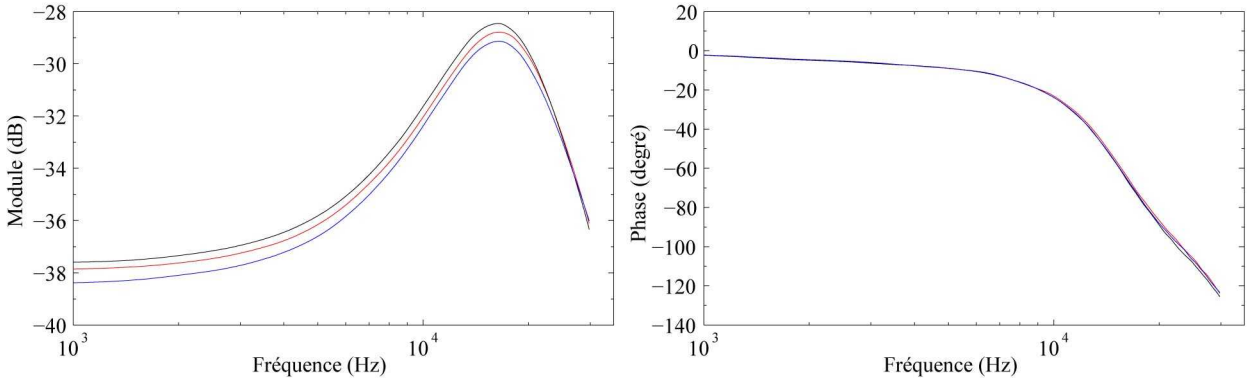


Figure 3.20. Efficacités en champ libre (filtrées) (module et phase) M_{ffc1} *(courbe rouge),* M_{ffc2} *(courbe noire) et* M_{ffc3} *(courbe bleue).*

3.5.2 Incertitudes

L'incertitude associée au résultat de l'étalonnage est fonction du dispositif expérimental, de la fenêtre de filtrage choisie et des conditions d'environnement dans lesquelles les mesures sont effectuées. L'incertitude composée élargie ($k=2$) [47] associée à l'efficacité d'un microphone ½" étalonné en champ libre par la méthode de la réciprocité est présentée ci-dessous en considérant des variations maximums des conditions d'environnement autour des valeurs de référence, soit une pression statique $P_0 = 1013{,}25 \pm 30$ hPa , une température statique $T_0 = 23 \pm 3\,°C$ (salle anéchoïque climatisée permettant un bon contrôle de la température statique) et un taux d'humidité relatif $HR_0 = 50 \pm 30\%$ (le bilan des incertitudes est reporté en Annexe H).

La figure 3.21 présente l'incertitude composée élargie associée au module de l'efficacité en champ libre d'un microphone ½" évaluée à partir des données du présent travail (cf. Annexe H, trait plein) et comparée à celle déposée en 2005 par le LNE au BIPM (trait discontinu) [48]. Une amélioration sensible de la gamme fréquentielle utile ainsi qu'une diminution notable du plancher d'incertitude est constatée. A noter que cette dernière amélioration doit être considérée avec précaution puisqu'elle devra être validée par les résultats de la comparaison clé CCAUV.A-K4 en cours. Les raisons de cette amélioration et les divergences constatées peuvent néanmoins être justifiées : la diminution globale de niveau d'incertitude s'explique par un dispositif expérimental plus performant (nouvelle salle anéchoïque, préamplificateurs faible bruit, séparation des voies d'acquisitions ...) et par l'optimisation de la fenêtre de filtrage ; la diminution dans le présent travail de l'incertitude en basses fréquences s'explique par la prise en compte du processus de filtrage dans le calcul de l'incertitude (diminution de la composante liée aux bruits électrique et acoustique, cf. Annexe G.2.1.v) ; enfin, l'amélioration dans le présent travail de l'incertitude aux hautes fréquences

est simplement due à l'abandon d'une composante qui avait été introduite dans les précédents bilans des incertitudes pour tenir compte des divergences constatées entre les résultats de différents laboratoires lors d'inter-comparaisons. Ces divergences augmentaient avec la fréquence mais n'étaient pas clairement identifiées. Différentes pistes ont été envisagées pour les expliquer : la présence de molécules de solvant issues du revêtement anéchoïque de la salle et susceptibles de modifier les caractéristiques d'absorption de l'air, l'accroissement local de température due à la consommation d'énergie des préamplificateurs qui engendrait des mouvements de convection de l'air très néfastes surtout pour une disposition verticale des microphones (cette dernière piste étant la plus crédible). Les nouveaux préamplificateurs (utilisés dans la présente étude) étant désormais moins consommateurs d'énergie et les microphones étant disposés horizontalement, on peut raisonnablement penser que l'introduction cette composante dans l'évaluation de l'incertitude ne se justifie pas, et les résultats de la comparaison clé en cours permettront probablement de valider ce choix.

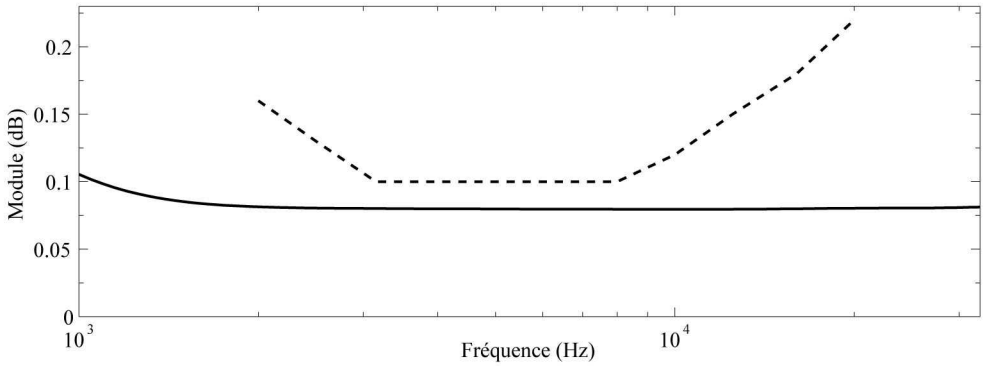


Figure 3.21. Incertitudes composées élargies ($k=2$) associées au module de l'efficacité en champ libre d'un microphone ½''' : évaluée à partir des données du présent travail (cf. Annexe H, trait plein) et déposée par le LNE au BIPM en 2005 (trait discontinu).

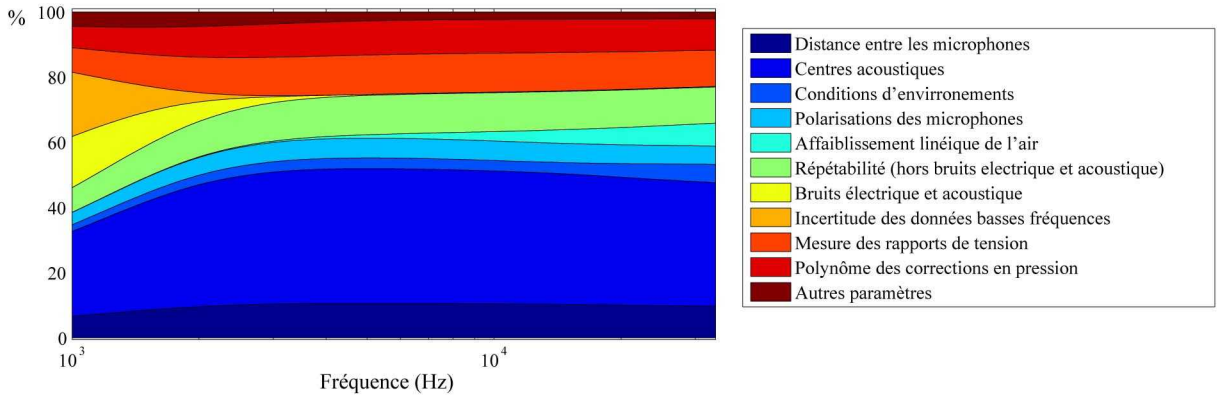


Figure 3.22. Paramètres d'influences dans le calcul de l'incertitude associée au module de l'efficacité en champ libre d'un microphone ½''.

Les paramètres d'influences intervenant dans le calcul du module de l'incertitude composée sont présentés sur la figure 3.22. Il apparaît que les paramètres prépondérants sont liés aux incertitudes intervenant sur la distance entre les centres acoustiques des microphones (l'incertitude liée à la répétabilité des mesures hors bruit électrique et acoustique étant principalement liée au positionnement des microphones, cf. Annexe G.2.1.v). Une diminution de l'incertitude composée passe donc principalement par une diminution de l'incertitude associée à la détermination de la position des centres acoustiques des microphones (cf. chapitre 4) et, dans une moindre mesure, par l'utilisation d'un dispositif permettant le positionnement des microphones de manière plus précise

que celui utilisé actuellement (à 1 mm près). Une simulation numérique montre que l'utilisation d'un dispositif permettant un positionnement à 0,1 mm permettrait une diminution globale de l'incertitude composée élargie de l'ordre de 0,005 dB.

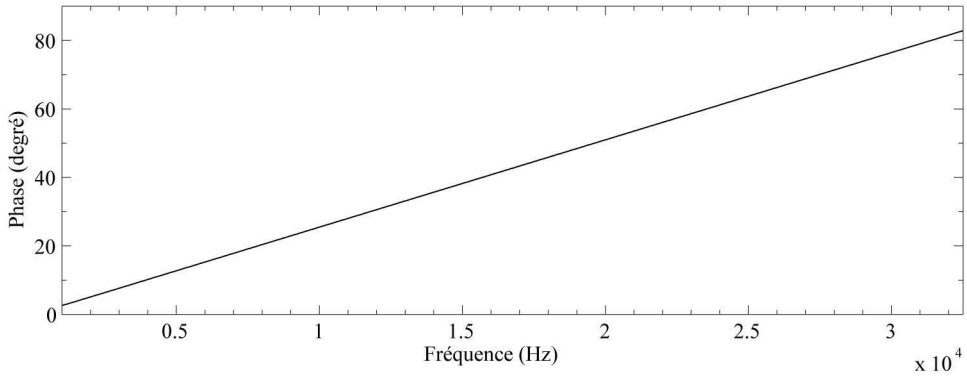


Figure 3.23. Incertitude composée élargie ($k=2$) associée à la phase de l'efficacité en champ libre d'un microphone ½".

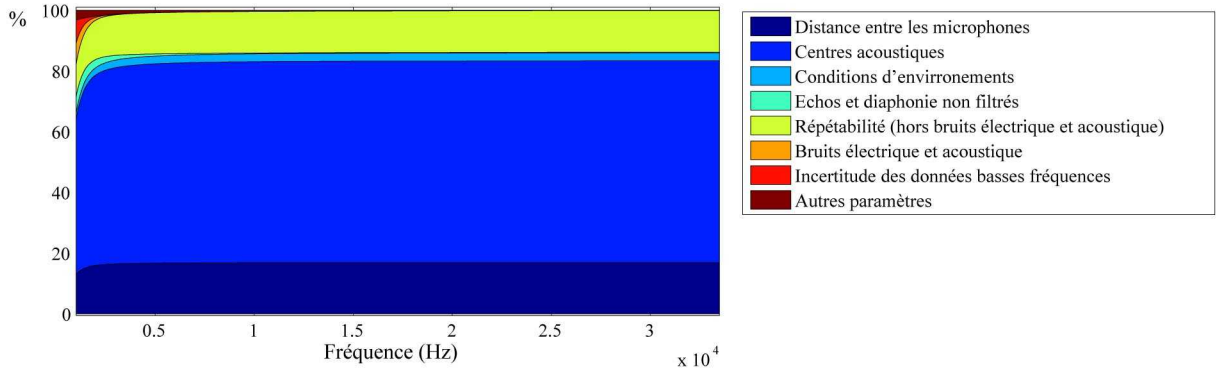


Figure 3.24. Paramètres d'influences dans le calcul de l'incertitude associée à la phase de l'efficacité en champ libre d'un microphone ½".

La figure 3.23 présente l'évaluation de l'incertitude composée élargie associée à la phase de l'efficacité en champ libre d'un microphone ½". La courbe obtenue montre que l'incertitude composée est en première approximation proportionnelle à la fréquence, cela étant dû principalement aux incertitudes sur la distance entre membranes et sur la position des centres acoustiques des microphones comme le montre les paramètres d'influences intervenant dans le calcul d'incertitude, représentés sur la figure 3.24. Il est intéressant de décomposer cette incertitude sous la forme d'une somme quadratique de deux termes $U_c^2(f)=(k_u.f)^2+U_r^2$: un premier $(k_u f)$ proportionnel à la fréquence ayant pour source les incertitudes dépendant de la distance entre les centres acoustiques des microphones et un deuxième U_r constitué du reste des incertitudes (cf. figure 3.25). Le facteur k_u pourrait être fortement diminué en réduisant les incertitudes dépendant de la distance entre les centres acoustiques des microphones ou bien par une autre méthode, par exemple en remarquant que la phase de l'efficacité en pression d'un microphone à la fréquence de résonance de celui-ci est par définition égal à $-90°$. Il vient alors

$$Arg\left(M_{ff}(f_0)\right)=Arg\left(M_P(f_0)\right)+Arg\left(\Delta_{ff}(f_0)\right)=-\pi/2+Arg\left(\Delta_{ff}(f_0)\right). \qquad (3.55)$$

où les corrections champ libre Δ_{ff} en phase pourraient être obtenues à partir de simulations numériques [44]. Ainsi, en connaissant la phase de la correction champ libre Δ_{ff} à la fréquence de résonance du microphone il est alors possible de déterminer une fonction affine corrigeant la phase de l'efficacité en champ libre et par conséquent, de réduire très fortement le terme d'incertitude

$(k_u f)$ proportionnel à la fréquence. Néanmoins, ce travail n'a pas été réalisé du fait que l'étalonnage en phase n'est pas demandé dans le cadre de la comparaison clé CCAUV.A-K4 [36].

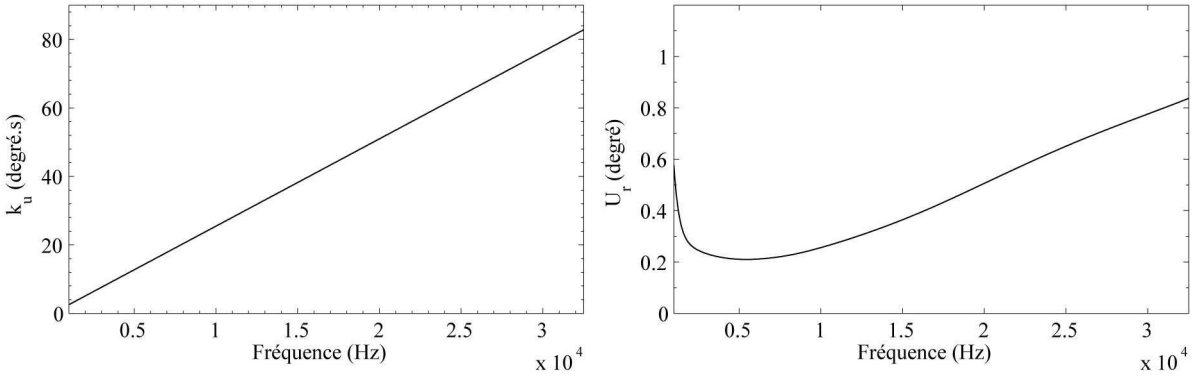


Figure 3.25. Décomposition de l'incertitude composée élargie ($k=2$) associée à la phase de l'efficacité en champ libre d'un microphone ½" : a) terme proportionnelle à la fréquence $(k_u f)$, b) terme résiduel U_r.

3.6 Conclusion

L'étude présentée dans ce chapitre porte sur l'étalonnage primaire en champ libre des microphones étalons de laboratoire LS2P (½") par la méthode de la réciprocité et s'inscrit dans le cadre de la comparaison clé CCAUV.A-K4 [36] impliquant plusieurs laboratoires de métrologie. La méthode de la réciprocité en champ libre consiste à mesurer les impédances électriques de transfert entre trois couples de microphones (cf. § 3.3.1) et à modéliser leurs impédances acoustiques de transfert dans un milieu infini (Eq. (3.34)). Ces deux quantités conduisent alors aux efficacités en champ libre de chaque microphone.

Des difficultés de mesures ont été mises en évidences, difficultés liées aux faibles niveaux acoustiques mis en jeu. Il en résulte des mesures d'impédances électriques de transfert entachées de perturbations, dont les causes ont été identifiées à partir des retards constatés sur les TF^{-1} des produits des efficacités en champ libre des microphones. Ces retards permettent d'utiliser une procédure de filtrage construite sur la base d'une fenêtre spectrale rigoureusement choisie et qui convoluée aux produits des efficacités mesurés conduit à une forte réduction des perturbations. Les courbes de perturbations filtrées (figure 3.19) montrent que la cause principale de perturbations, du moins en basses fréquences, est avant filtrage la diaphonie malgré les précautions prises en amont du filtrage (séparation des deux voies de mesures).

Le bilan des incertitudes présenté dans ce chapitre montre néanmoins une nette diminution des incertitudes en module comparées à celles déposées par le LNE au BIPM en 2005 [48] ; bien que cette diminution doit être considérée avec précaution puisqu'elle devra être validée par les résultats de la comparaison clé CCAUV.A-K4 en cours. La diminution de l'incertitude sur la position des centres acoustiques et la diminution de l'incertitude sur le positionnement des microphones permettrait de diminuer encore l'incertitude composée de quelques centièmes de dB, ce qui la rapprocherait du niveau d'incertitude atteint par l'étalonnage en pression par la méthode de la réciprocité (environ $0{,}04\,\mathrm{dB}$).

Enfin, il faut noter que d'autres méthodes d'étalonnages en champ libre pourraient compléter ou remplacer la méthode étudiée dans ce chapitre. Les derniers travaux effectués concernant l'estimation de la vitesse particulaire à partir de moyens non intrusifs [49,50] (par Vélocimétrie Laser Dopler ou par Vélocimétrie par Image de Particule) constituent une ouverture en ce sens.

Chapitre 4

Centre acoustique d'un microphone électrostatique

4.1 Introduction

L'étalonnage en champ libre des microphones électrostatiques par la méthode de la réciprocité fait appel à la notion de centre acoustique des microphones. La détermination aussi précise que possible de la position de ce centre est primordiale du fait que la contribution de l'erreur sur cette position à l'erreur globale sur l'efficacité mesurée par réciprocité en champ libre est très grande (cf. paragraphe 3.5.2 et 3.6). C'est l'objet essentiel de ce chapitre que d'apporter un éclairage, de reprendre et compléter les modèles analytiques (§ 4.2) et les résultats expérimentaux (§ 4.3), actuels de la littérature sur cette notion.

De manière idéale, une source ponctuelle génère dans un milieu infini (champ libre) une pression acoustique dont l'amplitude décroît de façon inversement proportionnelle à la distance. Dans le cas d'une source de dimension finie, cette loi de décroissance peut être considérée comme vraie si entre autres hypothèses le point d'observation est suffisamment loin de la source. Si tel n'est pas le cas, la source peut encore être représentée par une source ponctuelle appelée centre acoustique, dont la position doit être déterminée. La norme CEI 61094-3 [26] précise la définition de ce centre acoustique de la manière suivante :

« Pour un transducteur émetteur acoustique, pour un signal sinusoïdal de fréquence donnée, et pour une direction et une distance spécifiées, point d'où semblent diverger les surfaces d'onde approximativement sphériques qu'on observe dans une petite région autour du point d'observation.

Notes :

- Le centre acoustique d'un transducteur réciproque utilisé comme récepteur coïncide avec le centre acoustique de ce transducteur utilisé comme émetteur.
- Cette définition s'applique seulement aux régions du champ acoustique où les surfaces d'ondes sont sphériques ou approximativement sphériques. »

La norme précise également la notion de « transducteur ponctuel équivalent » comme suit :

« Transducteur qui, situé à l'emplacement du centre acoustique du microphone, possède les caractéristiques d'émission et de réception de ce microphone pour une direction et une gamme de distances données. »

La première note concernant le centre acoustique s'explique par le fait que le champ diffracté est approximativement équivalent au champ rayonné lorsque l'objet est utilisé dans les mêmes conditions [51]. Bien entendu, tel qu'il est défini, le centre acoustique dépend de la fréquence ainsi que de l'orientation et de la distance entre le point d'observation et la source.

Compte tenu des exigences imposées par l'étalonnage en champ libre des microphones par la méthode de la réciprocité, la position du centre acoustique des microphones doit être déterminée [33]. La norme [26] donne des estimations (issues d'expériences) de ces positions avec une incertitude estimée inférieure à 2 mm pour des microphones de type LS1 (1") et LS2 (½") en incidence normale et valables pour des distances d'observation comprises entre 15 et 60 cm. Typiquement ces valeurs varient entre 5 mm à 1 kHz et 0.5 mm à 20 kHz pour des microphones de type LS2 (½") et entre 9 mm à 630 Hz et -1.9 mm à 20 kHz pour des microphones de type LS1 (le signe « - » indiquant que la position du centre acoustique est à l'arrière de le membrane du microphone). Ces valeurs et la majorité des mesures extraites de la littérature sont obtenues à partir de la loi de décroissance inversement proportionnelle à la distance du module du champ de pression acoustique. Il existe néanmoins d'autres méthodes, basées sur des mesures de phases. Dans la référence [52], les auteurs présentent et discutent ces différentes méthodes.

Au cours de la dernière décennie, le concept de centre acoustique des microphones électrostatiques a essentiellement fait l'objet d'études expérimentales et numériques [33,53,54,55], qui ont conduit à des résultats cohérents. Les méthodes numériques ne sont pas discutées ici ; elles pourront au besoin être reprises ultérieurement sur la base de codes adaptés au propos. La méthode expérimentale utilisée par les auteurs permet d'obtenir la position du centre acoustique à partir de mesures de la fonction de transfert entre un microphone émetteur et récepteur (telle qu'elle est préconisée dans la méthode d'étalonnage par réciprocité), pour différentes distances entre les deux transducteurs. Cette méthode expérimentale présente certaines insuffisances qui sont discutées au paragraphe 4.3, discussion qui amène à proposer ici une nouvelle méthode de mesure de la position du centre acoustique d'un transducteur acoustique permettant de palier certaines insuffisances de la méthode de la réciprocité.

Les développements analytiques, sont très peu nombreux et relativement anciens (ils datent pour les plus importants des années 50-70). Deux auteurs [56,57] proposent des développements analytiques précis de problèmes relativement proches du problème réel, inspirés des travaux de D. S. Jones [58] sur la diffraction d'une onde par une tige cylindrique semi infinie qui font usage de la technique de Wiener-Hopf et des transformées de Laplace pour résoudre le problème. Ces développements analytiques sont, dans les paragraphes qui suivent, repris et adaptés pour décrire de façon plus réaliste le problème posé.

4.2 Détermination analytique de la position du centre acoustique d'un transducteur électrostatique

A notre connaissance, la première étude analytique traitant du concept de centre acoustique a été publiée en 1970 par Y. Ando [56]. Cet article traite du rayonnement d'un tube semi-infini à paroi d'épaisseur non nulle (en l'absence de microphone) : des valeurs théoriques des positions des centres acoustiques y sont données ainsi que les calculs de coefficients de réflexion et de corrections d'extrémités dont les résultats sont en adéquation avec ceux donnés en 1948 par H. Levine et J. Schwinger [59] pour des parois de tube d'épaisseur nulle.

En 1970 également, E. Matsui [57] étudie la diffraction d'une onde sur un microphone électrostatique placé dans une tige semi infinie, la cavité cylindrique frontale (cavité fermée à une extrémité par la membrane et ouverte à l'autre extrémité) typique des microphones étalons de laboratoire y étant prise en compte. L'étude porte sur la diffraction d'une onde incidente plane sur le microphone et donne accès aux corrections dites « corrections champ libre » (dues à l'onde diffractée), corrections qui permettent de calculer l'efficacité d'un microphone en champ libre à

partir d'un étalonnage en pression [40] (cf. paragraphe 3.4.2).

Ainsi le problème du calcul analytique de la position du centre acoustique d'un microphone électrostatique dont la membrane est située près de l'extrémité d'un tube à paroi d'épaisseur non négligeable, montage en usage pour l'étalonnage en champ libre des microphones étalons de laboratoire par la méthode de la réciprocité, reste-t-il un problème ouvert. Il est discuté dans la suite en reprenant, comme E. Matsui [57] et Y. Ando [56], le formalisme de D. S. Jones [58] et en complétant le modèle du calcul de la position du centre acoustique de Y. Ando pour tenir compte de la petite cavité à l'avant de la membrane et de son couplage avec la membrane elle-même.

Plus précisément l'étude présentée ci-dessous traite le cas d'un microphone électrostatique fonctionnant en émetteur monté sur une tige semi infinie de rayon extérieur a_2, à paroi rigide. La membrane de rayon a_1 ferme en $z=-\ell$ une petite cavité cylindrique (frontale) à paroi rigide ouverte en $z=0$ sur un espace infini (figure 4.1). Dans cette étude, le champ extérieur (domaines $\mathcal{D}_2$, $z>0$ et $\mathcal{D}_3$) est calculé suivant la méthode de D. S. Jones (technique de Wiener-Hopf [3,60] dans le domaine de Laplace) ; le champ dans la cavité frontale (domaine $\mathcal{D}_1$) est calculé en faisant usage de la formulation intégrale et son couplage avec le diaphragme du microphone est exprimé de façon adapté au problème considéré dans lequel le microphone est émetteur (situation différente de celle considérée par E. Matsui). Enfin le champ acoustique est exprimé à l'infini pour obtenir, suivant la méthode de Y. Ando, la position du centre acoustique recherchée.

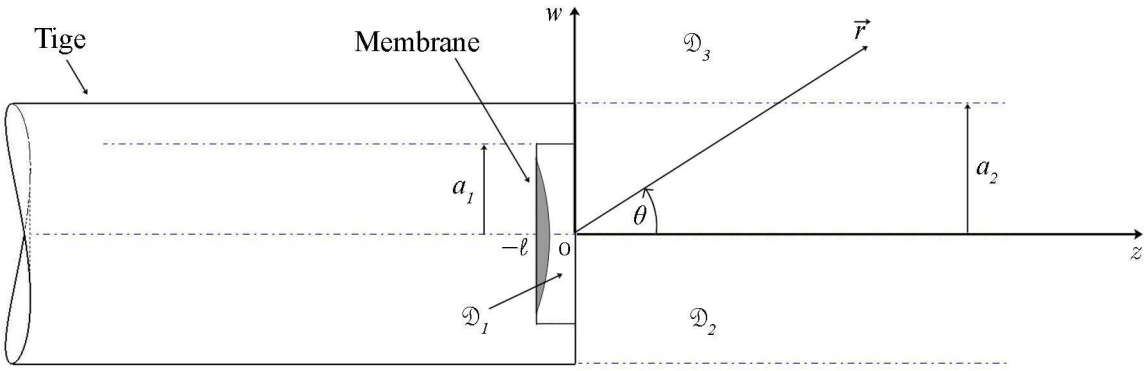


Figure 4.1. Microphone électrostatique monté dans une tige semi infinie, schéma et notations utilisées.

4.2.1 Les équations fondamentales du problème

Le problème est traité en coordonnées cylindriques (w,z) et est supposé à symétrie axiale. Le domaine d'étude considéré $\mathcal{D}$ est découpé en trois domaines distincts dans lesquelles les champs de pression acoustique sont notés :

- $p_1(w,z)$, dans le domaine $\mathcal{D}_1$, $w\in(0,a_1)$, $z\in(-\ell,0)$,
- $p_2(w,z)$, dans le domaine $\mathcal{D}_2$, $w\in(0,a_2)$, $z\in(0,\infty)$, (4.1)
- $p_3(w,z)$, dans le domaine $\mathcal{D}_3$, $w\in(a_2,\infty)$, $z\in(-\infty,\infty)$.

i. Equation de la membrane

Le champ de déplacement normal $\xi(w)$ de la membrane, compté positif dans le sens des z croissants répond au problème suivant [3] :

$$\left(T_m \Delta_w - \sigma_s \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\xi(w) = p_c - p_1(w,-\ell) + p_s \,, \tag{4.2}$$

où T_m est la tension de la membrane, σ_s sa masse surfacique, p_c la pression acoustique dans la cavité arrière, $p_1(w,-\ell)$ la pression acoustique sur l'avant de la membrane et p_s la force électrique par unité de surface (supposée uniforme) appliquée sur la membrane en régime harmonique $e^{i\omega t}$. La pression acoustique p_c est écrite en fonction du déplacement de la membrane sous la forme,

$$p_c = i\,\omega S_m Z_c \xi \,, \tag{4.3}$$

où $S_m = \pi a_1^2$ est la surface de la membrane et Z_c l'impédance acoustique de la charge acoustique à l'arrière de la membrane qui traduit l'action du film d'air entre l'électrode arrière et la membrane, compte tenu des trous de l'électrode et du volume de la cavité arrière. L'impédance Z_c ainsi que les paramètres caractéristiques de la membrane (tension T_m, masse surfacique σ_s) sont évalués à partir d'un modèle de microphone à constantes localisées [20] rappelé en Annexe I.

Finalement, en reportant l'expression (4.3) dans l'équation (4.2), il vient,

$$\left(T_m \Delta_w + \omega^2 \sigma_s - i\,\omega S_m Z_c\right)\xi(w) = -p_1(w,-\ell) + p_s \,, \tag{4.4}$$

où l'impédance acoustique Z_c est donnée par l'expression (I.1).

ii. Equation de propagation dans le domaine $\mathcal{D}_1$, théorème de Green

Le mouvement de la membrane du microphone est source d'un champ acoustique supposé axisymétrique à l'intérieur de la cavité frontale. Sous forme différentielle, le problème dans le domaine $\mathcal{D}_1$ s'écrit :

$$\begin{cases} \left(\Delta + k_0^2\right) p_1(w,z) = 0, & \forall (w,z) \in \mathcal{D}_1, & \text{(4.5.a)} \\ \partial_z p_1 = \omega^2 \rho_0 \xi, & w \in (0,a_1),\ z = -\ell, & \text{(4.5.b)} \\ \begin{cases} p_1 = p_2, \\ \partial_z p_1 = \partial_z p_2, \end{cases} & w \in (0,a_1),\ z = 0, & \begin{matrix}\text{(4.5.c)} \\ \text{(4.5.d)}\end{matrix} \\ \partial_w p_1 = 0, & w = a_1,\ z \in (-\ell,0), & \text{(4.5.e)} \end{cases}$$

où $k_0 = \omega / c_0$ désigne le nombre d'onde, avec ω la pulsation et c_0 la célérité adiabatique.

Le champ de pression acoustique $p_1(\vec{r})$ dans le domaine $\mathcal{D}_1$ peut s'écrire sous la forme intégrale suivante [3] (le facteur $e^{i\omega t}$ est omis)

$$p_1(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{D}_1} G(\vec{r},\vec{r}_0) f(\vec{r}_0)\, d\mathcal{D}_1 + \iint_S \left[G(\vec{r},\vec{r}_0)\,\partial_n p_1(\vec{r}_0) - p_1(\vec{r}_0)\,\partial_n G(\vec{r},\vec{r}_0)\right] dS \,, \tag{4.6}$$

où ∂_n représente la dérivée suivant la normale locale à la surface S orientée vers l'extérieur du domaine, où la fonction $f(\vec{r}_0)$ représente l'action de sources qui seraient réparties à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}_1$ (dans le cas présent $f(\vec{r}_0) = 0$), et où la fonction $G(\vec{r},\vec{r}_0)$ est une fonction de Green satisfaisant à l'équation

$$\left(\Delta + k_0^2\right) G(\vec{r},\vec{r}_0) = -\delta(\vec{r},\vec{r}_0) \,, \quad \forall \vec{r} \in \mathcal{D}_1 \,, \tag{4.7}$$

où $\delta(\vec{r},\vec{r}_0)$ représente la distribution de Dirac, satisfaisant à des conditions aux limites *a priori*

quelconques sur la surface S. La fonction de Green est ici choisie de manière à satisfaire les conditions aux frontières suivantes :

$$\begin{cases} \partial_n G(\vec{r},\vec{r}_0) = -\partial_{z_0} G(\vec{r},\vec{r}_0) = 0, & w\in(0,a_1),\ z=-\ell, \quad (4.8.a) \\ G(\vec{r},\vec{r}_0) = 0, & w\in(0,a_1),\ z=0, \quad (4.8.b) \\ \partial_n G(\vec{r},\vec{r}_0) = \partial_{w_0} G(\vec{r},\vec{r}_0) = 0, & w=a_1,\ z\in(-\ell,0). \quad (4.8.c) \end{cases}$$

Ces conditions permettent d'exprimer l'intégrale de surface (4.6), soit la pression acoustique en tout point du domaine $\mathcal{D}_1$, de la manière suivante :

$$p_1(\vec{r}) = -\iint_{S_m} G(\vec{r},\vec{r}_m)\,\partial_{z_m} p_1(\vec{r}_m)\,dS_m - \iint_{S_0} p_1(\vec{r}_0)\,\partial_{z_0} G(\vec{r},\vec{r}_0)\,dS_0 , \tag{4.9}$$

où $S_m = S_0 = \pi a_1^2$ désignent respectivement les surfaces de la membrane et de l'interface avec le milieu $\mathcal{D}_2$.

iii. Equation de propagation dans le domaine $\mathcal{D}_2$, domaine de Laplace

La pression acoustique $p_2(w,z)$ dans le domaine $\mathcal{D}_2$ répond au problème suivant :

$$\begin{cases} \left(\Delta + k_0^2\right) p_2(w,z) = 0, & w\in(0,a_2),\ z\in(0,\infty), \quad (4.10.a) \\ \partial_z p_2 = 0, & w\in(a_1,a_2),\ z=0, \quad (4.10.b) \\ \begin{cases} \partial_z p_2 = \partial_z p_1, \\ p_2 = p_1, \end{cases} & w\in(0,a_1),\ z=0, \quad \begin{matrix}(4.10.c)\\(4.10.d)\end{matrix} \\ \begin{cases} \partial_w p_3 = \partial_w p_2, \\ p_3 = p_2, \end{cases} & w=a_2,\ z\in(0,\infty), \quad \begin{matrix}(4.10.e)\\(4.10.f)\end{matrix} \\ p_2 \text{ bornée}, & w=0, \quad (4.10.g) \\ \text{condition de Sommerfeld.} & \quad (4.10.h) \end{cases}$$

En coordonnées cylindriques, l'équation de Helmholtz (4.10.a) s'écrit

$$\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial w}\left(w\frac{\partial p_2}{\partial w}\right) + \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} + k_0^2 p_2 = 0 . \tag{4.11}$$

En appliquant la transformée de Laplace dans le domaine $z\in(0,\infty)$ considéré (transformée de Laplace unilatérale), définie par

$$\hat{P}_2(w,s) = \int_0^\infty p_2(w,z)\,e^{-sz}\,dz , \tag{4.12}$$

où la notation « majuscule, chapeau » désigne une fonction dans le domaine de Laplace, s la variable de Laplace, et en utilisant la propriété générale

$$\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial z^2} = \int_0^\infty \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} e^{-sz}\,dz = s^2\,\hat{F} - s\,f(z\to 0^+) - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z\to 0^+} , \tag{4.13}$$

où f est une fonction quelconque de z et $\hat{F}$ sa transformée de Laplace, l'équation (4.11) prend la forme

$$\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial w}\left(w\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w}\right)+\chi^2\hat{P}_2=\left(\frac{\partial p_2}{\partial z}\right)_{(z\to 0^+)}+s\,p_2(w,z\to 0^+)\,, \tag{4.14}$$

avec

$$\chi^2=s^2+k_0^2\,. \tag{4.15}$$

iv. Equation de propagation dans le domaine $\mathcal{D}_3$, domaine de Laplace

La pression acoustique $p_3(w,z)$ dans le domaine $\mathcal{D}_3$ répond au problème suivant :

$$\begin{cases} \left(\Delta+k_0^2\right)p_3(w,z)=0, & w\in(a_2,\infty),\ z\in(-\infty,\infty), & \text{(4.16.a)}\\ \partial_w p_3=0, & w=a_2,\ z\in(-\infty,0), & \text{(4.16.b)}\\ \begin{cases}\partial_w p_3=\partial_w p_2,\\ p_3=p_2,\end{cases} & w=a_2,\ z\in(0,\infty), & \begin{matrix}\text{(4.16.c)}\\ \text{(4.16.d)}\end{matrix}\\ \text{condition de Sommerfeld}\,. & & \text{(4.16.e)} \end{cases}$$

En coordonnées cylindriques l'équation de Helmholtz (4.16.a) s'écrit

$$\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial w}\left(w\frac{\partial p_3}{\partial w}\right)+\frac{\partial^2 p_3}{\partial z^2}+k_0^2 p_3=0\,. \tag{4.17}$$

En appliquant à la pression $p_3(w,z)$ la transformée de Laplace dans le domaine $z\in(-\infty,\infty)$ considéré (transformée de Laplace bilatérale) définie par

$$\hat{P}_3(w,s)=\int_{-\infty}^{\infty} p_3(w,z)e^{-sz}dz\,, \tag{4.18}$$

et en utilisant la propriété,

$$\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial z^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}e^{-sz}dz=s^2\,\hat{F}\,, \tag{4.19}$$

f étant une fonction quelconque de z et $\hat{F}$ sa transformée de Laplace, l'équation de propagation (4.17) s'écrit dans le domaine de Laplace

$$\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial w}\left(w\frac{\partial \hat{P}_3}{\partial w}\right)+\chi^2\hat{P}_3=0\,, \tag{4.20}$$

où χ est donné par la relation (4.15).

4.2.2 Solutions des équations fondamentales

Le problème à résoudre est constitué des équations (4.4), (4.9) et (4.5.b-e) compte tenu des équations (4.7, 4.8.a-c), (4.10.a-h) compte tenu des équations (4.14) et (4.15), (4.16.a-e) compte tenu de l'équation (4.20). Les solutions sont présentées ci-dessous en deux étapes ; d'abord domaine par domaine en laissant de coté les conditions d'interfaces entre les domaines, puis en imposant ces conditions d'interfaces (§ 4.2.3).

i. Champ de déplacement de la membrane

Le mouvement de la membrane est régi par l'équation (4.4) qui peut être écrite sous la forme

$$T_m\left(\Delta_w+k_w^2\right)\eta=-[\,p_1(w,-\ell)-p_1(a_1,-\ell)]+[\,p_e-p_1(a_1,-\ell)]\,, \tag{4.21}$$

avec

$$k_w^2=(\omega^2\sigma_s-j\omega S_m Z_c)/T_m\,. \tag{4.22}$$

où le facteur $p_1(a_1,-\ell)$ a été ajouté et retranché dans le second membre pour assurer la compatibilité des champs de pression et de déplacement en $z=-\ell$ (cf. Eq. (2.59)).

La solution pour le déplacement de la membrane satisfaisant à la condition de Dirichlet en $w=a_1$ peut être exprimée de la manière suivante (somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre) :

$$\xi(w)=B_0\left(1-\frac{J_0(k_w w)}{J_0(k_w a_1)}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\Psi_n(w)\,, \tag{4.23}$$

où $J_0(x)$ est la fonction de Bessel cylindrique de première espèce d'ordre 0, $\Psi_n(w)$ les fonctions propres orthonormées de la membrane

$$\Psi_n(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_1\,J_1(j_n)}J_0\left(j_n\frac{w}{a_1}\right)\,, \tag{4.24}$$

j_n représentant les zéros de la fonction $J_0(x)$ (le premier étant noté j_0) et où les coefficients B_0 et ξ_n sont donnés par les expressions

$$\begin{cases} B_0=\dfrac{p_e-p_1(a_1,-\ell)}{T\,k_w^2}, & \text{(4.25.a)}\\[2ex] \xi_n=\dfrac{\langle\,p_1(a_1,-\ell)-p_1(w,-\ell)|\Psi_n(w)\rangle}{T_m(k_w^2-(j_n/a_1)^2)}, & \text{(4.25.b)} \end{cases}$$

où le numérateur de l'expression du coefficient ξ_n représente le produit scalaire

$$\langle\,p_1(a_1,-\ell)-p_1(w,-\ell)|\Psi_n(w)\rangle=2\pi\int_0^{a_1}[\,p_1(a_1,-\ell)-p_1(w,-\ell)]\Psi_n(w)\,w\,dw\,. \tag{4.26}$$

ii. Champ de pression dans le domaine $\mathcal{D}_1$, fonction de Green, problème aux valeurs propres

La fonction de Green choisie (domaine $\mathcal{D}_1$) est solution du problème décrit par l'équation (4.7) et des conditions aux frontières (4.8.a-c), à savoir, en coordonnées cylindriques,

$$\begin{cases} \left(\Delta_w+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)G(w,z\,;w_0,z_0)=-\delta(w-w_0)\,\delta(z-z_0) \quad \forall(w,z)\in\mathcal{D}_1, & \text{(4.27.a)}\\[2ex] \partial_n G(w,z\,;w_0,z)=-\partial_{z_0}G(w,z\,;w_0,z_0)=0, \qquad w\in(0,a_1),\ z=-\ell\,, & \text{(4.27.b)}\\ G(w,z\,;w_0,z)=0, \qquad w\in(0,a_1),\ z=0, & \text{(4.27.c)}\\ \partial_n G(w,z\,;w_0,z)=\partial_{w_0}G(w,z\,;w_0,z)=0, \qquad w=a_1,\ z\in(-\ell,0). & \text{(4.27.d)} \end{cases}$$

où $\Delta_w=\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial}{\partial w}\left(w\dfrac{\partial}{\partial w}\right)$.

La solution de ce problème est recherchée sous la forme d'un développement sur la base des fonctions propres orthonormées $\Xi_n(w)$ du cylindre [3, § 6.1.4], soit

$$G(w,z;w_0,z_0)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z,z_0)\,\Xi_n(w_0)\,\Xi_n(w)\,, \tag{4.28}$$

où les fonctions propres $\Xi_n(w)$ s'écrivent

$$\Xi_n(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_1\,J_0(\gamma_n)}J_0\left(\gamma_n\frac{w}{a_1}\right), \tag{4.29}$$

les coefficients γ_n désignant les zéros de la dérivée première de la fonction de Bessel J_0 (soit $J'_0(\gamma_n)=0$, le premier étant noté γ_0).

En reportant la solution (4.28) dans l'équation (4.27.a) et compte tenu des propriétés des fonctions propres $\Xi_n(w)$, les coefficients $g_n(z,z_0)$ répondent au problème suivant :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+k_{zn}^2\right)g_n(z,z_0)=-\delta(z-z_0), & z\in(-\ell,0), & \text{(4.30.a)}\\ \partial_z g_n(z,z_0)=0, & z=-\ell, & \text{(4.30.b)}\\ g_n(z,z_0)=0, & z=0. & \text{(4.30.c)} \end{cases}$$

Ces coefficients $g_n(z,z_0)$ représentent une fonction de Green à une dimension donnée par [3, § 6.1.4]

$$g_n(z,z_0)=\frac{-\cos[k_{zn}(z_<+\ell)+\varphi_{-\ell}]\cos[k_{zn}z_>-\varphi_0]}{k_{zn}\sin(k_{zn}\ell+\varphi_{-\ell}+\varphi_0)}\,, \tag{4.31}$$

où

$$k_{zn}^2=k_0^2-(\gamma_n/a_1)^2\,, \tag{4.32}$$

et où $\varphi_{-\ell}=0$ et $\varphi_0=\pi/2$ (compte tenu des conditions 4.30.b et 4.30.c), $z_>=z$ et $z_<=z_0$ si $z>z_0$, et inversement si $z<z_0$. Ainsi, les coefficients du développement (4.28) peuvent être écrits

$$\begin{cases} g_n(z,z_0)=\dfrac{-\cos[k_{zn}(z_0+\ell)]\sin(k_{zn}z)}{k_{zn}\cos(k_{zn}\ell)}, & z>z_0, & \text{(4.33.a)}\\ g_n(z,z_0)=\dfrac{-\cos[k_{zn}(z+\ell)]\sin(k_{zn}z_0)}{k_{zn}\cos(k_{zn}\ell)}, & z<z_0. & \text{(4.33.b)} \end{cases}$$

En reportant les équations (4.28), (4.33.a) ainsi que la dérivée selon z_0 de l'équation (4.33.b) dans la formulation intégrale (4.9), la pression $p_1(w,z)$ satisfaisant à la condition (4.5.e) s'écrit

$$\begin{aligned} p_1(w,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(&\frac{\cos[k_{zn}(z+\ell)]}{\cos(k_{zn}\ell)}\iint_{S_0} p_1(w_0,0)\,\Xi_n(w_0)\,dS_0\\ &+\frac{\sin(k_{zn}z)}{k_{zn}\cos(k_{zn}\ell)}\iint_{S_m}\partial_{z_m}p_1(w_m,-\ell)\,\Xi_n(w_m)\,dS_m\Bigg)\Xi_n(w). \end{aligned} \tag{4.34}$$

iii. Champ de pression dans le domaine $\mathcal{D}_2$

La pression acoustique $p_2(w,z)$ dans le domaine $\mathcal{D}_2$ répond au problème (4.10), l'équation de propagation dans le domaine de Laplace étant donnée par l'équation (4.14) à savoir

$$\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial w}\left(w\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w}\right)+\chi^2\,\hat{P}_2=\left(\frac{\partial p_2}{\partial z}\right)_{(z\to 0^+)}+s\,p_2(w,z\to 0^+)\,.$$

Les termes du membre de droite ($z\to 0^+$) sont exprimés sous la forme d'un développement sur la base des fonctions propres orthonormées

$$\Phi_n(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_2\,J_0(\gamma_n)}J_0\left(\gamma_n\frac{w}{a_2}\right)\,, \tag{4.35}$$

avec $J'_0(\gamma_n)=0$:

$$p_2(w,z\to 0^+)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n\Phi_n(w)\,, \tag{4.36}$$

et

$$\left(\frac{\partial p_2}{\partial z}\right)_{(z\to 0^+)}=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\Phi_n(w)\,, \tag{4.37}$$

h_n et f_n étant des coefficients inconnus du problème.

La solution générale de l'équation différentielle (4.14) rappelée ci-dessus, sans second membre, finie à l'origine $w=0$, est de la forme

$$\hat{P}_2(w,s)=C_1(s)J_0(\chi w)\,. \tag{4.38}$$

La solution particulière avec second membre est de la forme

$$\hat{P}_2(w,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n+s\,h_n}{\chi^2-(\gamma_n/a_2)^2}\Phi_n(w)\,, \tag{4.39}$$

où $\chi^2=s^2+k_0^2$ (relation 4.15).

La solution générale s'écrit alors

$$\hat{P}_2(w,s)=C_1(s)J_0(\chi w)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n+s\,h_n}{s^2-\chi_n^2}\Phi_n(w)\,, \tag{4.40}$$

où le coefficient χ_n^2 est donné par

$$\chi_n^2=(\gamma_n/a_2)^2-k_0^2\,. \tag{4.41}$$

iv. Champ de pression dans le domaine $\mathcal{D}_3$

La pression acoustique $p_3(w,z)$ dans le domaine $\mathcal{D}_3$ répond au problème (4.16), l'équation de propagation dans le domaine de Laplace étant donnée par l'équation (4.20) à savoir

$$\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial w}\left(w\frac{\partial \hat{P}_3}{\partial w}\right)+\chi^2\,\hat{P}_3=0\,.$$

La solution de l'équation (4.20) qui satisfait à la condition de Sommerfeld (onde à caractère

divergente) s'écrit

$$\hat{P}_3(w,s)=C_2(s)\,H_0^{(2)}(\chi w)\,, \tag{4.42}$$

où $H_0^{(2)}$ est la fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre 0.

Le facteur $C_2(s)$ peut être exprimé en fonction du coefficient

$$P(s)=\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial p_3}{\partial w}\right)_{(w=a_2)} e^{-sz}\,dz\,, \tag{4.43}$$

en écrivant la relation générale

$$\left(\frac{\partial \hat{P}_3}{\partial w}\right)_{(w=a_2)}=\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{\partial p_3}{\partial w}\right)_{(w=a_2)} e^{-sz}\,dz+\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial p_3}{\partial w}\right)_{(w=a_2)} e^{-sz}\,dz\,, \tag{4.44}$$

soit, compte tenu de la condition (Eq. (4.16.b), $\partial_w p_3=0$ pour $z\in(-\infty,0)$ et $w=a_2$),

$$\left(\frac{\partial \hat{P}_3}{\partial w}\right)_{(w=a_2)}=\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial p_3}{\partial w}\right)_{(w=a_2)} e^{-sz}\,dz=P(s)\,. \tag{4.45}$$

Il vient donc

$$C_2(s)=\frac{-P(s)}{\chi H_1^{(2)}(\chi a_2)}\,, \tag{4.46}$$

d'où l'expression retenue pour la solution (4.42) :

$$\hat{P}_3(w,s)=\frac{-P(s)\,H_0^{(2)}(\chi w)}{\chi H_1^{(2)}(\chi a_2)}\,. \tag{4.47}$$

4.2.3 Conditions aux interfaces

Les solutions données précédemment ne prennent pas en compte les conditions d'interfaces entre les différents domaines d'études. Ces conditions sont traitées ci-dessous : elles conduisent à un système d'équations dont les inconnues sont les constantes B_0, ξ_n, f_n et h_n.

i. Expression de la pression dans le domaine $\mathcal{D}_1$

En utilisant la condition de continuité des vitesses (4.5.b) ($\partial_z p_1=\omega^2\rho_0\xi$ pour $w\in(0,a_1)$ et $z=-\ell$) et la condition de continuité des pressions (4.5.c) ($p_1=p_2$ pour $w\in(0,a_1)$ et $z=0$), l'expression (4.34) exprimant la pression dans le domaine $\mathcal{D}_1$ prend la forme suivante

$$\begin{aligned} p_1(w,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(&\frac{\cos[k_{zn}(z+\ell)]}{\cos(k_{zn}\ell)}\langle p_2(w_0,0)|\Xi_n(w_0)\rangle \\ &+\rho_0\omega^2\frac{\sin(k_{zn}z)}{k_{zn}\cos(k_{zn}\ell)}\langle\xi(w_0)|\Xi_n(w_0)\rangle\Bigg)\Xi_n(w), \end{aligned} \tag{4.48}$$

où (d'après les équations (4.29), (4.36), (4.35) et (E.4 de l'Annexe E))

$$\begin{aligned}\langle p_2(w_0,0)|\Xi_n(w_0)\rangle &= 2\pi\int_0^{a_1}\Xi_n(w_0)\,p_2(w_0,0)\,w_0\,dw_0\\ &= \frac{a_1}{a_2}\delta_{n0}h_0+\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{2\gamma_\mu(a_1/a_2)^2}{(\gamma_\mu a_1/a_2)^2-(\gamma_n)^2}\frac{J_1(\gamma_\mu a_1/a_2)}{J_0(\gamma_\mu)}h_\mu,\end{aligned} \tag{4.49}$$

avec $\delta_{n0}=1$ si $n=0$ et $\delta_{n0}=0$ sinon,

et où (d'après les équations (4.23), (4.24), (4.29) et (E.4 de l'Annexe E))

$$\begin{aligned}\langle \xi(w_0)|\Xi_n(w_0)\rangle &= 2\pi\int_0^{a_1}\Xi_n(w_0)\,\eta(w_0)\,w_0\,dw_0\\ &= \left(\sqrt{\pi}\,a_1\,\delta_{n0}-\frac{J_1(k_w a_1)}{J_0(k_w a_1)}\frac{2\sqrt{\pi}\,k_w}{k_w^2-(\gamma_n/a_1)^2}\right)B_0+2\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{j_\mu}{j_\mu^2-\gamma_n^2}\xi_\mu.\end{aligned} \tag{4.50}$$

ii. Interface entre le domaine $\mathcal{D}_1$ et la membrane, expression des constantes d'intégration B_0 et ξ_n

En $z=-\ell$, la pression acoustique s'écrit d'après l'équation (4.48)

$$p_1(w,-\ell)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\langle p_2(w_0,0)|\Xi_n(w_0)\rangle}{\cos(k_{zn}\ell)}-\rho_0\omega^2\frac{\tan(k_{zn}\ell)\langle\eta(w_0)|\Xi_n(w_0)\rangle}{k_{zn}}\right)\Xi_n(w)\,. \tag{4.51}$$

En reportant cette solution dans la relation (4.25.a), la constante B_0 s'écrit alors

$$B_0=\frac{p_e}{T_m k_w^2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_1 T_m k_w^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\langle p_2(w_0,0)|\Xi_n(w_0)\rangle}{\cos(k_{zn}\ell)}+\rho_0\omega^2\frac{\tan(k_{zn}\ell)\langle\xi(w_0)|\Xi_n(w_0)\rangle}{k_{zn}}\right). \tag{4.52}$$

De même, les coefficients ξ_n définis par l'équation (4.25.b) s'écrivent, en faisant usage de l'expression (4.51) (cf. Annexe J.1.i), sous la forme

$$\xi_n=\frac{2}{T_m(k_w^2-(j_n/a_1)^2)}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{\langle p_2(w_0,0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle}{\cos(k_{z\mu}\ell)}-\rho_0\omega^2\frac{\tan(k_{z\mu}\ell)\langle\xi(w_0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle}{k_{z\mu}}\right)\left(\frac{1}{j_n}-\frac{j_n}{j_n^2-\gamma_\mu^2}\right). \tag{4.53}$$

Les équations (4.52) et (4.53) constituent les deux premières équations du problème faisant intervenir les inconnues B_0, ξ_n, et h_n.

iii. Interface entre les domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, expression des constantes f_n

Il reste à assurer la continuité des vitesses entre les domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, condition (4.5.d), soit

$$\partial_z p_1=\partial_z p_2\,,\quad \text{pour } w\in(0,\,a_1)\,,\ z=0\,.$$

En faisant usage de la relation (4.48), la dérivée suivant z de la pression dans le domaine $\mathcal{D}_1$ s'écrit

$$\begin{aligned}\partial_z p_1(w,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(&\frac{-k_{zn}\sin[k_{zn}(z+\ell)]}{\cos(k_{zn}\ell)}\langle p_2(w_0,0)|\Xi_n(w_0)\rangle\\ &+\rho_0\omega^2\frac{\cos(k_{zn}z)}{\cos(k_{zn}\ell)}\langle\xi(w_0)|\Xi_n(w_0)\rangle\Bigg)\Xi_n(w).\end{aligned} \tag{4.54}$$

En utilisant les relations (4.37) et (4.54), la condition (4.5.d) s'écrit alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho_0\omega^2}{\cos(k_{zn}\ell)}\langle\xi(w_0)|\Xi_n(w_0)\rangle-k_{zn}tg(k_{zn}\ell)\langle p_2(w_0,0)|\Xi_n(w_0)\rangle\right)\Xi_n(w)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\Phi_n(w), \tag{4.55}$$

qui en projetant sur la base des fonctions propres orthonormées $\Phi_\mu(w)$ devient (cf Annexe J.1.ii)

$$\begin{cases} f_0=\left(\rho_0\omega^2\dfrac{\langle\xi(w_0)|\Xi_0(w_0)\rangle}{\cos(k_0\ell)}-k_0\tan(k_0\ell)\langle p_2(w_0,0)|\Xi_0(w_0)\rangle\right)\dfrac{a_1}{a_2}, & \mu=0, \\ f_\mu=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho_0\omega^2\frac{\langle\xi(w_0)|\Xi_n(w_0)\rangle}{\cos(k_{zn}\ell)}-k_{zn}\tan(k_{zn}\ell)\langle p_2(w_0,0)|\Xi_n(w_0)\rangle\right) & \\ \qquad\cdot\dfrac{2\gamma_\mu(a_1/a_2)^2}{(\gamma_\mu a_1/a_2)^2-(\gamma_n)^2}\dfrac{J_1(\gamma_\mu a_1/a_2)}{J_0(\gamma_\mu)}, & \mu\geq 1. \end{cases} \tag{4.56}$$

L'équation (4.56) constitue ainsi la troisième équation du problème faisant apparaître les inconnues B_0, ξ_n, f_n et h_n.

iv. Interface entre les domaines $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$

Les champs de pression dans les domaines $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont liés par l'intermédiaire des conditions (4.10.e) et (4.10.f) exprimant la continuité des pressions et des vitesses à l'interface, soit

$$\begin{cases} \partial_w p_3=\partial_w p_2, \\ p_3=p_2, \end{cases} \qquad \text{pour } w=a_2,\ z\in(0,\infty).$$

Les expressions des pressions $\hat{P}_2(w,s)$ et $\hat{P}_3(w,s)$ dans le domaine de Laplace sont données par les relations (4.40) et (4.47) rappelées ci dessous

$$\hat{P}_2(w,s)=C_1(s)J_0(\chi w)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n+s\,h_n}{s^2-\chi_n^2}\Phi_n(w),$$

$$\hat{P}_3(w,s)=\frac{-P(s)H_0^{(2)}(\chi w)}{\chi H_1^{(2)}(\chi a_2)}.$$

où les grandeurs h_n, f_n et $P(s)$ sont définies respectivement par les équations (4.36), (4.37) et (4.43).

En utilisant la condition d'interface (4.10.e) et l'équation (4.43), il vient

$$\left(\frac{\partial\hat{P}_2}{\partial w}\right)_{w=a_2}=\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial p_2}{\partial w}\right)_{w=a_2}e^{-sz}dz=\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial p_3}{\partial w}\right)_{w=a_2}e^{-sz}dz=P(s), \tag{4.57}$$

relation qui permet le calcul de la fonction inconnue $C_1(s)$ qui apparaît dans la solution $\hat{P}_2(w,s)$ (en remarquant que $\partial_w(\Phi_n(w))_{w=a_2}=0$, $\forall n$). Ainsi, la pression dans le domaine de Laplace $\hat{P}_2(w,s)$ s'écrit

$$\hat{P}_2(w,s)=\frac{-P(s)J_0(\chi w)}{\chi J_1(\chi a_2)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n+s\,h_n}{s^2-\chi_n^2}\Phi_n(w). \tag{4.58}$$

Cette expression de la transformée de Laplace de la pression dans le domaine $\mathcal{D}_2$ nécessite une

condition supplémentaire assurant que la fonction est analytique, soit parfaitement définie y compris lorsque $s=\chi_n$ (absence de pôle). En multipliant la relation (4.58) par $J_1(\chi a_2)$, en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel et en considérant la limite $s\to\chi_n$ il est possible de montrer que cette condition se traduit par la relation suivante (cf. Annexe J.1.iii)

$$2\sqrt{\pi}\,P(\pm\chi_n)=f_n\pm\chi_n h_n\,, \qquad \forall\, n\geq 0\,. \tag{4.59}$$

Il reste à présent à assurer la continuité des pressions en $w=a_2$, $z>0$, (condition 4.10.f) soit

$$\lim_{w\to a_2-} p_2(w,z)=\lim_{w\to a_2+} p_3(w,z)\,, \qquad \forall\, z\in(0,\infty)\,. \tag{4.60}$$

En effectuant une transformation de Laplace unilatérale de l'expression (4.60) il vient

$$\lim_{w\to a_1-}\int_0^\infty p_2(w,z)e^{-sz}dz=\lim_{\rho\to a_1+}\int_0^\infty p_3(w,z)e^{-sz}dz\,, \tag{4.61}$$

soit d'après les relations (4.12) et (4.18)

$$\lim_{w\to a_2-}\hat{P}_2(w,s)=\lim_{w\to a_2+}\hat{P}_3(w,s)-N(s)\,, \tag{4.62}$$

où

$$N(s)=\lim_{w\to a_2+}\int_{-\infty}^0 p_3(w,z)e^{-sz}dz\,, \tag{4.63}$$

est une fonction analytique dans le demi plan complexe négatif.

Le report des expressions (4.47) et (4.58) dans l'équation (4.62) conduit à la relation

$$N(s)-\frac{P(s)J_0(\chi a_2)}{\chi J_1(\chi a_2)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n+s\,h_n}{s^2-\chi_n^2}\Phi_n(a_2)=\frac{-P(s)H_0^{(2)}(\chi a_2)}{\chi H_1^{(2)}(\chi a_2)}\,, \tag{4.64}$$

avec $a_2\,\Phi_n(a_2)=1/\sqrt{\pi}$, soit en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel (E.7) et (E.8)

$$N(s)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n+s\,h_n}{s^2-\chi_n^2}\frac{1}{a_2\sqrt{\pi}}=\frac{2\;P(s)}{\chi^2\,a_2\,K(s)}\,, \tag{4.65}$$

avec

$$K(s)=-j\pi J_1(\chi a_2)H_1^{(2)}(\chi a_2)\,. \tag{4.66}$$

Cette fonction peut être décomposée sous la forme [58]

$$K(s)=\frac{K_P(s)}{K_N(s)}\,, \tag{4.67}$$

avec $K_P(s)K_N(-s)=1\quad\forall\, s\in\mathbb{C}$ et $K_P(s)\approx 1/\sqrt{s}$ quand $|s|\to\infty$, la fonction $K_P(s)$ n'ayant ni zéro ni singularité dans le demi-plan complexe positif et la fonction $K_N(s)$ n'ayant ni zéro ni singularité dans le demi-plan complexe négatif.

De manière à pouvoir appliquer le théorème de Liouville, l'équation (4.65) est écrite sous la forme équivalente [56, 57 et 58],

$$\frac{(s-jk)N(s)}{K_N(s)}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n-f_n/\chi_n}{s+\chi_n}\frac{1}{a_2\sqrt{\pi}}\left\{\frac{s-jk_0}{K_N(s)}+\frac{\chi_n+jk_0}{K_N(-\chi_n)}\right\}+\frac{s-jk_0}{2K_N(s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n+f_n/\chi_n}{s-\chi_n}\frac{1}{a_2\sqrt{\pi}}$$
$$=\frac{2P(s)}{a_2(s+jk_0)K_P(s)}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi_n+jk_0}{s+\chi_n}\left(h_n-f_n/\chi_n\right)\frac{1}{a_2\sqrt{\pi}}K_p(\chi_n). \tag{4.68}$$

D. S. Jones [58] a montré que les membres de gauche et de droite de cette équation sont analytiques et tendent vers zéro lorsque $|s|\to\infty$, ceci respectivement dans les demis plans négatif et positif. Par suite ils s'annulent partout d'après le théorème de Liouville et, en écrivant la nullité du membre de droite, il vient :

$$\frac{2P(s)}{(s+jk_0)K_P(s)}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{jk_0+\chi_n}{s+\chi_n}\left(h_n-f_n/\chi_n\right)K_p(\chi_n)=0\ , \tag{4.69}$$

soit

$$\frac{jP(s)}{k_0(s+jk_0)K_P(s)K_P(jk_0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n-\beta_n}{s+\chi_n}\ , \tag{4.70}$$

avec

$$\begin{cases}\alpha_n=-\dfrac{jk_0+\chi_n}{4jk_0\sqrt{\pi}}\dfrac{K_P(\chi_n)}{K_P(jk_0)}\dfrac{1}{\chi_n}f_n, & \text{(4.71.a)}\\ \beta_n=-\dfrac{jk_0+\chi_n}{4jk_0\sqrt{\pi}}\dfrac{K_P(\chi_n)}{K_P(jk_0)}h_n. & \text{(4.71.b)}\end{cases}$$

En reportant les équations (4.71.a) et (4.71.b) dans l'équation (4.59) il vient la relation

$$P(\chi_n)=\frac{2jk_0}{jk_0+\chi_n}\frac{K_P(jk_0)}{K_P(\chi_n)}\chi_n(\alpha_n+\beta_n)\ , \tag{4.72}$$

qui reportée dans l'équation (4.70) lorsque $s\to\chi_\mu$ conduit à la relation

$$\sum_{\substack{n=0\\n\neq\mu}}^{\infty}\frac{\beta_n}{\chi_n+\chi_\mu}+\left[1+\frac{(2\chi_\mu)^2}{[(jk_0+\chi_\mu)K_P(\chi_\mu)]^2}\right]\frac{\beta_\mu}{2\chi_\mu}=\sum_{\substack{n=0\\n\neq\mu}}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\chi_n+\chi_\mu}+\left[1-\frac{(2\chi_\mu)^2}{[(jk_0+\chi_\mu)K_P(\chi_\mu)]^2}\right]\frac{\alpha_\mu}{2\chi_\mu}\ , \tag{4.73}$$

définissant la quatrième équation nécessaire à la résolution du problème.

Les équations (4.52), (4.53), (4.56), (4.73) et (4.71.a et b) définissent ainsi un système d'équations dont les inconnues sont les constantes B_0, ξ_n, f_n et h_n.

4.2.4 Pression acoustique en champ lointain

Le calcul du champ de pression dans tout l'espace nécessite l'inversion des transformées de Laplace des expressions (4.58) dans le domaine $\mathcal{D}_2$ et (4.47) dans le domaine $\mathcal{D}_3$. En utilisant la méthode du col, Y. Ando montre [56] (cf. Annexe J.1.iv) que la transformée inverse de Laplace de l'expression (4.47) (domaine $\mathcal{D}_3$), soit l'opération

$$p_3(w,z)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{-P(s)H_0^{(2)}(\chi w)}{\chi H_1^{(2)}(\chi a_2)}e^{sz}ds\ , \tag{4.74}$$

s'écrit en effectuant les changements de variables

$$z = r\cos\theta \quad \text{et} \quad w = r\sin\theta \tag{4.75}$$

sous la forme asymptotique suivante :

$$p_3(r,\theta) \rightarrow \frac{k_0(1-\cos\theta)K_P(-jk_0\cos\theta)K_P(jk_0)}{j\pi\sin\theta\, H_1^{(2)}(a_2k_0\sin\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n - \beta_n}{\chi_n - jk_0\cos\theta} \frac{e^{jk_0r}}{r}, \qquad \text{pour } r \rightarrow \infty, \tag{4.76}$$

où les coefficients α_n et β_n sont des inconnues du système d'équations (4.52), (4.53), (4.56), (4.73) et (4.71.a et b) résolu en Annexe J.2 (ils sont liés aux constantes d'intégration f_n et h_n).

4.2.5 Evaluation théorique de la position du centre acoustique d'un microphone

La forme asymptotique (4.76) obtenue pour le champ de pression $p_3(r,\theta)$ ne permet pas une estimation de la position du centre acoustique à partir de la méthode classique utilisant le module du champ de pression acoustique. En effet, l'expression (4.76) montre que le module du champ de pression est proportionnel à $1/r$ ce qui conduirait à une position du centre acoustique du microphone en $r=0$. Y. Ando [56] propose de calculer la position du centre acoustique d'un tube semi-infini à paroi d'épaisseur non nulle (en l'absence de microphone) à partir de la phase du champ de pression $p_3(r,\theta)$. La méthode consiste à calculer le rapport des pressions acoustiques en deux points distincts, ici à l'arrière et à l'avant du microphone lorsque $r \rightarrow \infty$. La différence de chemins acoustiques parcourus à partir de la position du centre acoustique se traduit alors par une différence de phase ($-2k_0d_c$) entre les pressions, soit

$$\frac{p_3(r,\theta\rightarrow\pi^-)}{p_3(r,\theta\rightarrow 0^+)} = |\xi| e^{-j2k_0d_c}, \tag{4.77}$$

où d_c est l'abscisse du centre acoustique du microphone et où $|\xi|$ est le module du rapport. A noter que la position du centre acoustique d_c est ici donnée par rapport à $z=0$ contrairement à l'usage courant qui est de la donner par rapport à la position de la membrane, ceci dans le but d'obtenir des comparaisons objectives avec les résultats donnés par Y. Ando [56].

L'expression (4.76) peut être écrite de façon réduite sous la forme

$$p_3(r,\theta) \approx \Omega(\theta)\Gamma(r,\theta), \tag{4.78}$$

où

$$\begin{aligned} \Omega(\theta) &= jk_0(1-\cos\theta)\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n - \beta_n}{\chi_n - jk_0\cos\theta} \\ &= (\alpha_0 - \beta_0) + jk_0(1-\cos\theta)\sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n - \beta_n}{\chi_n - jk_0\cos\theta}, \end{aligned} \tag{4.79}$$

et

$$\Gamma(r,\theta) = -\frac{a_2K_P(-jk_0\cos\theta)K_P(jk_0)}{\pi\sin\theta\, H_1^{(2)}(a_2k_0\sin\theta)} \frac{e^{jk_0r}}{r}. \tag{4.80}$$

En utilisant la propriété $K_P(ik_0)K_P(-ik_0)=1$ [58] l'équation (4.77) s'écrit alors

$$\begin{aligned}\frac{p_3(r,\theta\to\pi^-)}{p_3(r,\theta\to 0^+)} &= \frac{\Omega(\theta\to\pi^-)}{\Omega(\theta\to 0^+)}\frac{\Gamma(r,\theta\to\pi^-)}{\Gamma(r,\theta\to 0^+)} \\ &= \frac{\Omega(\theta\to\pi^-)}{\Omega(\theta\to 0^+)}[K_P(jk_0)]^2 \\ &= \xi = |\xi| e^{-j2k_0 d_c},\end{aligned} \tag{4.81}$$

ce qui permet d'obtenir la position du centre acoustique à partir de l'équation

$$d_c = \frac{-1}{2k_0}\arctan\left(\frac{Im(\xi)}{Re(\xi)}\right). \tag{4.82}$$

La figure 4.2 présente la position du centre acoustique d'un microphone ½" Type 4180 calculée selon la méthode décrite précédemment (Eq. (4.82), trait discontinu) où l'équation (4.79) est calculée en considérant $N=5$ (cf. figure 4.3 montrant la convergence du calcul de la position du centre acoustique). La comparaison avec le centre acoustique analytique proposé par Y. Ando [56] pour un tube semi-infini à paroi d'épaisseur non nulle (où $a_2=6{,}6\,\text{mm}$ et $a_1/a_2=0{,}7$ tel un microphone ½" Type 4180, trait pointillé) montre que la prise en compte du microphone dans la modélisation n'apporte pas de correction majeure dans la détermination de la position du centre acoustique du microphone. A noter que les résultats analytiques proposés par Y. Ando [56] sont en adéquations avec des résultats expérimentaux obtenus à partir de mesures de phase du champ de pression acoustique à des distances d'observations de 30 et 80 cm, résultats publiés par le même auteur dans la référence [61]. Par ailleurs, la comparaison des résultats obtenus avec les données normalisées (position du centre acoustique relative à $z=0$, pour un microphone ½" Type 4180 [26], trait continu) montre des divergences, notamment en hautes fréquences. Ces divergences s'expliquent certainement par la méthode d'évaluation, soit : à partir de la phase du champ de pression acoustique pour le résultat analytique et à partir du module du champ de pression acoustique pour les données normalisées. Ces observations semblent être en accord avec les conclusions de certains auteurs [52] selon lesquelles la position du centre acoustique d'un transducteur dépend de la méthode de détermination. A notre connaissance, il n'existe pas de données expérimentales de centre acoustique de microphones ½" Type 4180 utilisant les signaux de phase comme méthode d'évaluation.

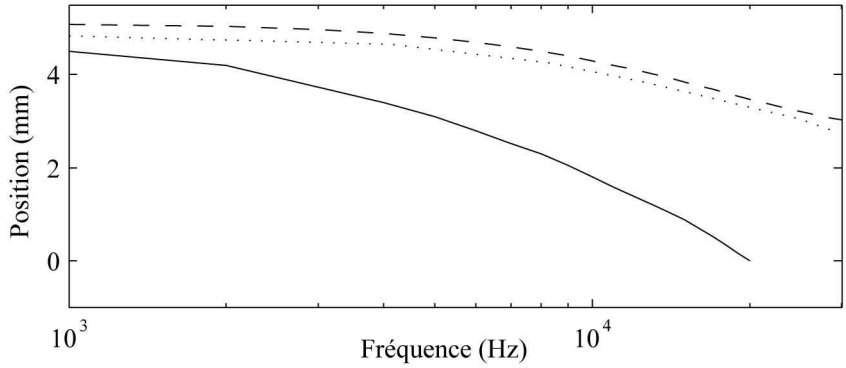


Figure 4.2. Position du centre acoustique d'un microphone ½" B&K Type 4180 : méthode analytique utilisant la phase du champ de pression acoustique à l'infini (Eq. (4.82), trait discontinu), méthode expérimentale utilisant le module du champ de pression acoustique (données normalisées [26], position du centre acoustique relative à $z=0$, trait continu) et position du centre acoustique d'un tube semi-infini à paroi d'épaisseur non nulle proposée par Y. Ando [56] (où $a_2=6{,}6\,\text{mm}$ et $a_1/a_2=0{,}7$ tel un microphone ½" Type 4180, trait pointillé).

La figure 4.4 permet de comparer, pour un microphone 1" Type 4160, la position du centre

acoustique calculée selon la méthode décrite précédemment (Eq. (4.82), trait discontinu) et celle obtenue par Y. Ando pour un tube semi-infini à paroi d'épaisseur non nulle (où $a_2 = 13{,}3\,\text{mm}$ et $a_1/a_2 = 0{,}7$ tel un microphone 1" Type 4160, [56], trait pointillé). Cette comparaison montre que les modifications apportées au modèle de Y. Ando conduisent à des corrections mineures. Sur cette même figure 4.4 sont également reportées les valeurs normalisées, qui diffèrent des précédentes, plus particulièrement en hautes fréquences ([26], trait continu) et les valeurs expérimentales obtenues par Jacobsen à partir de la phase de l'efficacité en champ libre du microphone ([52], points étoiles). Cette dernière détermination est inspirée de la référence [62] où les auteurs proposent de déterminer le centre acoustique d'un microphone à partir de la vitesse de groupe de la phase de son efficacité en champ libre.

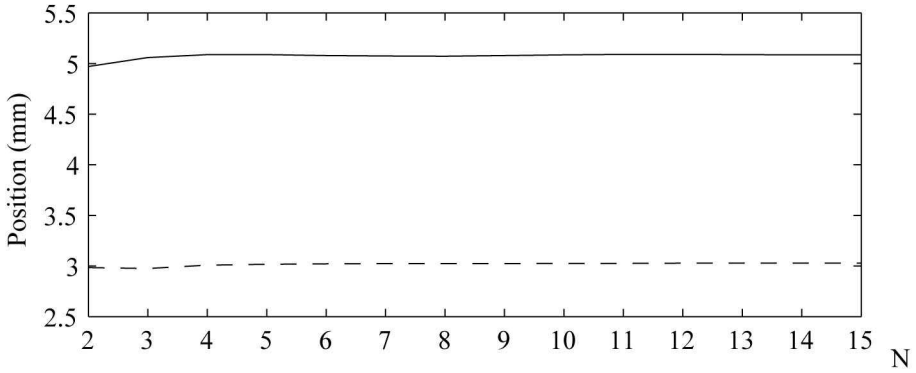


Figure 4.3. Etude de la convergence de l'équation (4.82) : position du centre acoustique d'un microphone ½" Type 4180 en fonction de l'ordre « N » à 1 kHz (trait continu) et 30 kHz (trait discontinu).

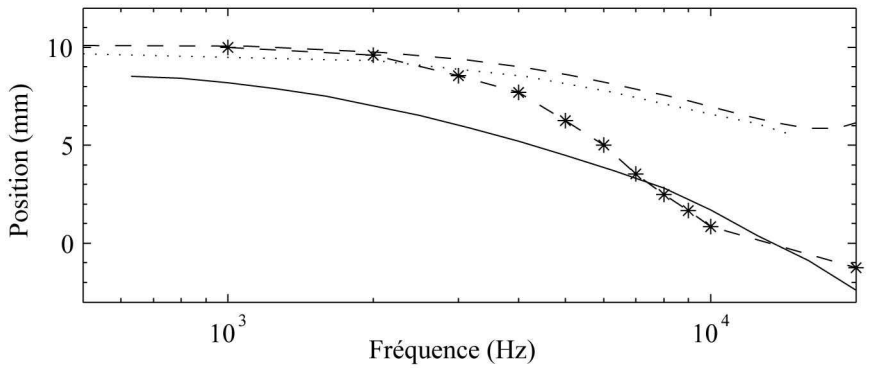


Figure 4.4. Position du centre acoustique d'un microphone 1" B&K Type 4160 : méthode analytique utilisant la phase du champ de pression acoustique à l'infini (Eq. (4.82), trait discontinu), méthode expérimentale utilisant le module du champ de pression acoustique (données normalisées [26], position du centre acoustique relative à $z = 0$, trait continu), méthode expérimentale utilisant la phase de l'efficacité du microphone en champ libre ([52], points étoiles) et position du centre acoustique d'un tube semi-infini à paroi d'épaisseur non nulle proposée par Y. Ando [56] (où $a_2 = 13{,}3\,\text{mm}$ et $a_1/a_2 = 0{,}7$ tel un microphone 1" Type 4160, trait pointillé).

Force est de constater que les différentes méthodes d'évaluations de la position du centre acoustique conduisent en général à des résultats différents. Dans le cadre de l'étalonnage des microphones en champ libre par la méthode de la réciprocité, une discussion du choix à faire concernant la méthode de détermination de la position du centre acoustique est présentée dans la référence [44] : l'auteur montre que l'utilisation de la position du centre acoustique obtenue en considérant les propriétés du module du champ de pression acoustique conduit à des efficacités en champ libre (en module) indépendantes de la distance entre l'émetteur et le récepteur lors de l'étalonnage (ce qui n'est pas le cas lorsque la position du centre acoustique utilisée est obtenue en

utilisant les propriétés de la phase du champ de pression acoustique). Il s'agit d'un argument en faveur d'une méthode utilisant le module du champ de pression acoustique pour déterminer la position du centre acoustique d'un microphone. C'est l'objet du paragraphe suivant que de présenter une nouvelle méthode expérimentale fondée sur ce principe.

4.3 Détermination expérimentale de la position du centre acoustique d'un microphone électrostatique

Dans la littérature du domaine [54,55], la position du centre acoustique d'un microphone électrostatique est obtenue expérimentalement à partir des mesures de l'impédance électrique de transfert $Z_E(f)$ entre un microphone émetteur et un récepteur (telle qu'elle est préconisée dans la méthode d'étalonnage par réciprocité, cf. § 3.3.1), pour différentes distances entre les deux transducteurs. Cette méthode nécessite trois couples de microphones et est caractérisée par les perturbations spécifiques à la méthode de la réciprocité (diaphonie, échos, bruits électrique et acoustique, cf. § 3.3.2).

La méthode présentée dans ce paragraphe a pour objectif la mesure du centre acoustique d'un microphone électrostatique à l'aide d'un couple unique « source-microphone ». Cette méthode permet de plus d'améliorer le rapport signal sur bruit. Elle s'appuie sur la procédure classique [54,55], qui suppose une loi de décroissance inversement proportionnelle à la distance du module du champ de pression acoustique.

4.3.1 Principe général

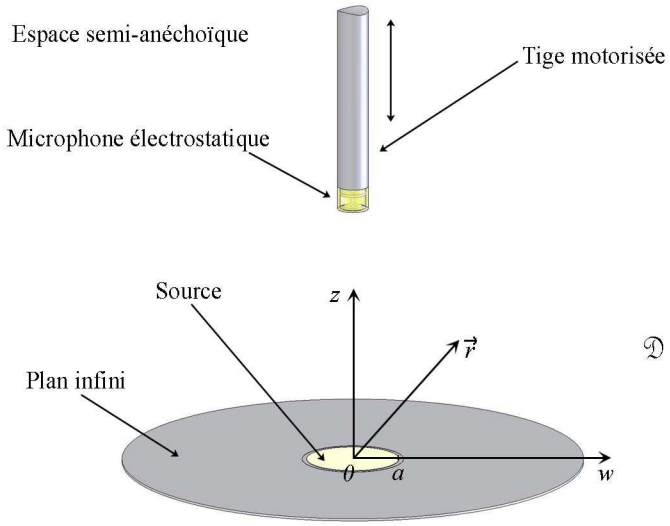


Figure 4.5. Détermination de la position du centre acoustique d'un microphone électrostatique : dispositif expérimental.

Un microphone électrostatique est placé dans une tige motorisée supposée semi-infinie permettant un déplacement suivant l'axe z. La source, de surface $S_0 = \pi a^2$ est placée dans un plan supposé infini délimitant le domaine $\mathcal{D}$ semi-infini. Le fluide, supposé continu, homogène et isotrope, est caractérisé par sa masse volumique ρ_0 et la célérité du son c_0 (figure 4.5).

La source est supposée ponctuelle de sorte que le champ de pression rayonné est caractérisé par

la relation

$$p(\vec{r}) = \frac{j\,k_0 \rho_0 c_0 Q_0}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-j k_0 |\vec{r} - \vec{r}_s|}}{|\vec{r} - \vec{r}_s|} \mathrm{e}^{-\gamma |z - z_s|}, \quad \forall \vec{r} \in \mathcal{D}, \tag{4.83}$$

où Q_0 est le débit volumique de la source située en son centre acoustique de coordonnée $\vec{r}_s$ et γ l'affaiblissement linéique de propagation dans l'air. Sur l'axe z le module du champ de pression rayonné s'écrit

$$|p(z)| = \frac{C}{|z - z_s|} \mathrm{e}^{-\gamma |z - z_s|}, \qquad \forall z > 0, \tag{4.84}$$

où z_s désigne l'abscisse du centre acoustique de la source sur l'axe z, et où $C = k_0 \rho_0 c_0 Q_0 / (2\pi)$.

Le microphone électrostatique balayant l'axe z mesure en son centre acoustique, dont la position par rapport à la membrane est notée d_c (positive devant la membrane), la pression acoustique émise par la source. Pour une position z de la membrane du microphone récepteur, le module de la pression mesurée en son centre acoustique s'écrit sous la forme

$$|p(z - d_c)| = \frac{C}{|z - d_c - z_s|} \mathrm{e}^{-\gamma |z - d_c - z_s|}, \qquad \forall z > 0. \tag{4.85}$$

En considérant les positions z du microphone très grande devant $d_c + z_s$, il vient

$$\frac{\mathrm{e}^{-\gamma z}}{|p(z - d_c)|} \approx \frac{1}{C} (z - d_c - z_s). \tag{4.86}$$

L'estimation de la valeur de d_c consiste à mesurer l'inverse du module de la pression $|p(z - d_c)|$ à diverses positions z. Le second membre de l'équation (4.86) est une droite dont le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine conduisent à la somme $d_c + z_s$. La connaissance de l'abscisse du centre acoustique de la source z_s conduit alors à la distance d_c entre le centre acoustique du microphone récepteur testé et sa membrane.

L'abscisse du centre acoustique z_s de la source est calculable pour une surface vibrante dans un écran plan, lorsque le profil de vitesse $v(\vec{w}_0)$ (supposée à symétrie axiale) de la membrane est connu en tout point. L'intégrale de Rayleigh [63], définie par la relation

$$p(\vec{r}) = \frac{j\,k_0\,\rho_0\,c_0}{2\pi} \iint_{S_0} \frac{e^{-jk_0 |\vec{r} - \vec{w}_0|}}{|\vec{r} - \vec{w}_0|} v(\vec{w}_0)\, dS_0, \qquad \forall \vec{r} \in \mathcal{D}, \tag{4.87}$$

permet de calculer le champ de pression en tout point $\vec{r} \in \mathcal{D}$. Sur l'axe z le champ de pression s'écrit

$$p(z) = j\,k_0 \rho_0 c_0 \int_0^a \frac{e^{-jk_0 \sqrt{z^2 + w_0^2}}}{\sqrt{(z^2 + w_0^2)}} v(w_0)\, w_0\, dw_0, \qquad \forall z > 0. \tag{4.88}$$

En calculant sur un intervalle $z \in [z_{min}, z_{max}]$ l'inverse du module du champ de pression $p(z)$, puis en effectuant une régression linéaire (en utilisant la méthode des moindres carrés) sur les points obtenus, le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de cette régression linéaire conduisent à l'abscisse du centre acoustique z_s de la source.

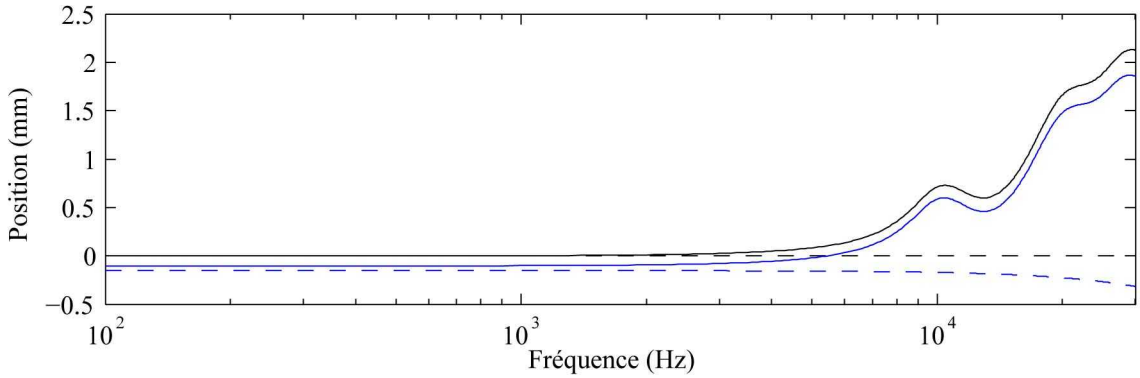


Figure 4.6. Position du centre acoustique d'une surface vibrante dans un écran plan infini en fonction de la fréquence : calculée pour z compris entre 20 et 40 cm (courbes bleues) et $z \to \infty$ (courbes noires) pour un profil de vitesse uniforme (traits discontinus) et pour un profil de vitesse défini selon la forme (4.89) (traits continus).

L'abscisse du centre acoustique z_s de la source est évaluée numériquement (figure 4.6) à partir du calcul du champ de pression $p(z)$ sur les intervalles $z \in [20\,\text{cm}; 40\,\text{cm}]$ (courbes bleues) et à l'infini (courbes noires) en considérant :

- soit un profil de vitesse uniforme (traits discontinus, résultats conformes avec ceux publiés dans la référence [52] pour la même configuration),
- soit un profil de vitesse écrit sous la forme (traits continus) (cf. § 4.2.2.i)

$$v(w) \approx j\,\omega\,B_0\left(1 - \frac{J_0(k_w w)}{J_0(k_w a)}\right), \tag{4.89}$$

où B_0 est une constante (dont le calcul n'est pas indispensable) et où le nombre d'onde k_w est défini par la relation

$$k_w^2 = (\omega^2\,\sigma_s - i\,\omega\,S_m Z_c)/T_m, \tag{4.90}$$

où T_m est la tension de la membrane, σ_s sa masse surfacique et Z_c l'impédance de la cavité arrière (cf. Annexe I). Pour l'étude expérimentale présente, la source utilisée est un microphone 1" Brüel & Kjær de Type 4144, très proche dans sa conception du microphone étalon de laboratoire Type 4160 (le microphone 4144 présente l'avantage de posséder un filetage en périphérie permettant une adaptation plus simple à un support). Les courbes de la figure 4.6 montrent que la valeur de l'abscisse z_s du centre acoustique de la source n'est pas négligeable (par à rapport à d_c) en hautes fréquences lorsque le profil de vitesse $v(w_0)$ est non uniforme. A noter que l'abscisse du centre acoustique ainsi calculée est une approximation puisque le profil de vitesse (4.89) est une forme approchée. Plus précisément, le modèle du microphone à constantes localisées décrit en Annexe I n'est certainement pas adapté aux hautes fréquences. Pour une estimation correcte de la position du centre acoustique de la source, le profil de vitesse $v(w_0)$ de la membrane pourrait être mesuré à l'aide d'un vibromètre laser, puis, les résultats de mesures intégrés dans l'intégrale de Rayleigh (4.88) [64].

Comparé à la procédure classique de mesure de la position du centre acoustique d'un microphone [55] (source dans une tige semi-infinie), l'utilisation d'une surface vibrante dans un écran plan permet un rayonnement acoustique approximativement supérieur de 3 dB. De plus, en basses fréquences (inférieures à 5 kHz), le rendement d'un microphone 1" est supérieur à celui d'un microphone ½" d'environ 12 dB. De ce fait, de meilleures performances sont attendues sur les résultats de mesures, plus particulièrement en basses fréquences lorsque le transducteur testé est un

microphone ½".

4.3.2 Dispositif expérimental, mesures

Le dispositif expérimental utilisé est décrit sur la figure 4.7. Le microphone réciproque ½" testé (Brüel & Kjær Type 4180) est relié à un préamplificateur adapté (Type 2673-W) monté sur un bras télescopique motorisé (diamètre égal à celui du microphone et du préamplificateur). Les signaux reçus sont amplifiés par un amplificateur de type Nexus (2690 Brüel & Kjær, cf. Annexe F.2). La source sonore est un microphone réciproque 1" (Brüel & Kjær Type 4144) relié à un préamplificateur (Type ZE 0796) et encastré dans le sol d'une salle semi-anéchoïque (volume utile de 110 m^3). Le signal générateur est fourni par le générateur interne de l'analyseur PULSE (Brüel & Kjær) et conditionné par la voie émettrice de l'appareil de réciprocité (5998 de Brüel & Kjær, cf. Annexe F.1). L'analyseur Pulse permet d'effectuer les mesures électriques et est relié à un ordinateur pour le pilotage (bras télescopique et analyseur Pulse) et le stockage des données.

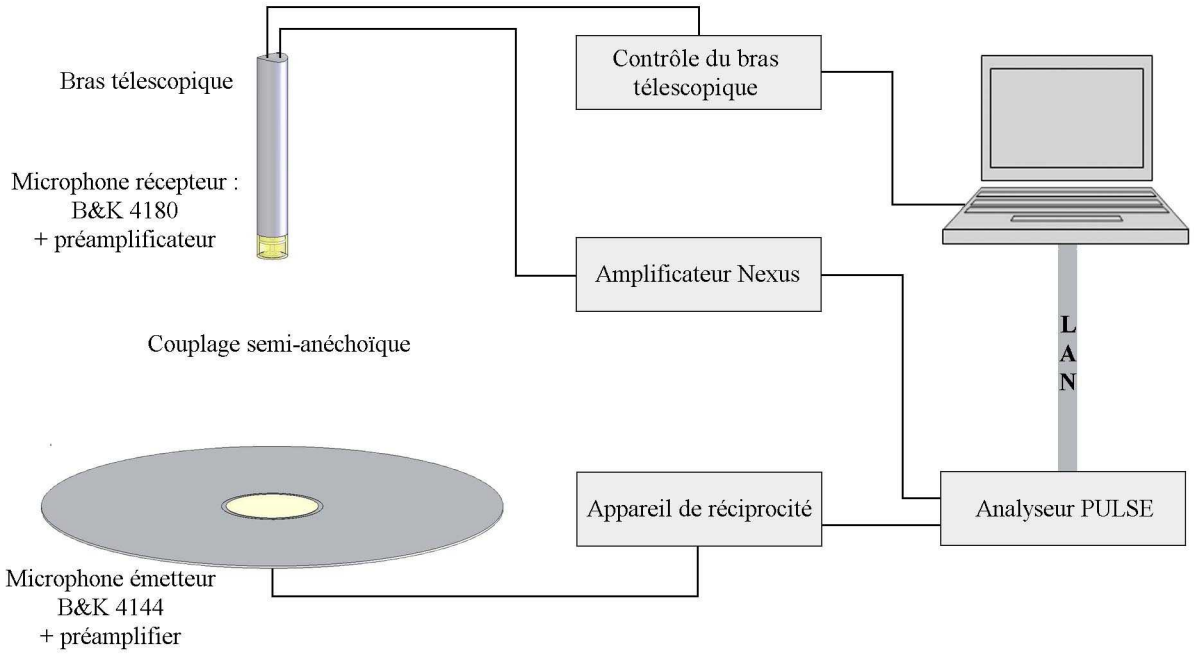


Figure 4.7. Détermination de la position du centre acoustique d'un microphone : dispositif expérimental.

Le dispositif expérimental permet la mesure de la fonction de transfert $H_m(z,f)=u_r/u_g$ (en module et phase) définie par le rapport entre la tension u_r mesurée aux bornes du microphone testé et la tension u_g aux bornes du générateur (tension constante) dans une large gamme de fréquences et pour plusieurs distances z séparant la source du microphone testé (cf. figure 4.8, où $f\in[400\,\text{Hz};30\,\text{kHz}]$ avec $\Delta f=50\,\text{Hz}$ et $z\in[20\,\text{cm};40\,\text{cm}]$, avec $\Delta z=1\,\text{cm}$). La fonction de cohérence (figure 4.9) mesurée entre les signaux u_r et u_g en basses fréquences montre que la mesure des fonctions de transfert $H_m(z,f)$ n'est pas valide aux fréquences inférieures à 400 Hz, ces mesures peuvent néanmoins être évaluées si nécessaire (cf. ci-après).

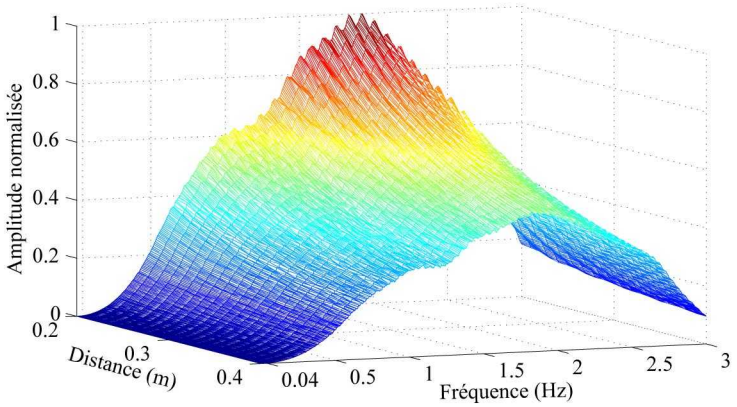


Figure 4.8. Module (amplitude normalisée) des fonctions de transfert $H_m(z,f)$ mesurées en fonction de la fréquence f et de la distance z séparant la source du microphone testé ; $f \in [400\,\text{Hz}; 30\,\text{kHz}]$ avec $\Delta f = 50\,\text{Hz}$ et $z \in [20\,\text{cm}; 40\,\text{cm}]$, avec $\Delta z = 1\,\text{cm}$.

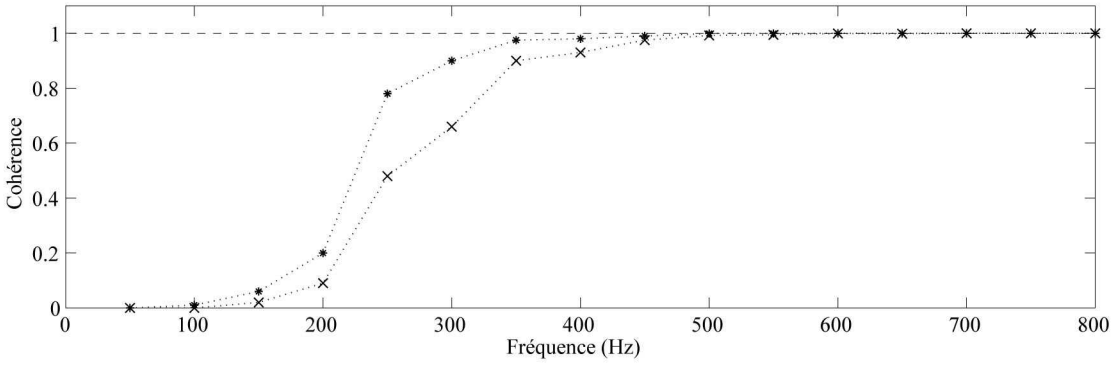


*Figure 4.9. Fonction de cohérence des signaux u_r et u_g à $z = 20\,\text{cm}$ (points * * *), $z = 40\,\text{cm}$ (points × × ×).*

4.3.3 Perturbations des mesures

L'identification des perturbations influant sur les fonctions de transfert $H_m(z,f)$ est réalisée en calculant la réponse impulsionnelle du système en fonction de la position z définie par l'opération $h_m(z,t) = \text{TF}^{-1}\left[H_m(z,f)\right]$. Afin de visualiser toutes les perturbations, sans repliement, les fonctions de transfert $H_m(z,f)$ sont mesurées dans un premier temps à un pas fréquentiel $\Delta f = 10\,\text{Hz}$, ce qui conduit à des réponses impulsionnelles de longueur $c_0 T \approx 34{,}5\,\text{m}$ ($T = 1/\Delta f$ et $c_0 \approx 345\,\text{m.s}^{-1}$).

Les enveloppes de ces réponses impulsionnelles ont été calculées par Transformée de Hilbert dans l'unique but d'éliminer les oscillations qui n'apportent pas d'informations et compliquent l'observation des courbes. Les figures 4.10.a, b, c et d représentent en fonction de l'espace $c_0 t$ les enveloppes des réponses impulsionnelles (en amplitudes normalisées) obtenues à partir des fonctions de transfert $H_m(z,f)$ mesurées en $z = 20$ cm et $z = 40$ cm dans la bande fréquentielle [400 Hz ; 30 kHz]. Les échelles verticale et horizontale sont dilatées et tronquées différemment selon la figure de manière à identifier les différentes perturbations. Les pics principaux, correspondant au champ direct entre la source et le microphone testé, sont décalés d'un facteur $c_0 t$ équivalent au chemin acoustique parcouru (figures 4.10.c ou d). Plusieurs échos sont visibles dans le domaine $c_0 t \in (5\,\text{m}; 12\,\text{m})$ (figure 4.10.b) correspondant aux échos induits par la porte, les murs et le plafond de la salle semi-anéchoïque. Les échos induits par le champ réfléchi sur le microphone testé puis sur le sol sont décalés par rapport aux pics principaux d'un facteur $c_0 t$ égal à deux fois la

distance entre la source et le microphone testé (figure 4.10.c).

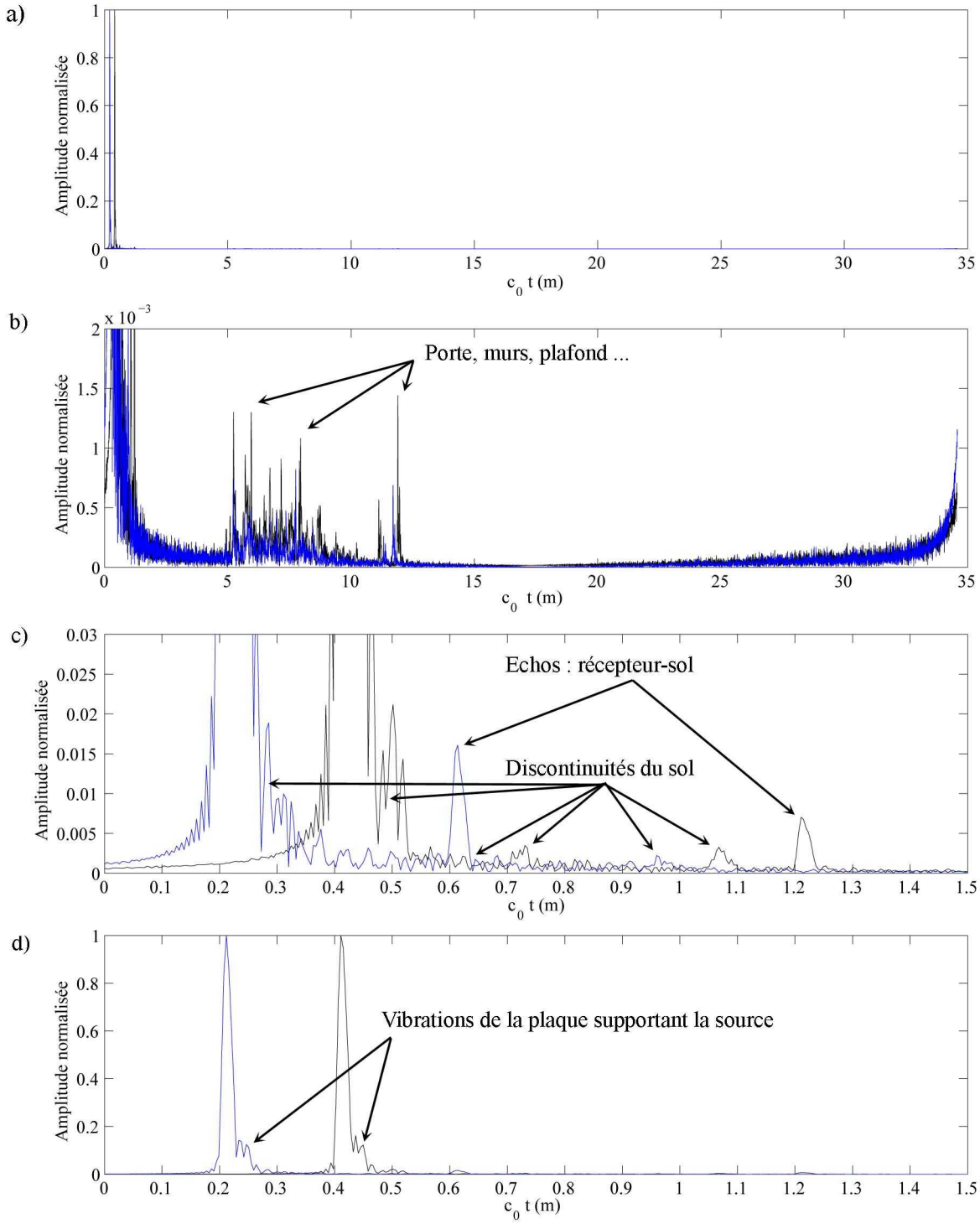


Figure 4.10. Enveloppes des réponses impulsionnelles $h_m(z,t)=\mathrm{TF}^{-1}\left[H_m(z,f)\right]$ *où* $z=20$ cm *(courbe bleue) et* $z=40$ cm *(courbe noire),* $H_m(z,f)$ *étant mesurée avec* $f\in[400\,\mathrm{Hz};\ 30\,\mathrm{kHz}]$ *et* $\Delta f=10\,\mathrm{Hz}$.

Plusieurs échos plus ou moins éloignés des pics principaux (figure 4.10.c) sont attribuables à des discontinuités du sol répertoriées sur la figure 4.11. Enfin, la figure 4.10.d montre qu'une partie de l'énergie acoustique est reçue par le récepteur avec un léger retard par rapport aux pics principaux. L'origine de ces perturbations peut être localisée soit près du microphone testé, soit près de la

source. La première hypothèse peut facilement être écartée par comparaison avec les réponses impulsionnelles obtenues dans le cadre de l'étalonnage en champ libre par la méthode de la réciprocité (figures 3.11 et 3.12). Il s'agit donc de perturbations localisées près de la source, très probablement des vibrations de la plaque supportant la source ayant pour origine des transmissions mécaniques entre la source et la plaque et/ou par mise en vibration de la plaque par propagation aérienne. Le découplage de la source et de la plaque à l'aide d'un joint silicone de 1 mm d'épaisseur semble apporter une légère amélioration comme le laisse apparaître les enveloppes des réponses impulsionnelles obtenues avec et sans découplage (figure 4.12). En revanche, le changement de matériaux (remplacement de l'aluminium par l'acier) et l'alourdissement de la plaque (plus épaisse d'un facteur cinq) n'apporte aucune modification significative (figure 4.13).

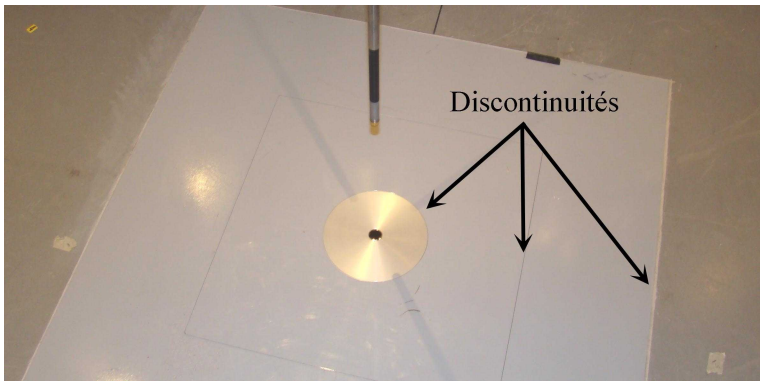


Figure 4.11. Dispositif expérimental : discontinuités du sol.

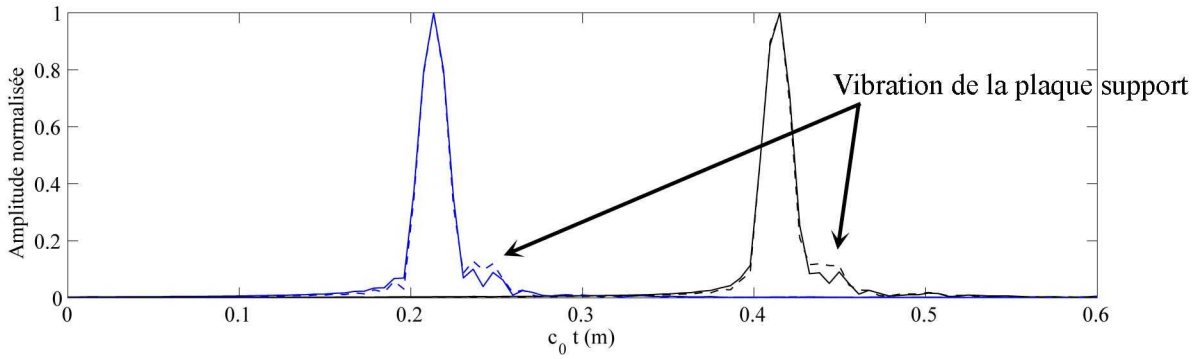


Figure 4.12. Enveloppes des réponses impulsionnelles $h_m(z,t)=\mathrm{TF}^{-1}\left[H_m(z,f)\right]$ *où* $z=20$ cm *(courbes bleues) et* $z=40$ cm *(courbes noires), sans (traits discontinus) et avec (traits continus) découplage de la source avec la plaque support à l'aide d'un joint silicone de 1 mm d'épaisseur.*

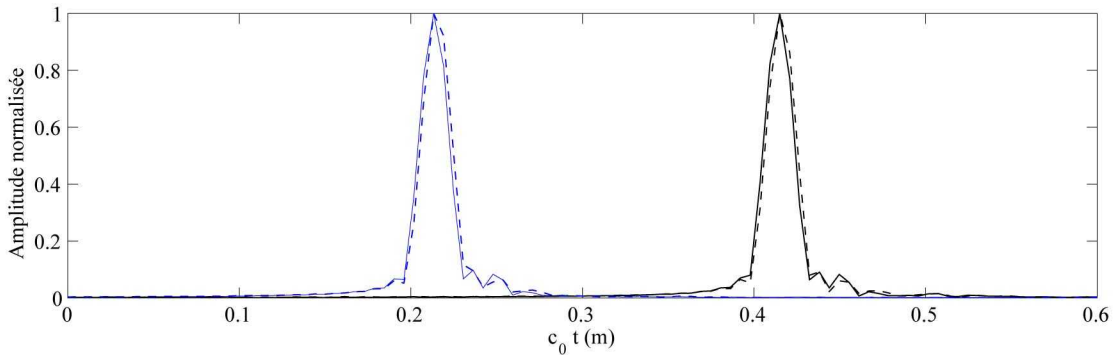


Figure 4.13. Enveloppes des réponses impulsionnelles $h_m(z,t)=\mathrm{TF}^{-1}\left[H_m(z,f)\right]$ *où* $z=20$ cm *(courbes bleues) et* $z=40$ cm *(courbes noires), en utilisant une plaque support en aluminium (traits discontinus), une plaque support en acier cinq fois plus épaisse (traits continus).*

4.3.4 Filtrage des fonctions de transfert, centres acoustiques

L'identification des perturbations permet la synthèse d'une fenêtre de filtrage adaptée au problème posé. Dans un premier temps, un pré-traitement est effectué sur les fonctions de transfert mesurées $H_m(z,f)$. Ce pré-traitement cherche à :

- corriger l'effet de l'affaiblissement de propagation dans l'air, (facteur $e^{\gamma z}$),
- corriger l'effet des variations de température et de pression statiques au cours de l'acquisition des données sur l'impédance caractéristique de l'air ($(\rho c)_{(z,f)}$, dépendant du moment de l'acquisition des données pour le couple distance-fréquence (z,f), la température et la pression statiques étant relevées régulièrement),
- obtenir des quantités proportionnelles au produit de l'efficacité du microphone testé avec le rendement de la source (correction d'un facteur $1/f^2$, par analogie avec le produit des efficacités en champ libre de deux microphones, Eqs. (3.37) et (3.43)),
- corriger l'effet des variations de température et de pression statiques sur l'efficacité en champ libre du microphone testé (facteurs δ_T^{ff} et δ_P^{ff}, cf. § 3.4.2 [43]),
- centrer les pics principaux (champ direct source-microphone testé) des réponses impulsionnelles $h_m(z,t)$ autour de $c_0 t = 0$. (facteur e^{jkz}, le nombre d'onde $k=\omega/c$ dépendant de la température et de la pression statiques, donc du moment de l'acquisition des données pour le couple distance-fréquence (z,f)).

Il vient,

$$H(z,f)=\frac{H_m(z,f)}{(\rho c)_{(z,f)} f^2}\mathrm{e}^{jkz}\mathrm{e}^{\gamma z}\delta_T^{ff}\delta_P^{ff}. \tag{4.91}$$

Les effets des variations de température et de pression statiques au cours de l'acquisition des données sur le rendement de la source (microphone 1" Type 4144) ne sont pas pris en compte, ces données n'étant pas disponibles pour la gamme de fréquences utilisée. Le dispositif expérimental permet un contrôle de la température statique (salle semi-anéchoïque climatisée) mais ne permet pas celui de la pression statique. De ce fait, il est important de réduire la durée totale de l'acquisition de manière à limiter les effets indésirables des variations de la pression statique sur le rendement de la source. Ainsi, les fonctions de transfert $H_m(z,f)$ sont mesurées à un pas fréquentiel $\Delta f = 172\,\mathrm{Hz}$ de manière à réduire la durée d'acquisition tout en permettant un filtrage convenable malgré les repliements de certains échos.

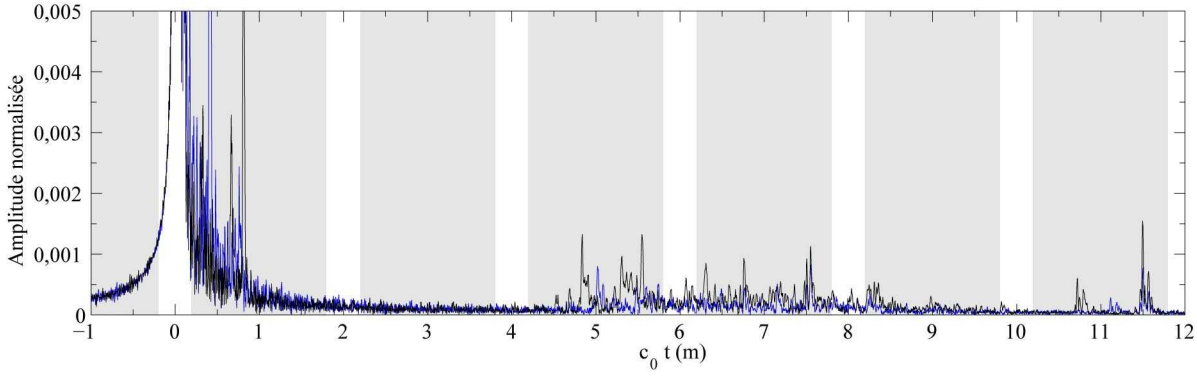


Figure 4.14. Enveloppes des réponses impulsionnelles $h(z,t)=\mathrm{TF}^{-1}[H(z,f)]$ *où* $z=20$ cm *(courbe bleue) et* $z=40$ cm *(courbe noire) et où* $\Delta f = 10\,\mathrm{Hz}$ *et zones se repliant sur le pic principal autour de zéro (zones non ombrées) lorsque la fonction de transfert* $H_m(z,f)$ *est mesurée à un pas fréquentiel* $\Delta f = 172\,\mathrm{Hz}$.

La figure 4.14 permet de mettre en évidence les perturbations qui ne peuvent pas être filtrées lorsque les fonctions de transfert sont mesurées avec un pas fréquentiel $\Delta f = 172\,\text{Hz}$, pas qui conduit à des réponses impulsionnelles de période $c_0 T \approx 2\,\text{m}$. Sur cette figure sont tracées les enveloppes des réponses impulsionnelles obtenues lorsque les fonctions de transfert sont mesurées avec un pas $\Delta f = 10\,\text{Hz}$ ($c_0 T \approx 34{,}5\,\text{m}$). Les zones non ombrées sur cette figure sont celles qui par repliement se trouveraient superposées au pic principal d'intérêt (autour de $c_0 t = 0$) pour des fonctions de transfert mesurées avec un pas $\Delta f = 172\,\text{Hz}$. Ainsi le pas (172 Hz) a été choisi pour qu'aucun écho important ne se trouve dans ces zones non ombrées car de tels échos ne seraient éliminés par filtrage.

Les fonctions de transfert modifiées $H(z, f)$ sont filtrées par convolution :

$$H_c(z, f) = H(z, f) * W_i(f)\,, \tag{4.92}$$

où $W_i(f)$ désigne un filtre spectrale construit en utilisant la méthode d'optimisation présentée au paragraphe 3.4.3. Les filtres utilisés dans ce paragraphe sont définis dans le tableau 4.1, les termes utilisés étant précisés sur la figure 3.13. Les filtres spectraux obtenus sont représentés sur la figure 4.15 et les filtres temporels $w_i(t)$ équivalents sur la figure 4.16 en fonction de l'espace $c_0 t$. Compte tenu des ordres des filtres obtenus, le filtrage des fonctions de transfert nécessite leur prolongement dans les fréquences négatives en considérant la propriété $H(z, -f) = H^*(z, f)$. Par ailleurs, la cohérence des signaux mesurés ne permettant pas la mesure des fonctions de transfert $H_m(z, f)$ aux fréquences inférieures à 400 Hz (cf. figure 4.9), elles sont évaluées pour ces fréquences par simple prolongement des premiers points fréquentiels mesurés. Cette opération se justifie d'une part par le fait que les fonctions de transfert modifiées (Eq. 4.91) sont proportionnelles au produit de l'efficacité en champ libre du microphone testé avec le rendement de la source et d'autre part, par le fait que ces deux quantités sont constantes pour les fréquences en question (compte tenu des caractéristiques des microphones Type 4180 et 4144). Ce prolongement introduit également l'hypothèse que le centre acoustique du microphone testé est inchangé pour les points fréquentiels prolongés, hypothèse qui pourrait être vérifiée en utilisant les méthodes numériques connues [65].

	Filtre W_1	Filtre W_2
Largeur de la fenêtre $c_0 T$ (en m)	2	2
Demi largeur préservée $c_0 t_p$ (en m)	0,03	0,01
Largeur de transition $c_0 t_{tr}$ (en m)	0,07	0,05
Taux d'ondulation maximum dans la largeur préservée (en dB)	0,05	0,05
Affaiblissement minimum dans la largeur atténuée (en dB)	-40	-40
Ordre $(N+1)$ du filtre $W_i(f_k)$ obtenu	66	94

Tableau 4.1. Paramètres utilisés pour la synthèse des filtres destinés au filtrage des fonctions de transfert $H(z, f)$ (algorithme de Parks-McClellan).

Le filtre $W_1(f_k)$ (figures 4.15 et 4.16) est défini de manière à supprimer toutes les perturbations répertoriées dans le paragraphe 4.3.3 exceptées celles attribuées aux vibrations de la plaque supportant la source. La position du centre acoustique ainsi obtenu (figure 4.17) oscille en fonction de la fréquence autour des données normalisées [26]. Les résultats expérimentaux présentés sont ici corrigés du centre acoustique de la source (microphone 1" Type 4144) évalué au paragraphe 4.3.1 et reporté sur la figure 4.17 (trait pointillé). La courbe (trait discontinu-pointillé) représente quant à

elle l'évaluation du centre acoustique de la source (cf. méthode au § 4.3.1) en considérant d'une part le mouvement de la membrane (profil de vitesse selon la forme (4.89)) et d'autre part le mouvement de la plaque autour du microphone sur un rayon $R=7\,\mathrm{cm}$ selon un profil de vitesse $v(w)=Ae^{jk_0 w}$, où k_0 et le nombre d'onde adiabatique dans l'air et où l'amplitude A est calculée de sorte que l'énergie rayonnée par la plaque de rayon $R=7\,\mathrm{cm}$ représente approximativement 2% de l'énergie rayonnée par la membrane (le chiffre de 2% étant estimé approximativement en comparant les énergies contenues dans les pics principaux et dans les zones considérées comme perturbatrices des enveloppes des réponses impulsionnelles (figures 4.12, 4.13, 4.16)). Il est intéressant de constater que la position du centre acoustique de la source ainsi calculée (figure 4.17, trait discontinu-pointillé) présente dans les basses fréquences une forme « étrangement » similaire à la forme légèrement ondulante de la position obtenue du centre acoustique du microphone testé (figure 4.17, trait discontinu). Compte tenu de cette observation, nous avons une forte présomption pour retenir l'interprétation qui résulte de ces propos, interprétation selon laquelle les ondulations de la courbe expérimentale (figure 4.17, trait discontinu) par rapport aux positions normalisées (figure 4.17, trait continu) seraient dues à une onde acoustique rasante émise par le microphone émetteur engendrant des vibrations (très faibles) du support de l'émetteur qui par suite émet dans tout l'espace une onde acoustique qui se superpose à l'onde directe émise par le microphone émetteur. L'estimation d'une correction pour remédier à ce problème ne peut être envisagée que dans le cas où le profil de vitesse de la plaque est connu avec précision. Ces vibrations étant extrêmement faibles, leurs estimations nécessite un matériel de mesure d'une grande précision, probablement accessible aux meilleurs vibromètres laser disponibles dans le marché.

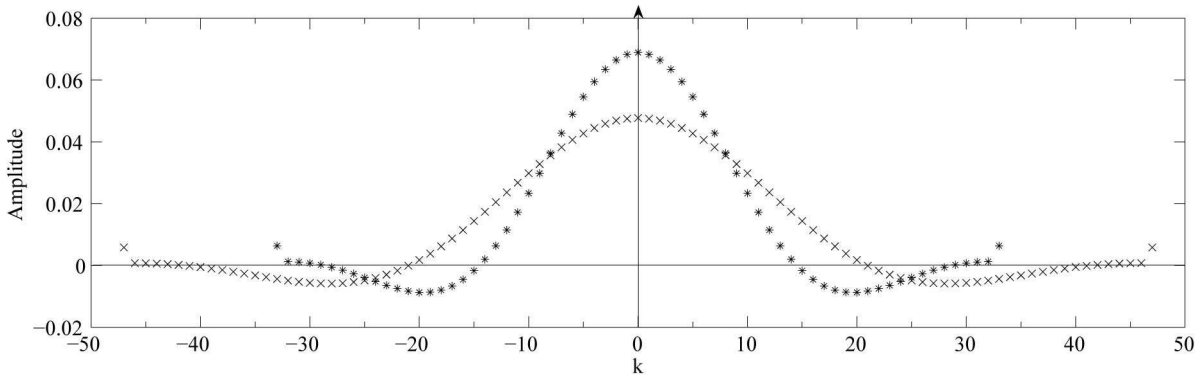


Figure 4.15. Fenêtres spectrales $W_1(f_k)$ (****) et $W_2(f_k)$ (××××) définies dans le tableau 4.1 ($\Delta f=172\,\mathrm{Hz}$).

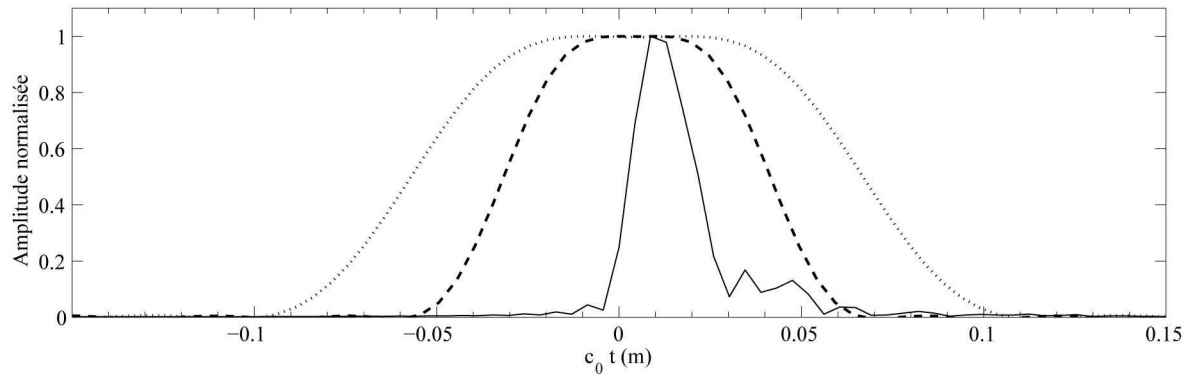


Figure 4.16. Fenêtres de filtrage temporelles $w_1(t)$ (trait pointillé) et $w_2(t)$ (trait discontinu) construites à partir des paramètres définis dans le tableau 4.1 et enveloppe d'une réponse impulsionnelle $h(z,t)=\mathrm{TF}^{-1}[H(z,f)]$ (trait continu).

L'utilisation d'un filtre plus sélectif (filtre $W_2(f_k)$, cf. tableau 4.1, figures 4.15 et 4.16) dont les largeurs de transition et préservée sont définies de manière à éroder la zone perturbatrice (figure 4.16) permet une diminution des oscillations constatées sur la position du centre acoustique expérimentale du microphone testé sans pour autant les supprimer totalement, notamment dans les hautes fréquences (figure 4.18, trait discontinu). Il est difficile de définir un filtre encore plus sélectif sans altérer les pics principaux des réponses impulsionnelles, le filtrage ne peut donc apporter de meilleures solutions au problème rencontré. Les résultats obtenus montrent néanmoins de bonnes concordances avec les positions de centre acoustique normalisées [26] ou celles présentées dans les principales références du domaine [54,55] (figure 4.18).

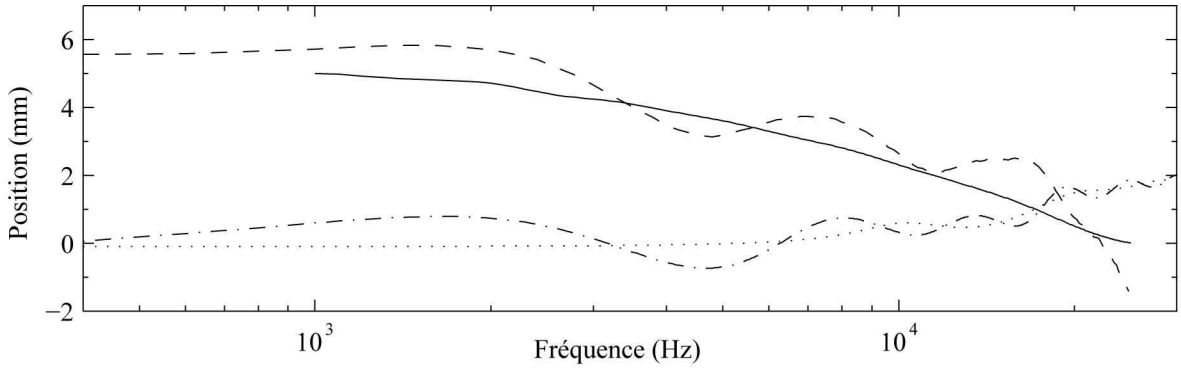


Figure 4.17. Position évaluée du centre acoustique de la source (microphone 1" Type 4144) sans (trait pointillé) et avec (trait discontinu-pointillé) prise en compte des vibrations de la plaque supportant la source. Position du centre acoustique d'un microphone ½" Type 4180 normalisée [26] (trait plein) et expérimentale (les fonctions de transfert $H(z,f)$ étant filtrées avec le filtre $W_1(f_k)$ et les données expérimentales étant corrigées de la position du centre acoustique de la source sans prise en compte des vibrations de la plaque support)(trait discontinu).

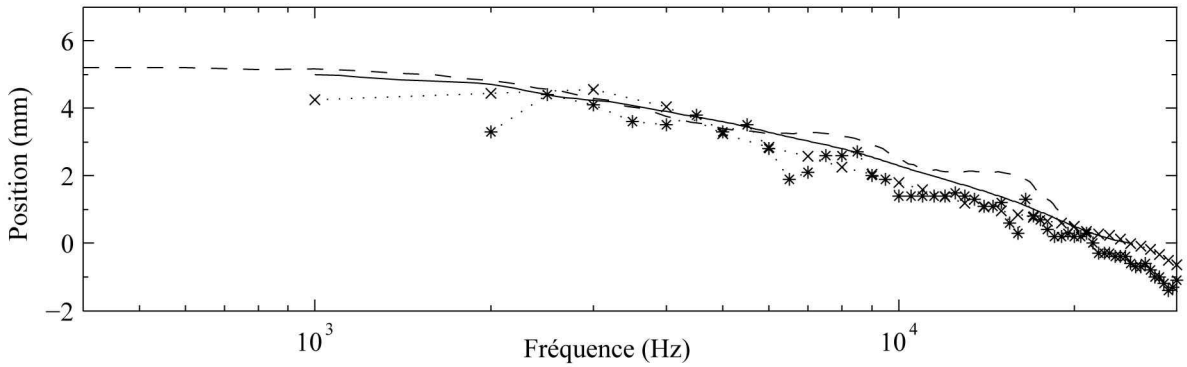


*Figure 4.18. Position du centre acoustique d'un microphone ½" Type 4180 : détermination expérimentale (les fonctions de transfert $H(z,f)$ étant filtrées avec le filtre $W_2(f_k)$, trait discontinu), position normalisée [26] (trait continu), position obtenue expérimentalement par la méthode de la réciprocité, issue des références [54] (points ***) et [55] (points ×××).*

4.4 Conclusion

Le concept de centre acoustique est important dans le cadre de l'étalonnage des microphones en champ libre par la méthode de la réciprocité du fait que la contribution de l'erreur sur cette position à l'erreur globale sur l'efficacité mesurée par réciprocité en champ libre est très grande. L'étude présentée dans ce chapitre cherche à apporter un éclairage sur ce concept à travers une étude théorique et expérimentale.

Les résultats analytiques disponibles dans la littérature (obtenus à partir de la phase du champ de pression acoustique) ont été complétés en prenant en compte les effets de la membrane et de la petite cavité frontale caractéristique des microphones étalons de laboratoire. Les nouveaux résultats analytiques montrent peu de différences avec ceux proposés dans la littérature pour un tube semi-infini à paroi d'épaisseur non nulle. Par ailleurs, ces nouveaux résultats analytiques divergent en hautes fréquences des données disponibles dans la littérature [26,54,55] obtenues par une méthode s'appuyant sur le module du champ de pression acoustique. A noter que pour un tube semi-infini à paroi d'épaisseur non nulle, les résultats expérimentaux obtenus à partir de la phase du champ de pression acoustique sont en adéquation avec les résultats analytiques proposés par Y. Ando [56,61]. Cependant, les résultats expérimentaux qui en pratique sont retenus dans le cadre de l'étalonnage des microphones en champ libre utilisent les propriétés du module du champ de pression acoustique du fait que ces résultats conduisent à des efficacités en champ libre (en module) indépendantes de la distance entre l'émetteur et le récepteur lors de l'étalonnage [44] (ce qui n'est pas le cas lorsque la position du centre acoustique utilisée est obtenue en utilisant les propriétés de la phase du champ de pression acoustique).

De manière expérimentale, la position du centre acoustique d'un microphone se déduit en général de la mesure de la déviation de l'amplitude du champ de pression acoustique par rapport à sa loi de décroissance inversement proportionnelle à la distance. Dans la littérature, les résultats expérimentaux pour des microphones ½" ne sont disponibles que pour des fréquences supérieures à 2 kHz. Afin d'élargir la gamme de fréquences utile (en basses fréquences, à partir de 400 Hz au lieu de 2 kHz) une nouvelle méthode optimisée pour la mesure de la position du centre acoustique d'un microphone est proposée. Les résultats obtenus montrent de bonnes concordances avec les données disponibles dans les principales références du domaine [26,54,55], mais laissent apparaître des perturbations attribuées aux vibrations du support de la source, perturbations dont le filtrage des fonctions de transfert ne peut apporter une solution totalement satisfaisante pour les hautes fréquences. C'est ainsi qu'une solution hybride peut être envisagée pour la détermination expérimentale du centre acoustique d'un microphone : en utilisant la méthode proposée dans cette étude pour les basses fréquences et en utilisant la méthode classique [54,55] pour les hautes fréquences. A noter également que la source utilisée dans ce travail (1") est plus particulièrement adaptée aux basses fréquences et que l'utilisation d'une source plus petite (½" ou ¼") serait plus appropriée pour la détermination de la position du centre acoustique d'un microphone aux fréquences élevées.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de missions confiées au LNE, à savoir le développement et le maintien des références métrologiques, missions qui incluent la participation du LNE aux comparaisons inter-laboratoires (à l'échelle internationale) des étalons nationaux. En acoustique, les thèmes de recherches couvrent les domaines de l'audiométrie et de l'étalonnage primaire des microphones en pression et en champ libre ; c'est ainsi que les sujets abordés dans ce travail de thèse font appel à la méthode de la réciprocité en cavité et en champ libre.

Dans le premier chapitre de ce travail de thèse, l'objectif recherché est de mettre en œuvre et de valider une méthode de mesure d'impédances d'entrée de petits éléments acoustiques, tels que des tubes, fentes, cavités et leurs associations, afin d'optimiser le comportement acoustique de certains dispositifs telle que l'oreille artificielle, à l'instar de l'étude proposée très récemment (2008) dans la référence [66]. Cette technique de mesure d'admittance repose sur la méthode de réciprocité en cavité utilisée pour l'étalonnage des microphones étalons de laboratoire. La validation de cette technique, par comparaison directe avec les admittances d'entrée théoriques (calculées sur la base des données géométriques) a nécessité la réalisation de petits composants (fente mince et tubes) à l'aide de procédures spécifiques permettant une grande précision sur les dimensions de ces éléments (de l'ordre du µm sur les dimensions sensibles). Les résultats expérimentaux présentés montrent que la méthode de mesure proposée est adaptée pour caractériser le comportement acoustique de divers petits éléments avec une bonne précision pour les fréquences inférieures à 5 kHz. Elle se substitue donc avantageusement aux évaluations théoriques qui souffrent d'incertitudes relativement importantes en raison des incertitudes sur les données géométriques sensibles. Cette technique de mesure peut être utilisée pour optimiser le comportement acoustique de chaque élément constitutif de l'oreille artificielle et ainsi proposer des modèles théoriques conduisant à des résultats plus précis que ceux actuellement proposés dans la norme CEI 60318-1 [11]. Par ailleurs, cette technique de mesure ouvre la voie à la caractérisation des dispositifs qui dans le futur seront miniaturisés en utilisant des techniques de type MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) et qui exigeront des mesures appropriées d'admittances d'entrée d'éléments miniaturisés du fait que la limite de validité de la théorie classique pourrait être atteinte si les dimensions des éléments en question étaient réduites.

Néanmoins, pour les hautes fréquences (au delà de 5 kHz), les résultats présentés ont mis en évidence la nécessité d'utiliser un modèle décrivant le comportement acoustique de la cavité de couplage plus précis que celui utilisé actuellement (modèle onde plane), prenant en compte les modes radiaux. Ceci pose de manière plus générale le problème de l'influence des modes radiaux dans la cavité de couplage sur les résultats des étalonnages en pression par la méthode de la réciprocité. Dans la référence [15], K. Rasmussen propose de corriger les effets de cette non-uniformité à l'aide d'un facteur de pondération appliqué au champ de pression à l'avant de la membrane du microphone récepteur, cette pondération conduisant alors à une meilleure reproductibilité des résultats de l'étalonnage. Le deuxième chapitre de ce mémoire cherche à vérifier

le bien fondé de cette correction en prolongeant les études menées précédemment au LNE sur la modélisation « hautes fréquences » du champ acoustique non uniforme dans la cavité de couplage par une modélisation du microphone lui-même qui prend en compte la déformée dynamique de la membrane (cette déformée résultant du couplage membrane/champs acoustiques pariétaux). Les résultats obtenus semblent confirmer le choix formulé par K. Rasmussen pour corriger les effets de la non-uniformité du champ de pression sur l'efficacité du microphone. Pour autant, ces résultats doivent être interprétés avec précaution en raison des imperfections du modèle de microphone proposé, qui de surcroit limitent l'exactitude de la représentation obtenue du champ de pression dans la cavité de couplage. Des modèles plus précis, voire des méthodes numériques, auront à être mis en œuvre pour affiner les résultats présentés dans la première partie de ce mémoire.

La deuxième partie de ce travail trouve son origine dans la comparaison clé CCAUV.A-K4, entre plusieurs laboratoires à l'échelle internationale, portant sur les techniques d'étalonnage des microphones LS2P (½") en champ libre par la méthode de la réciprocité. La comparaison clé sur l'étalonnage des microphones en champ libre a nécessité une refonte complète du dispositif expérimental du LNE, des techniques d'acquisition et des méthodes de filtrages des perturbations acoustiques et électriques (chapitre 3). Des difficultés de mesures ont été mises en évidence, difficultés liées aux faibles niveaux acoustiques mis en jeu qui se traduisent par des mesures d'impédances électriques de transfert entachées de perturbations, dont les causes ont été identifiées. La participation à la comparaison clé a été menée à bien en respectant le calendrier prévu (septembre 2007 pour le LNE) (à l'heure actuelle, les résultats officiels de cette comparaison clé ne sont pas encore publiés). Cependant, les résultats obtenus semblent être en accord avec les valeurs attendues. La révision du bilan des incertitudes consécutive à ce nouveau dispositif montre une nette diminution de ces incertitudes comparées à celles déposées par le LNE au BIPM en 2005, bien que cette diminution doive être considérée avec précaution dans l'attente de la publication des résultats définitifs de la comparaison clé. Par ailleurs, cette révision du bilan des incertitudes a mis en évidence la contribution majoritaire de la position du centre acoustique sur l'incertitude globale et a montré la nécessité de mettre l'accent sur l'étude de ce concept aussi bien sur le plan analytique que sur le plan expérimental.

La détermination analytique de la position du centre acoustique d'un microphone a été proposée sur la base de travaux antérieurs (début du chapitre 4), en y ajoutant la géométrie particulière des microphones concernés. Cette méthode de détermination s'appuie sur les propriétés de la phase du champ de pression acoustique. Les nouveaux résultats analytiques obtenus montrent peu de différences avec ceux proposés dans la littérature pour un tube semi-infini à paroi d'épaisseur non nulle. Par ailleurs, en hautes fréquences ils s'écartent des principales données disponibles dans la littérature, ces dernières étant obtenues par une méthode utilisant les propriétés du module du champ de pression acoustique. Ces observations semblent être en accord avec les conclusions de certains auteurs [52] selon lesquelles la position du centre acoustique d'un transducteur dépend de la méthode de détermination.

En pratique, pour les résultats expérimentaux retenus dans le cadre de l'étalonnage des microphones en champ libre, ce sont les propriétés du module du champ de pression acoustique qui sont utilisées du fait qu'elles conduisent à des efficacités en champ libre indépendantes de la distance entre l'émetteur et le récepteur. Dans la littérature, ces résultats expérimentaux, pour des microphones ½", ne sont connus que pour des fréquences supérieures à 2 kHz. Afin d'élargir la gamme de fréquences utile vers les basses fréquences (de 2 kHz à 400 Hz) une nouvelle méthode expérimentale pour la détermination de la position du centre acoustique d'un microphone a été proposée (fin du chapitre 4). La faisabilité de la méthode a été démontrée malgré les difficultés rencontrées ; ces difficultés sont liées à des problèmes de vibrations du support de la source dont les

effets sur la position du centre acoustique sont importants en hautes fréquences. Ainsi une solution hybride peut désormais être envisagée pour la détermination expérimentale du centre acoustique d'un microphone en utilisant la méthode proposée dans ce mémoire pour les basses fréquences et en utilisant la méthode classique pour les hautes fréquences.

Certains résultats des travaux présentés dans ce mémoire posent à notre sens les bases de travaux futurs qui devraient permettre de poursuivre la modélisation pour réduire encore certaines causes d'incertitudes, mais également bien au delà pour prévoir la mise en œuvre des méthodes adaptées à la métrologie des capteurs du futur qui seront fabriqués par des procédés relevant des microtechnologies. De surcroît, les méthodes analytiques et expérimentales arrivent à un seuil à partir duquel il convient à notre sens de prévoir une modélisation purement numérique des phénomènes (notamment pour valider les approximations retenues dans les modèles actuels) et de prévoir l'usage de techniques optiques, les deux faisant déjà l'objet d'études récentes.

Annexes

Annexe A

Equation de propagation en fluide thermo-visqueux, approximation onde quasi plane : application aux tubes et fentes

A.1 Formulation générale

Les variables décrivant l'état dynamique et thermodynamique du fluide sont :

- l'écart instantané de pression p ,
- la vitesse particulaire $\vec{v}$,
- l'écart instantané de masse volumique ρ' ,
- l'écart instantané de température τ .

La notation $\vec{v}$ et τ n'est utilisée ici que pour des questions de simplifications ultérieures. Les paramètres caractéristiques des propriétés du fluide sont les suivants :

- la masse volumique ρ_0 ,
- la pression statique P_0 ,
- les coefficients de viscosité de cisaillement μ et de volume η ,
- le coefficient de conduction thermique λ ,
- le coefficient de compressibilité isotherme χ_T ,
- les chaleurs massiques par unité de masse à pression constantes et à volume constant C_P et C_V , et leur rapport $\gamma = C_P / C_V$,
- le taux d'accroissement de pression par unité d'accroissement de température à volume constant $\hat{\beta} = (\partial P / \partial T)_V$.

Pour le problème posé, l'amplitude des mouvements acoustiques est suffisamment faibles pour pouvoir en linéariser les équations. Les équations linéaires homogènes du mouvement du fluide sont au nombre de trois [3, § 2.5.1].

- L'équation de Navier-Stokes

$$\frac{1}{c_0}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 c_0}\vec{\mathrm{grad}}(p) = \ell_v \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{v})) - \ell'_v \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}(\vec{v}) \,, \qquad \text{(A.1)}$$

où ℓ_v et ℓ'_v sont les longueurs caractéristiques définies par

$$\ell_v = \frac{1}{\rho_0 c_0}\left(\frac{4}{3}\mu + \eta\right) \quad \text{et} \quad \ell'_v = \frac{\mu}{\rho_0 c_0},$$

et où $c_0 = \sqrt{\gamma / (\rho_0 \chi_T)}$ est la célérité adiabatique du son.

- L'équation de Fourier pour la conduction de la chaleur

$$\left[\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t} - \ell_h \Delta\right]\underline{\tau} = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma}\frac{1}{c_0}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{A.2}$$

où $\ell_h = \lambda / (\rho_0 c_0 C_P)$ désigne une longueur caractéristique de diffusion thermique.

- L'équation de conservation de la masse exprimée dans un volume $\mathcal{D}_0$

$$\iiint_{\mathcal{D}_0}\left[\frac{\gamma}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}(p - \hat{\beta}\underline{\tau}) + \rho_0 \operatorname{div}(\underline{\vec{v}})\right] d\mathcal{D}_0 = \iint_{\mathcal{D}_0}(\rho_0 q)\, d\mathcal{D}_0, \tag{A.3}$$

où q désigne le débit volumique d'une source acoustique dans le domaine considéré $\mathcal{D}_0$.

Les surfaces délimitant le domaine sont considérées comme localement planes. Les coordonnées du système sont notées $(u ; \vec{r})$ où u est la coordonnée normale aux frontières dirigée vers l'intérieur du domaine, avec $u = s$ sur les frontières, et où $\vec{r} = (r_1 ; r_2)$ est le couple de coordonnées tangentielles aux frontières.

Le champ de pression à l'intérieur du domaine considéré est régi par le système d'équations (A.1), (A.2) et (A.3), il est fini au centre du domaine si celui-ci est cylindrique et est soumis aux conditions aux frontières suivantes : les composantes normale et tangentielles de la vitesse particulaire et l'écart instantané de température s'annulent aux frontières, soit

$$\underline{v}_u = \underline{v}_{r1} = \underline{v}_{r2} = 0, \text{ et } \underline{\tau} = 0 \text{ pour } u = s. \tag{A.4}$$

Un certain nombre d'hypothèses simplificatrices peut être retenu. Ces hypothèses peuvent être résumées de la manière suivante :

- la composante normale de la vitesse particulaire $\underline{v}_u$ est très grande devant les composantes tangentielles $\underline{v}_{r1}$ et $\underline{v}_{r2}$,
- les variations de l'écart instantané de température $\underline{\tau}$ et de la composante r_i de la vitesse particulaire $\underline{v}_{ri}$ selon la variable r_i sont très inférieures à leurs variations selon la composante u.

Ces approximations permettent de simplifier l'équation de Navier-Stokes (A.1) et l'équation de Fourier (A.2). L'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\left[1 + \frac{1}{k_v^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\right]\underline{\vec{v}}_{\vec{r}} = \frac{-1}{j\omega\rho_0 c_0}\vec{grad}_{\vec{r}}\, p, \qquad (u - s) \geq 0, \ \forall \vec{r}, \tag{A.5}$$

avec

$$k_v = \frac{1 - j}{\sqrt{2}}\sqrt{k_0 / \ell'_v} \tag{A.6}$$

et l'équation de Fourier s'écrit

$$\left[1 + \frac{1}{k_h^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\right]\underline{\tau} = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma}\, p, \qquad (u - s) \geq 0, \ \forall \vec{r}, \tag{A.7}$$

avec

$$k_h = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0 / \ell_k} \,. \tag{A.8}$$

L'approximation onde plane suppose que le champ de pression acoustique ne varie pas significativement selon la composante u dans les couches limites thermiques et visqueuses proches des parois du domaine. D'autre part, du fait des couches limites visqueuses, la composante $\vec{r}$ de la vitesse particulaire $\vec{v}_{\vec{r}}$ dépend fortement de la composante u dans ces couches limites. Ainsi, le membre de droite de l'équation (A.5) est supposé quasi indépendant de la composante u, ce qui conduit à la solution approchée, satisfaisant aux conditions $\underline{v}_u = 0$ en $u = s$,

$$\vec{v}_{\vec{r}} = \frac{-1}{j\omega\rho_0} \vec{grad}_{\vec{r}}\, p \left[1 - \frac{\Phi(-j k_v u)}{\Phi(-j k_v s)} \right], \tag{A.9}$$

où $\Phi(-j k_v u)$ est la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (A.6). De même, la solution de l'équation (A.7) satisfaisant à la condition $\tau = 0$ en $u = s$ s'écrit

$$\tau = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma}\, p \left[1 - \frac{\Phi(-j k_h u)}{\Phi(-j k_h s)} \right]. \tag{A.10}$$

De plus, en considérant l'approximation onde plane, les effets des couches limites visco-thermiques donnés par ces solutions peuvent être approchées en considérant leur valeur moyenne sur une section du domaine considéré (section d'une cavité cylindrique, fente ou tube), en considérant la pression uniforme sur cette section du domaine [10]. Ainsi, les solutions approchées pour la composante $\vec{r}$ de la vitesse particulaire moyenne (notée $\vec{v}_{\vec{r}}$) et pour l'écart instantané moyen de température (notée τ) s'écrivent

$$\vec{v}_{\vec{r}} \approx \frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \vec{grad}_{\vec{r}}\, p(u, \vec{r}) \frac{1}{S_d} \iint_{S_d} \left[1 - \frac{\Phi(-j k_v u)}{\Phi(-j k_v s)} \right] dS_d \,, \tag{A.11.a}$$

soit

$$\vec{v}_{\vec{r}} \approx \frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \vec{grad}_{\vec{r}}\, p(u, \vec{r}) \left[1 - K_v \right], \tag{A.11.b}$$

avec

$$K_v = \left\langle \frac{\Phi(-j k_v u)}{\Phi(-j k_v s)} \right\rangle \tag{A.12}$$

et

$$\tau = \frac{\gamma - 1}{\hat{\beta}\gamma}\, p(u, \vec{r}) \left[1 - K_v \right], \tag{A.13}$$

avec

$$K_h = \left\langle \frac{\Phi(-j k_h u)}{\Phi(-j k_h s)} \right\rangle . \tag{A.14}$$

En reportant les équations (A.11.b) et (A.13) dans l'équation de conservation de la masse (A.3) (avec $q = 0$) et en supposant que la composante u de la vitesse particulaire v_u est donnée par l'équation d'Euler

$$v_u = \frac{j}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\partial}{\partial u} p(u, \vec{r}) , \tag{A.15}$$

il vient,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + (1 - K_v) \Delta_{\vec{r}} + k_0^2 (1 + (\gamma - 1) K_h) \right] p = 0 . \tag{A.16}$$

A.2 Application aux tubes cylindriques (coupleurs et tubes étroits) et aux fentes annulaires

i. Cavités cylindriques et tubes étroits

Pour une cavité cylindrique de rayon a , le système de coordonnées s'écrit

$$u = a - w , \qquad \vec{r} = (\theta, z) . \tag{A.17}$$

En supposant la propagation d'ondes planes suivant l'axe z , le champ de pression ne dépend que de la coordonnée z , l'équation de propagation (A.16) est réduite à l'expression

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right] p(z) = 0 , \tag{A.18}$$

où

$$k_z^2 = k_0^2 \frac{1 + (\gamma - 1) K_h}{1 - K_v} , \tag{A.19}$$

où $k_0 = \omega / c_0$ et

$$K_{v,h} = \frac{2}{k_{v,h} a} \frac{J_1(k_{v,h} a)}{J_0(k_{v,h} a)} . \tag{A.20}$$

De plus, en supposant le tube ou le cylindre comme « large », soit $|k_{v,h} a| \gg 1$, le nombre d'onde k_z peut être écrit sous sa forme classique

$$k_z^2 \approx k_0^2 \left[1 + \frac{1 - j}{\sqrt{2}} \frac{2}{a \sqrt{k_0}} \left(\sqrt{\ell'_v} + (\gamma - 1) \sqrt{\ell_\kappa} \right) \right] . \tag{A.21}$$

ii. Fentes annulaires

Pour une fente annulaire d'épaisseur e , le système de coordonnées s'écrit

$$u = z_s \text{ ou } u = e - z_s , \qquad \vec{r} = (w, \theta) . \tag{A.22}$$

En supposant le champ de pression radial, il ne dépend que de la coordonnée w et l'équation de propagation (A.16) est réduite à l'expression

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial w^2} + \frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial w} + \chi^2 \right] p(w) = 0 , \tag{A.23}$$

où

$$\chi^2 = k_0^2 \frac{1+(\gamma-1)K_h}{1-K_v}\,, \qquad Re(\chi)>0 \ \text{ et } \ Im(\chi)<0\,, \tag{A.24}$$

avec

$$K_{v,h} = \frac{\tan(k_{v,h}e/2)}{k_{v,h}e/2}\,. \tag{A.25}$$

Annexe B

Solution modale du champ de pression dans une cavité cylindrique

Dans certaines circonstances, le modèle « onde plane » (Eq. A.18) utilisé pour décrire le comportement du champ de pression dans une cavité cylindrique est insuffisant. Ce modèle, néglige les modes supérieurs (modes radiaux) qui peuvent avoir une influence non négligeable sur le résultat d'un étalonnage (cf. chapitre 2) où encore sur les mesures d'impédances de petits éléments acoustiques (cf. chapitre 1). C'est l'objet de cette Annexe que de présenter un modèle plus élaboré, extrait de la référence [10] où les auteurs présentent une solution reposant sur la formulation intégrale et qui prend en compte la nature dissipative du fluide. L'exposé traite du cas général pour la mesure d'une impédance Y_c localisée en paroi d'une cavité de couplage mais s'adapte également au problème posé par l'étalonnage en pression des microphones par la méthode de la réciprocité, pour lequel $Y_c=0$.

L'équation de propagation (A.16) s'écrit de la manière suivante (en supposant que les variations du champ de pression p suivant les coordonnées w et θ sont très petites devant les variations suivant les coordonnées z) :

$$\left[\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial w}w\frac{\partial}{\partial w}+\frac{1}{w^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right]p(w,\theta,z)=0\,, \tag{B.1}$$

où le nombre d'onde k qui tient compte des effets des couches limites thermovisqueuses latérales est donné par le membre de droite de l'équation (A.19)

$$k^2=k_0^2\frac{1+(\gamma-1)K_h}{1-K_v}\,, \tag{B.2}$$

les termes K_v et K_h étant donnés par l'équation (A.20), ou, par la forme approchée (A.21)

$$k^2\approx k_0^2\left[1+\frac{1-j}{\sqrt{2}}\frac{2}{a\sqrt{k_0}}\left(\sqrt{\ell'_v}+(\gamma-1)\sqrt{\ell_k}\right)\right]. \tag{B.3}$$

La propagation des ondes dans le cylindre est régie par l'équation (B.1) associée aux conditions aux frontières suivantes :

$$\begin{cases} v_w=0, & w=a,\ \theta\in(0,2\pi),\ z\in(0,\ell), \quad \text{(B.4.a)} \\ v_w=\dfrac{Y_c}{\sigma_c}p, & w=a,\ \theta\in(0,2\pi),\ z=\ell_c, \quad \text{(B.4.b)} \end{cases}$$

σ_c désignant la surface de l'ouverture de l'élément à caractériser supposée très petite devant la

surface latérale de la cavité de couplage,

$$\begin{cases} \rho c_0 v_z = \rho c_0 v_e - \zeta_{z0} p, & w\in(0,a_e),\ \theta\in(0,2\pi),\ z=0, \quad \text{(B.4.c)} \\ \rho c_0 v_z = -\rho c_0 v_R + \zeta_{z\ell} p, & w\in(0,a_r),\ \theta\in(0,2\pi),\ z=\ell, \quad \text{(B.4.d)} \\ \rho c_0 v_z = -\zeta_{z0} p, & w\in(a_e,a),\ \theta\in(0,2\pi),\ z=0, \quad \text{(B.4.e)} \\ \rho c_0 v_z = \zeta_{z\ell} p, & w\in(a_r,a),\ \theta\in(0,2\pi),\ z=\ell, \quad \text{(B.4.f)} \end{cases}$$

où ζ_{z0} et $\zeta_{z\ell}$ désignent les admittances acoustiques spécifiques des parois respectivement en $z=0$ et $z=\ell$ traduisant les effets des couches limites thermovisqueuses.

Les admittances ζ_{z0} et $\zeta_{z\ell}$ restant petites, compte tenu des équations (A.11.b) et (A.20), les conditions aux frontières (B.4.a-f) s'écrivent (quelque soit $\theta\in(0,2\pi)$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial n} = \dfrac{\partial p}{\partial w} = 0, & w=a,\ z\in(0,\ell), \quad \text{(B.5.a)} \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = \dfrac{\partial p}{\partial w} = -jk_0\rho_0 c_0 \dfrac{Y_c}{\sigma_c} p, & w=a,\ z=\ell_c, \quad \text{(B.5.b)} \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = -\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{jk_0\rho_0 c_0}{1-K_v} v_z \approx \dfrac{jk_0\rho_0 c_0}{1-K_v} v_e - jk_0\zeta_{z0} p, & w\in(0,a_e),\ z=0, \quad \text{(B.5.c)} \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\dfrac{jk_0\rho_0 c_0}{1-K_v} v_z \approx \dfrac{jk_0\rho_0 c_0}{1-K_v} v_R - jk_0\zeta_{z\ell} p, & w\in(0,a_r),\ z=\ell, \quad \text{(B.5.d)} \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = -\dfrac{\partial p}{\partial z} = -jk_0\zeta_{z0} p, & w\in(a_e,a),\ z=0, \quad \text{(B.5.e)} \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = \dfrac{\partial p}{\partial z} = -jk_0\zeta_{z\ell} p, & w\in(a_r,a),\ z=\ell, \quad \text{(B.5.f)} \end{cases}$$

Le champ de pression dans la cavité de couplage est régi par l'équation (B.1) associée aux conditions aux frontières (B.5.a-f). A l'instar de la référence [10, § 2.3] traitant de la cavité totalement close, le champ de pression p peut être exprimé à l'aide de la formulation intégrale. La fonction de Green est ici choisie de manière à satisfaire aux mêmes conditions aux frontières (B.5.a-f) que la pression p soit (quelque soit $\theta\in(0,2\pi)$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial n} G(\vec{w},\vec{w}_0) = -jk_0\zeta_{z0} G(\vec{w},\vec{w}_0), & w\in(0,a),\ z=0, \quad \text{(B.6.a)} \\ \dfrac{\partial}{\partial n} G(\vec{w},\vec{w}_0) = -jk_0\zeta_{z\ell} G(\vec{w},\vec{w}_0), & w\in(0,a),\ z=\ell, \quad \text{(B.6.b)} \\ \dfrac{\partial}{\partial n} G(\vec{w},\vec{w}_0) = 0, & w=0,\ z\in(0,\ell). \quad \text{(B.6.c)} \end{cases}$$

Le champ de pression acoustique en tout point de la cavité s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} p(\vec{w}) = \frac{jk_0\rho_0 c_0}{1-K_v} \left[\iint_{S_e} v_e(\vec{w}_0) G(\vec{w},\vec{w}_0)\, dS_0 + \iint_{S_r} v_R(\vec{w}_0) G(\vec{w},\vec{w}_0)\, dS_0 \right] \\ - jk_0\rho_0 c_0 \iint_{\sigma_c} y_c(\vec{w}_0)\, p(\vec{w}_0) G(\vec{w},\vec{w}_0)\, dS_0, \end{aligned} \quad \text{(B.7)}$$

où S_e et S_r sont respectivement les surfaces des membranes des microphones émetteur et récepteur, où $y_c = Y_c/\sigma_c$ et où la fonction de Green est donnée par l'expression [10]

$$G(\vec{w},\vec{w}_0)=\sum_{\mu,\nu=0,1\ldots,d=c,s} g_{\mu\nu}(z,z_0)\Xi^d_{\mu\nu}(w_0,\theta_0)\Xi^d_{\mu\nu}(w,\theta)\,, \tag{B.8}$$

où les fonctions propres $\Xi^d_{\mu\nu}$ ($d=c,s$ respectivement pour $\cos\mu\theta$ et $\sin\mu\theta$) satisfont à la condition de Neumann aux frontières. L'équation (B.7) prend la forme

$$p(w,\theta,z)=\sum_{\mu,\nu,d} p^d_{\mu\nu}(z)\Xi^d_{\mu\nu}(w,\theta)\,, \tag{B.9}$$

avec

$$\begin{aligned} p^d_{\mu\nu}(z)=&\frac{jk_0\rho_0c_0}{1-K_\nu}[g_{\mu\nu}(z,0)\langle v_e|\Xi^d_{\mu\nu}\rangle_e+g^d_{\mu\nu}(z,\ell)\langle v_R|\Xi^d_{\mu\nu}\rangle_r]\\ &-jk_0\rho_0c_0\,g^d_{\mu\nu}(z,\ell_c)\sum_{\mu',\nu',d'} p^{d'}_{\mu'\nu'}(\ell_c)\langle y_c\Xi^{d'}_{\mu'\nu'}|\Xi^d_{\mu\nu}\rangle_{\sigma_c}\,, \end{aligned} \tag{B.10}$$

où $\langle v_e|\Xi^d_{\mu\nu}\rangle_e$ est l'intégrale sur la surface S_e du produit $v_e(w_0,\theta_0)\Xi^d_{\mu\nu}(w_0,\theta_0)$ et $\langle v_R|\Xi^d_{\mu\nu}\rangle_r$ l'intégrale sur la surface S_r du produit $v_R(w_0,\theta_0)\Xi^d_{\mu\nu}(w_0,\theta_0)$ et où

$$\Xi^c_{\mu\nu}(w,\theta)=\frac{1}{a_\mu b_{\mu\nu}}\cos(\mu\theta)J_\mu\left(k_{w\mu\nu}w\right), \tag{B.11.a}$$

$$\Xi^s_{\mu\nu}(w,\theta)=\frac{1}{a_\mu b_{\mu\nu}}\sin(\mu\theta)J_\mu\left(k_{w\mu\nu}w\right), \tag{B.11.b}$$

où $1/(a_\mu b_{\mu\nu})$ est le coefficient de normalisation des fonctions propres, J_μ la fonction de Bessel cylindrique de première espèce, et $k_{w\mu\nu}$ les valeurs propres associées, définies par

$$k_{w\mu\nu}a=\gamma_{\mu\nu}\,, \tag{B.12}$$

où $\gamma_{\mu\nu}$ représente le $(\nu+1)$ième zéro de la dérivée première de la fonction de Bessel $J_\mu\left(k_{w\mu\nu}w\right)$.

Annexe C

Plans des coupleurs de haute précision utilisés pour la mesure d'impédance d'entrée d'une fente annulaire et d'un réseau de quatre tubes

Cette Annexe regroupe les plans et procédures de fabrications de deux coupleurs de haute précision : un pourvu d'une fente annulaire et un autre pourvu d'un réseau de quatre tubes.

C.1 Coupleur pourvu d'une fente annulaire de haute précision

Le coupleur à réaliser est décrit par les plans N°:

- AF-01 : assemblage du coupleur fente,
- F-01 : élément du coupleur,
- F-02 : élément du coupleur,
- G-01 : goupilles de centrage et de fixation.

A cela s'ajoute 3 rondelles souples de type ISO7089 Ø5, 3 écrous 6 pans M5 et plusieurs cales étalon ISO3650 de différentes épaisseurs.

La conception du coupleur cherche à respecter deux objectifs :

- une incertitude sur l'épaisseur de la fente de 1 µm,
- une incertitude sur sa longueur de 10 µm.

Afin d'y parvenir, le coupleur est constitué de deux pièces principales (éléments F-01 et F-02) pourvues de trois bras de support en périphérie. La particularité de chacune de ces pièces (F-01 et F-02) est que la surface délimitant la fente annulaire (surface A du plan N°:F-01 ou N°:F-02) et les trois surfaces d'appuis des supports (surfaces B, C et D du plan N°:F-01 ou N°:F-02) seront confondues dans le même plan. Cette opération est obtenue en rectifiant ces surfaces en même temps par rodage avec une excellente finition (Ra<0,05). La fente est alors créée en plaçant entre chaque support des cales étalons ISO3650 mesurées avec une incertitude de 1/100 µm.

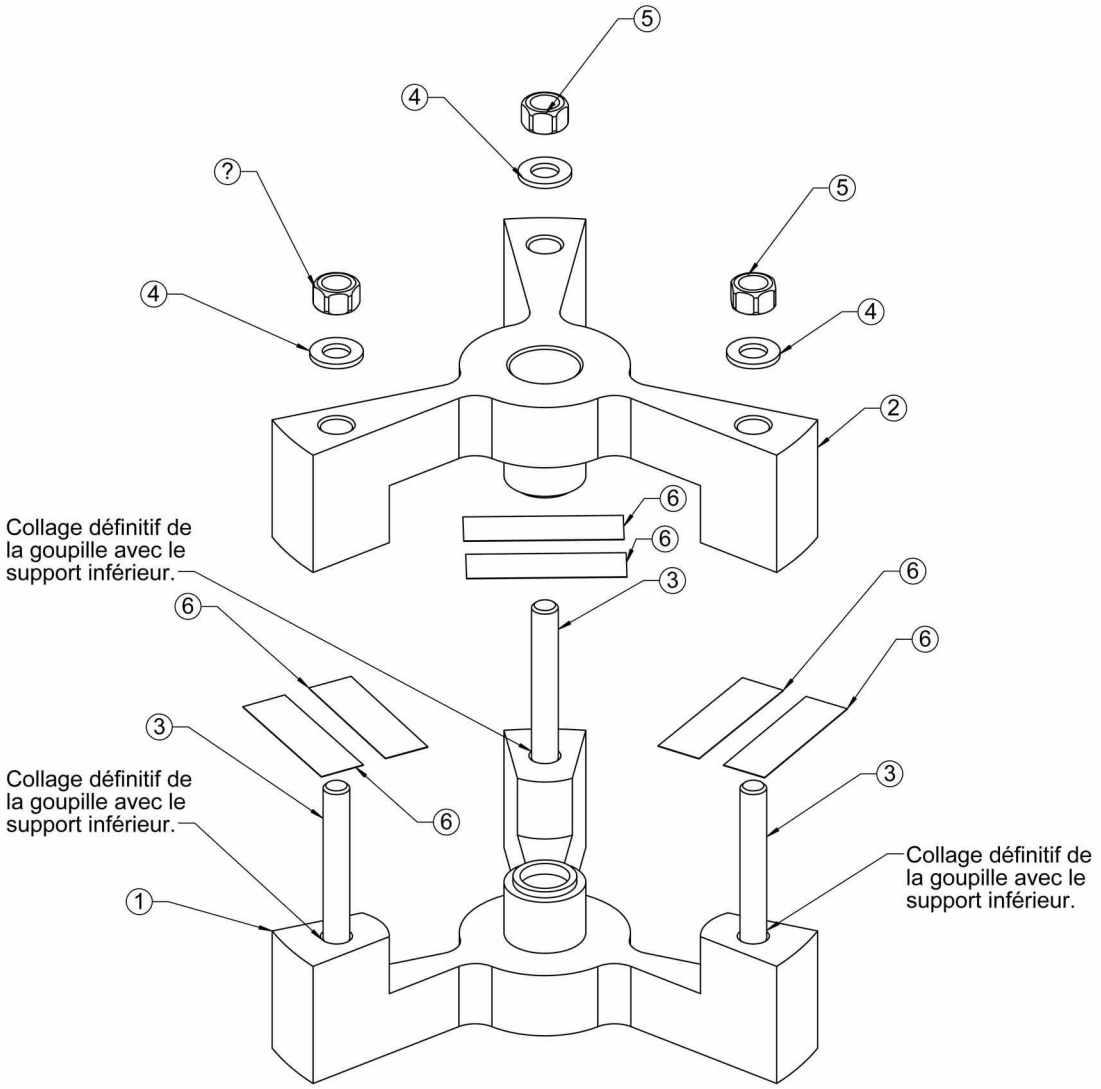
La procédure de fabrication (PF-01) prévoit de percer les trous de fixations et de centrage dans un bloc cylindrique unique qui sera ensuite scié en deux à mi-hauteur. Après repérage de chaque trou, les deux blocs ainsi obtenus seront usinés afin d'obtenir les éléments F-01 et F-02. Le centrage des éléments F-01 F-02 sera alors garanti à 10 µm en appariant les deux pièces convenablement et en utilisant des goupilles de précision adaptées (G-01).

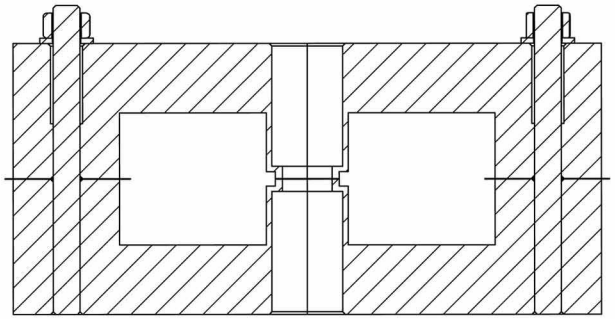
Enfin, la méthode de mesure impose que les deux microphones soient isolés électriquement. Le matériau choisi pour l'usinage des éléments F-01, F-02 et G-01 est donc l'alumine (AF997), connue pour ses propriétés d'isolant électrique et qui de plus, offre des propriétés mécaniques intéressantes en terme de rigidité.

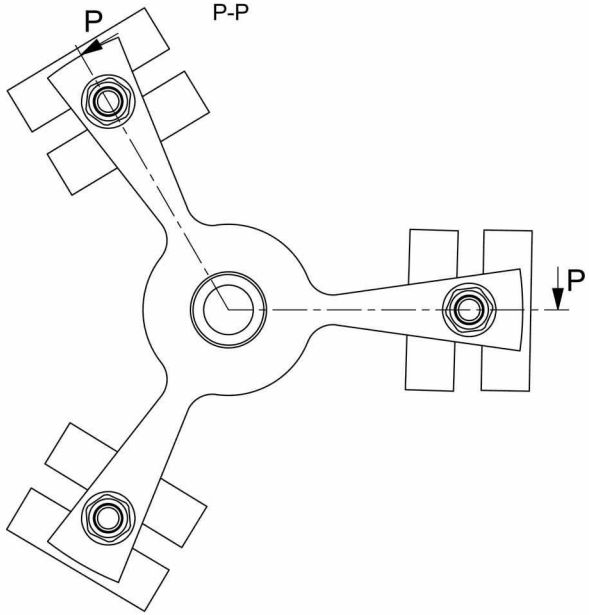
N.B. : Les plans qui suivent sont prévus à l'origine pour être imprimés sur un format A3, l'échelle est ici divisée par deux.

Bon pour Fabrication

ITEM N°	QTY.	PLAN N°	DESCRIPTION
1	1	F-01	Elément F-01
2	1	F-02	Elément F-02
3	3	G-01	Goupilles Ø5
4	3	R-01	Rondelles souples ISO7089 Ø5
5	3	E-01	Ecrous 6 pans M5
6	6	C-02	Cales ISO3650 h0.1

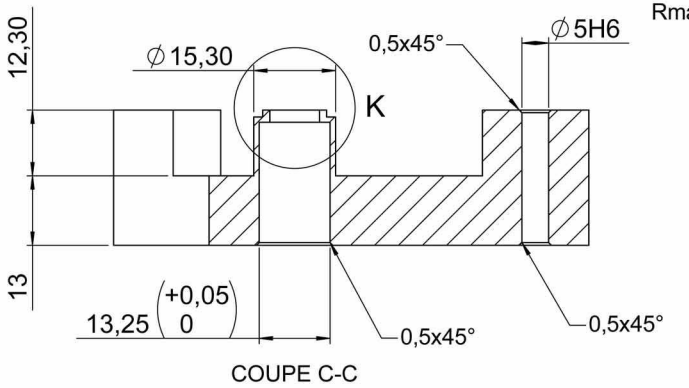




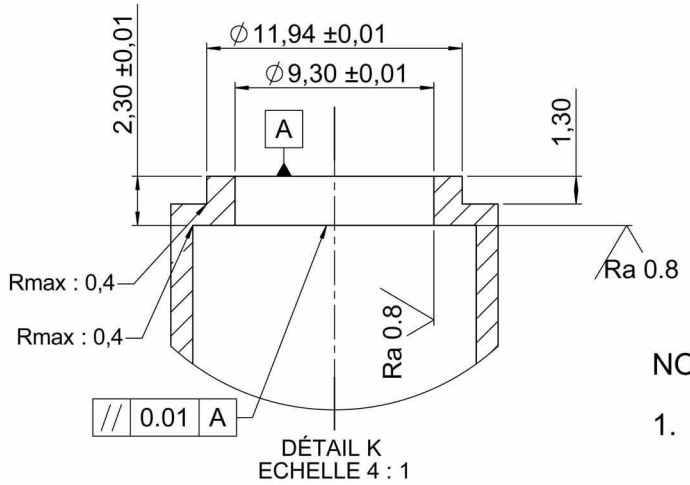


LES COTES SONT EN MILLIMETRES ETAT DE SURFACE : Ra 1,6 TOLERANCES GENERALES : ISO 2768-mK		Laboratoire National de métrologie et d'Essai		
Quantité : 1	TITRE : Assemblage coupleur fente			
TRAITEMENT :				
MATIERE :	PLAN N° : AF-01	REVISION : 05	A3	
DATE : 22/02/2007	ECHELLE : 1:1	PAGE 1 DE 1	NOM : DR	

Bon pour Fabrication



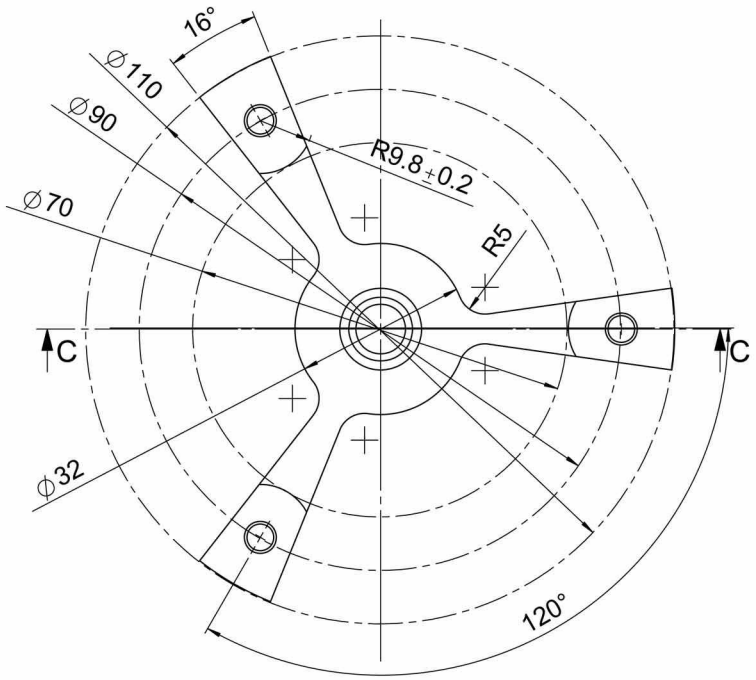
COUPE C-C

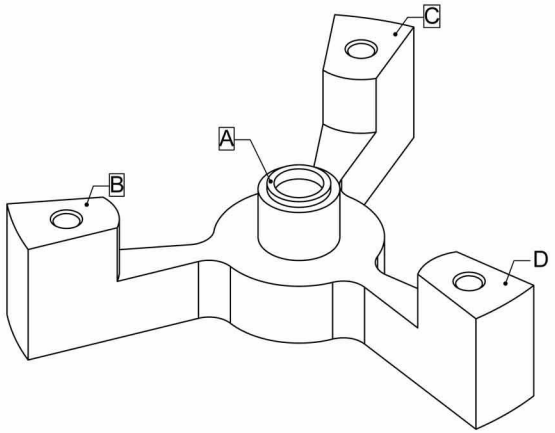


DÉTAIL K
ECHELLE 4 : 1

NOTE :

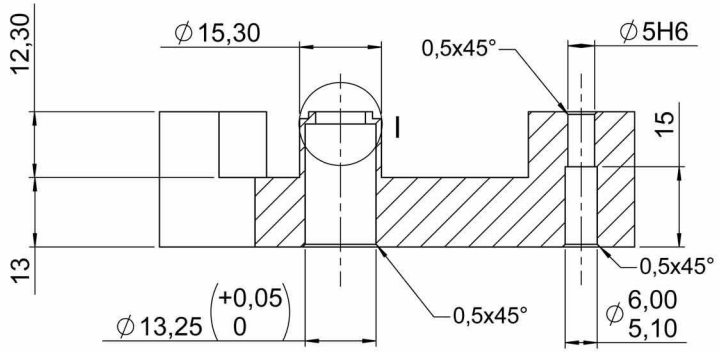
1. La fabrication doit respecter la procédure N° PF-01.
2. Superfinition par rodage des surfaces A, B, C et D pour obtenir une coplanarité des faces (Max 0,3µm). Rugosité Ra < 0,05.

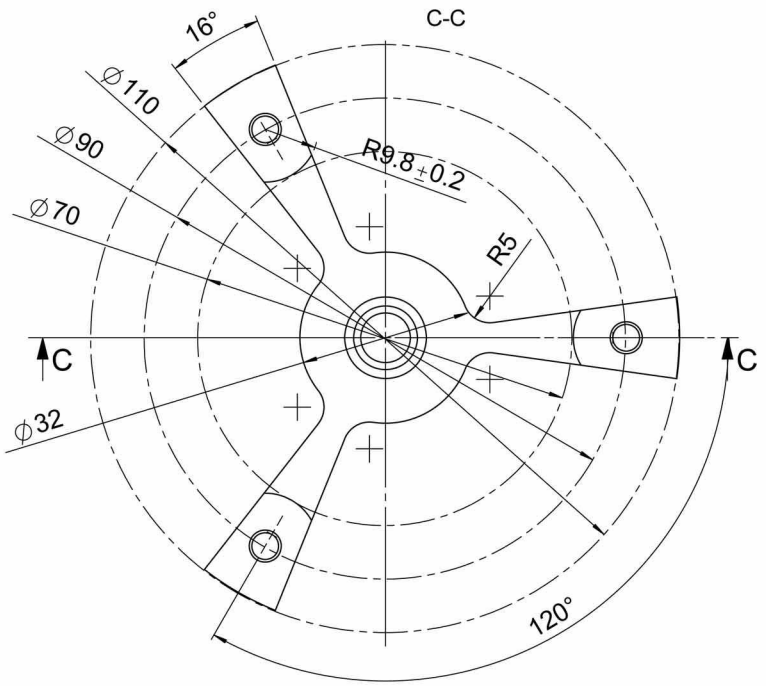


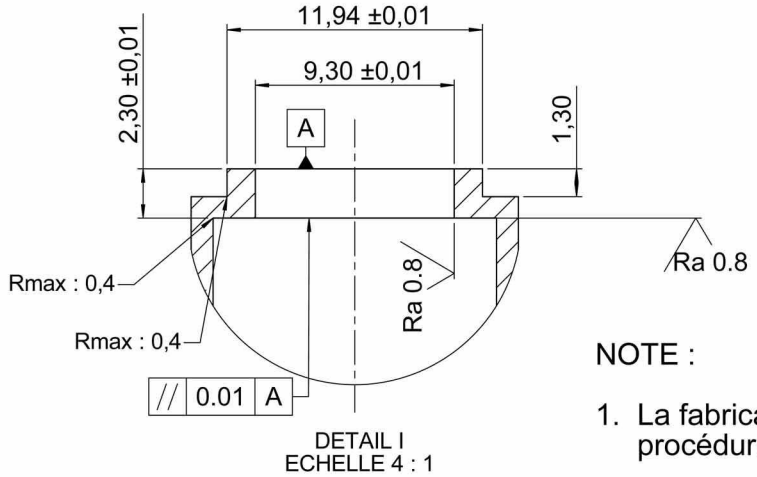


LES COTES SONT EN MILLIMETRES ETAT DE SURFACE : Ra 1,6 TOLERANCES GENERALES : ISO 2768-mK		Laboratoire National de métrologie et d'Essai		
Quantité : 1	TITRE : ELEMENT F-01			
TRAITEMENT :				
MATIERE : AF997	PLAN N° : F-01	REVISION : 05	A3	
DATE : 22/02/2007	ECHELLE: 1:1	PAGE 1 DE 1	NOM : DR	

Bon pour Fabrication

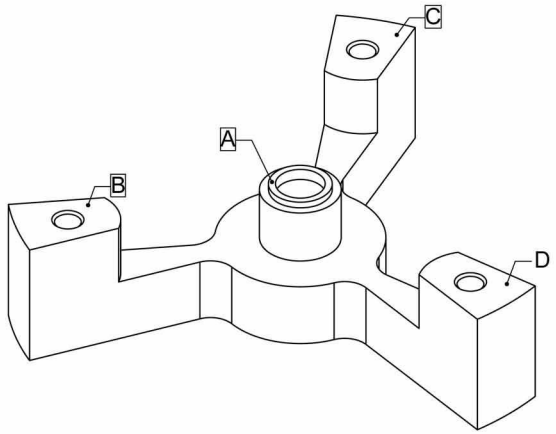






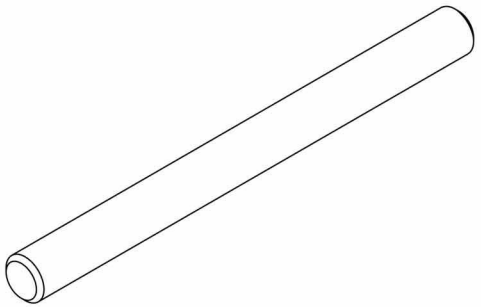
NOTE :

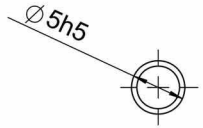
1. La fabrication doit respecter la procédure N° PF-01.
2. Superfinition par rodage des surfaces A, B, C et D pour obtenir une coplanarité des faces (Max 0,3µm). Rugosité Ra < 0,05.

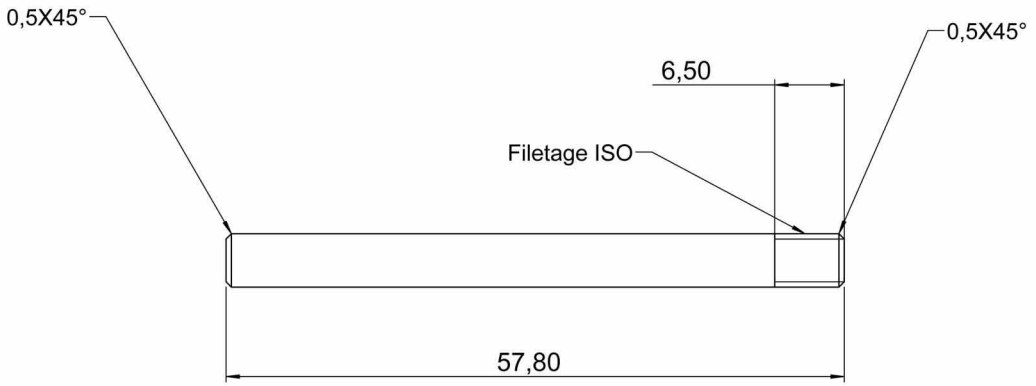


LES COTES SONT EN MILLIMETRES ETAT DE SURFACE : Ra 1,6 TOLERANCES GENERALES : ISO 2768-mK		Laboratoire National de métrologie et d'Essai
Quantité : 1	TITRE :	ELEMENT F-02
TRAITEMENT :		
MATIERE : AF997	PLAN N° : F-02	REVISION : 05 — A3
DATE : 22/02/2007	ECHELLE: 1:1	PAGE 1 DE 1 — NOM : DR

Bon pour Fabrication

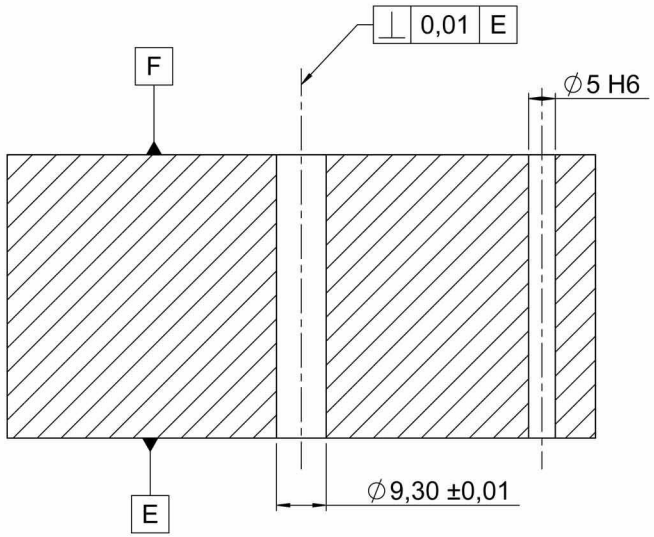




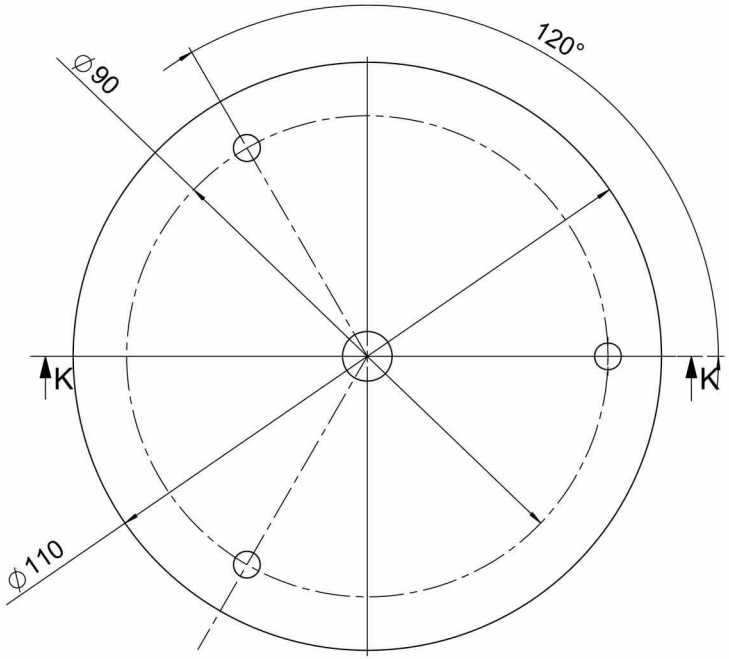


LES COTES SONT EN MILLIMETRES ETAT DE SURFACE : Ra 1,6 TOLERANCES GENERALES : ISO 2768-mK		Laboratoire National de métrologie et d'Essai
Quantité : 3	TITRE :	
TRAITEMENT :	Goupilles	
MATIERE : AF997	PLAN N° : G-01	REVISION : 05 — A3
DATE : 22/02/2007	ECHELLE: 2:1 — PAGE 1 DE 1	NOM : DR

1.



K-K

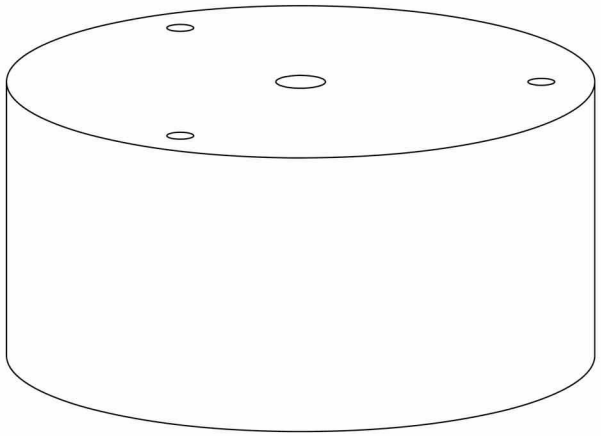


PROCEDURE :

1. Percage du trou central et des 3 trous ∅5 H6.

NOTE :

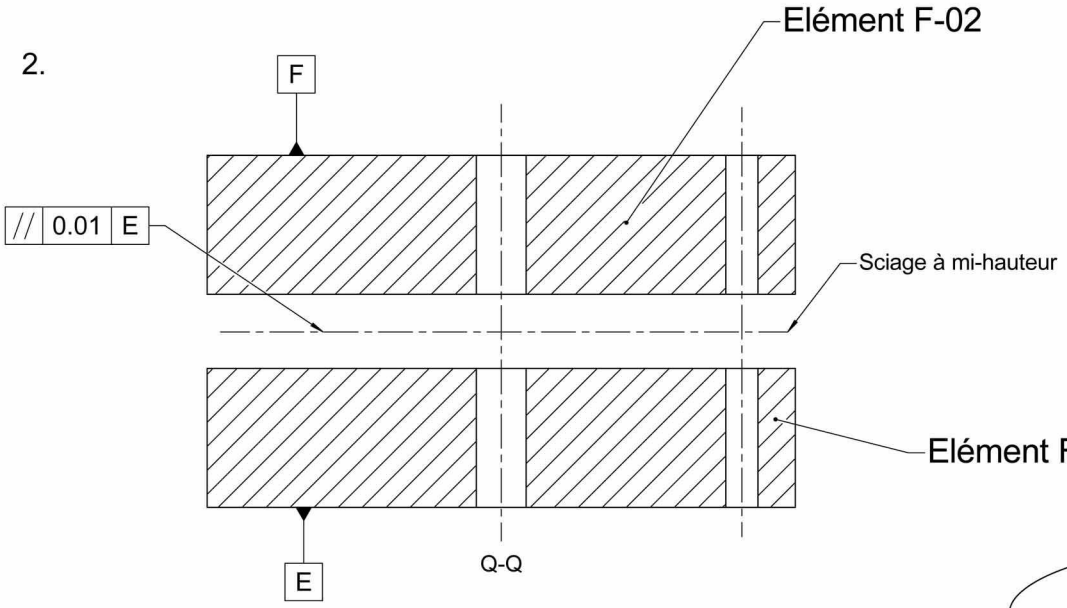
Hauteur du cylindre :
2X25,30 + épaisseurs d'usinages, rectifications
cf. pages suivantes.



Bon pour Fabrication

LES COTES SONT EN MILLIMETRES ETAT DE SURFACE : Ra 1,6 TOLERANCES GENERALES : ISO 2768-mK		Laboratoire National de métrologie et d'Essai		
Quantité : 1	TITRE : PROCEDURE DE FABRICATION DES ELEMENTS F-01 et F-02			
TRAITEMENT :				
MATIERE : AF997	PROCEDURE N° : PF-01	REVISION : 05	A3	
DATE : 22/02/2007	ECHELLE : 1:1	PAGE 1 DE 4	NOM : DR	

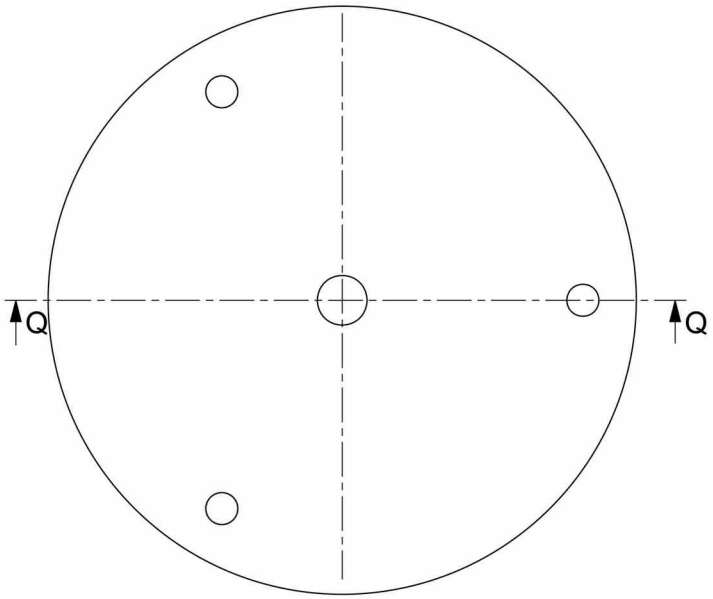
2.

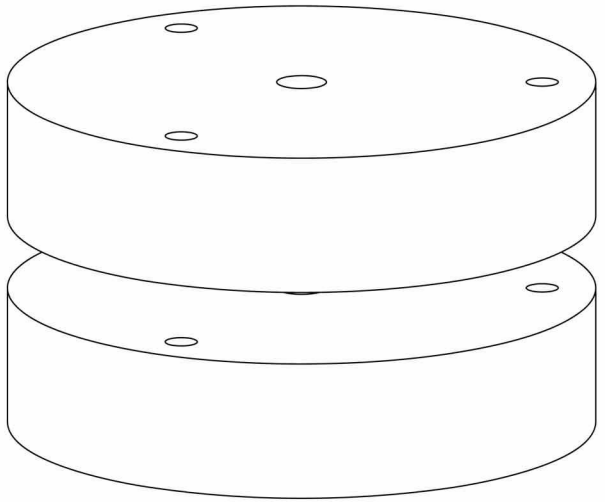


PROCEDURE :

2. Repérer les faces E et F,
   Sciage du cylindre à mi-hauteur, repérer les trous
   ∅6 H6 pour pouvoir appairer les pièces aprés sciage.

   Les éléments F-01 et F-02 sont ensuite usinées de la même façon.

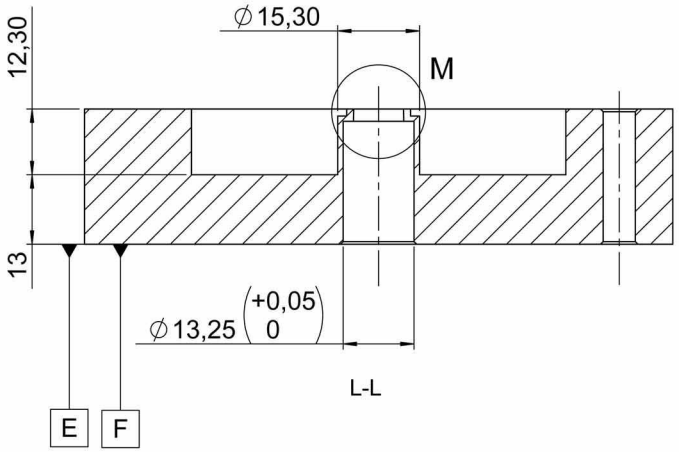


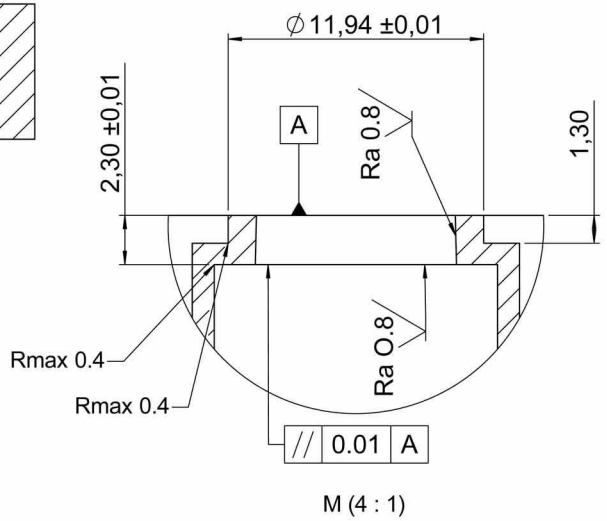


Bon pour Fabrication

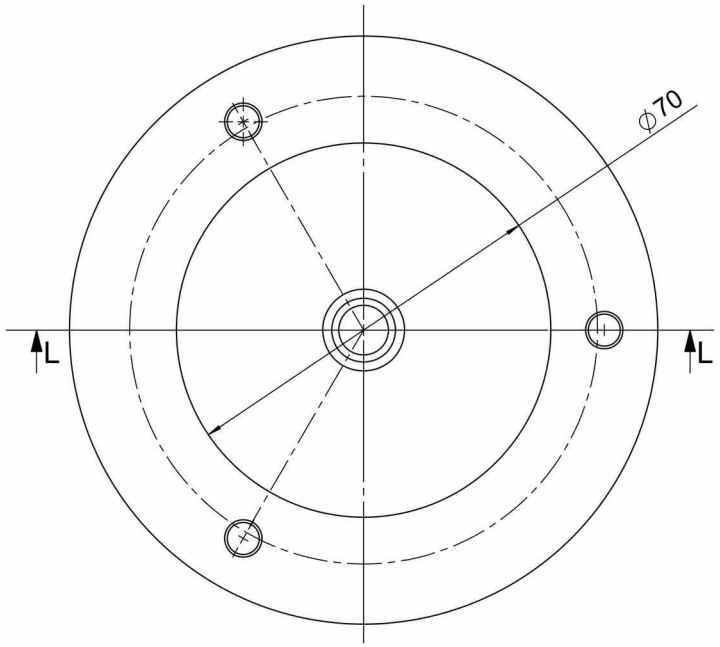
LES COTES SONT EN MILLIMETRES ETAT DE SURFACE : Ra 1,6 TOLERANCES GENERALES : ISO 2768-mK		Laboratoire National de métrologie et d'Essai
Quantité : 1 TRAITEMENT :	TITRE :	PROCEDURE DE FABRICATION DES ELEMENTS F-01 et F-02
MATIERE : AF997	PROCEDURE N° : PF-01	REVISION : 05 — A3
DATE : 22/02/2007	ECHELLE : 1:1 — PAGE 2 DE 4	NOM : DR

3.





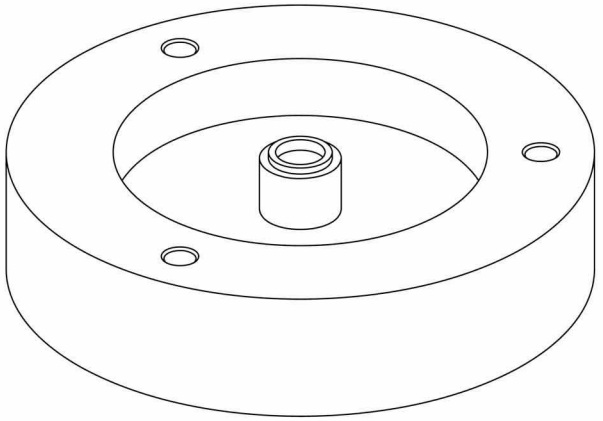
M (4 : 1)



Procédure :

Les éléments F0-1 et F0-2 sont usinés de la même façon.
Attention au repérage des faces E et F.

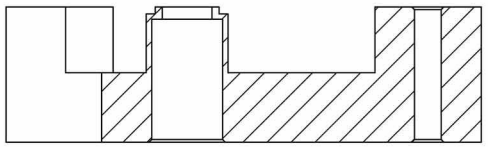
3. Chanfreins et autres usinages.



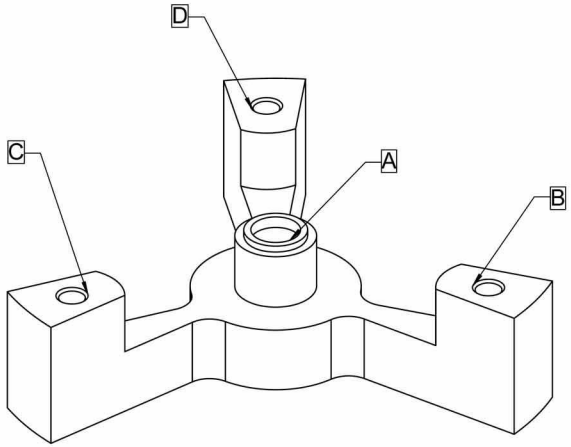
Bon pour Fabrication

LES COTES SONT EN MILLIMETRES ETAT DE SURFACE : Ra 1,6 TOLERANCES GENERALES : ISO 2768-mK		Laboratoire National de métrologie et d'Essai
Quantité : 2	TITRE :	PROCEDURE DE FABRICATION DES ELEMENTS F-01 et F-02
TRAITEMENT :		
MATIERE : AF997	PROCEDURE N° : PF-01	REVISION : 05 — A3
DATE : 22/02/2007	ECHELLE : 1:1 — PAGE 3 DE 4	NOM : DR

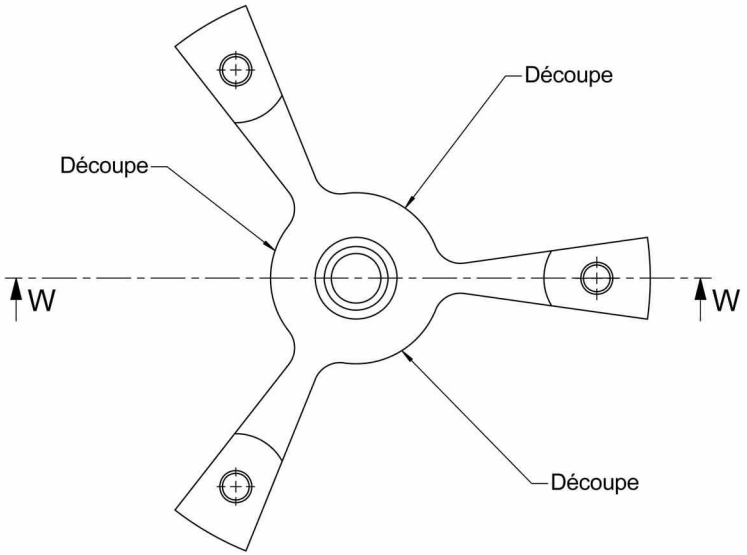
4. 5.



W-W



Bon pour Fabrication



PROCEDURE :

La pièce représentée ici est la pièce F-01.

4. Découpes + autres usinages.
   Note : veiller à ce que la méthode de découpage ne déforme pas la pièce.

5. Superfinition par rodage des surfaces A, B, C, D pour obtenir une coplanarité des faces, Max 0,3µm, Ra < 0.05.

LES COTES SONT EN MILLIMETRES ETAT DE SURFACE : Ra 1,6 TOLERANCES GENERALES : ISO 2768-mK		Laboratoire National de métrologie et d'Essai		
Quantité : 2	TITRE : PROCEDURE DE FABRICATION DES ELEMENTS F-01 et F-02			
TRAITEMENT :				
MATIERE : AF997	PROCEDURE N° : PF-01	REVISION : 05	A3	
DATE : 22/02/2007	ECHELLE : 1:1	PAGE 4 DE 4	NOM : DR	

C.2 Coupleur pourvu d'un réseau de quatre tubes de haute précision

Le coupleur à réaliser est décrit par les plans N°:

- A1-01 : assemblage du coupleur,
- T-01 : coupleur,
- T-02 : tubes.

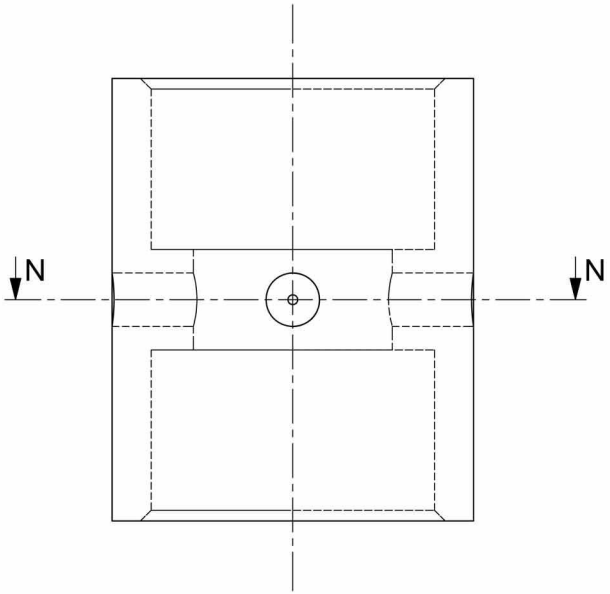
Les techniques de perçage usuelles (foret, laser ou électroérosion) ne permettent pas de percer des trous avec le rapport rayon/longueur demandé et avec la précision requise. La solution retenue consiste à mouler des petits cylindres en alumine autour d'un fil de diamètre connu au µm près. Après démoulage, les petits cylindres obtenus (T-02) sont ensuite adaptés et encastrés dans le coupleur (T-01). La forme concave à l'intérieur du coupleur est reproduite sur une extrémité des cylindres (T-01) afin d'exclure toute discontinuité importante.

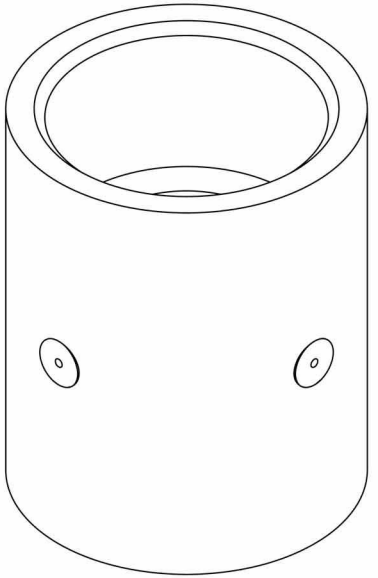
Le matériau choisi pour l'usinage des éléments T-01 et T-02 est l'alumine (AF997), connue pour ses propriétés d'isolant électrique et qui de plus, offre des propriétés mécaniques intéressantes en terme de rigidité.

Le coupleur obtenu est présenté sur la figure C.1.

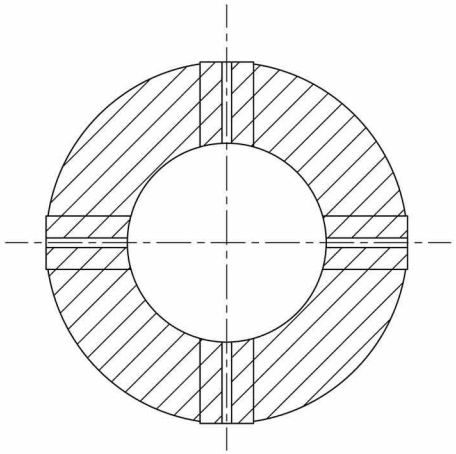
Figure C.1. Coupleur de haute précision pourvu d'un réseau de quatre tubes ouverts.

N.B. : Les plans qui suivent sont prévus à l'origine pour être imprimés sur un format A3, l'échelle est ici divisée par deux.

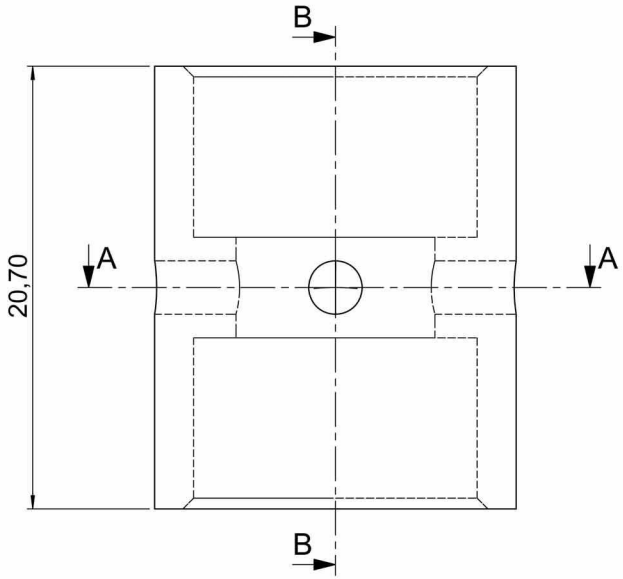


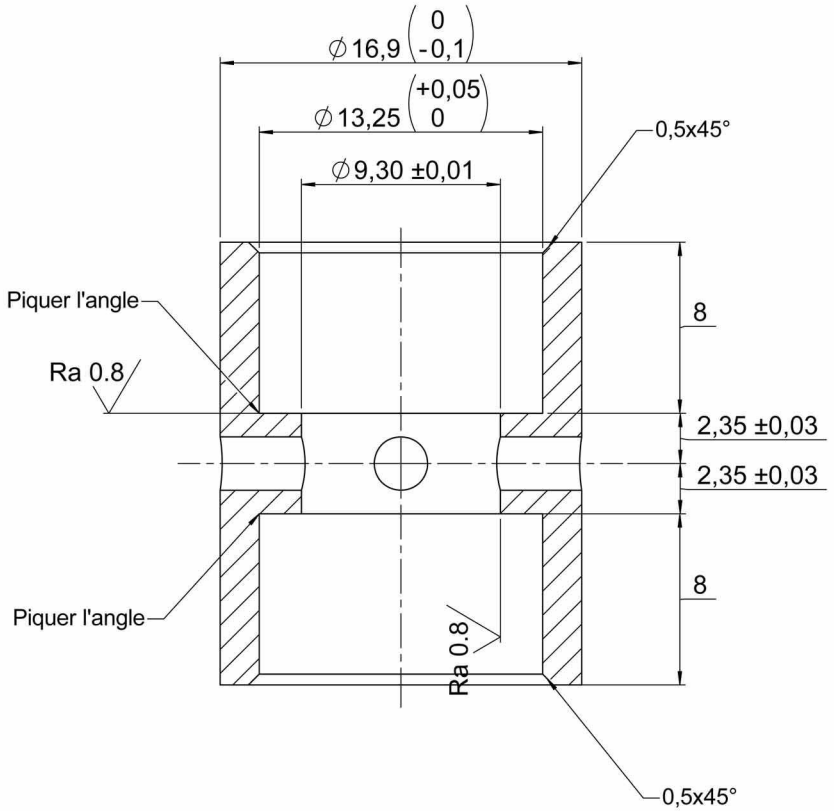


ECHELLE 1:1

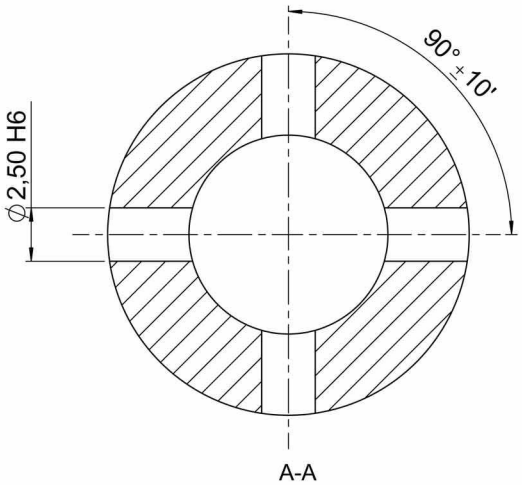


LES COTES SONT EN MILLIMETRES ETAT DE SURFACE : Ra 1,6 TOLERANCES GENERALES : ISO 2768-mK		Laboratoire National de métrologie et d'Essai		
Quantité : 1	TITRE :			
TRAITEMENT :	ASSEMBLAGE COUPLEUR 4 TROUS			
MATIERE :	DESSIN N° : AT-01	REVISION : 01	A3	
DATE : 04/07/2007	ECHELLE : 4:1	PAGE 1 DE 1	NOM : DR	





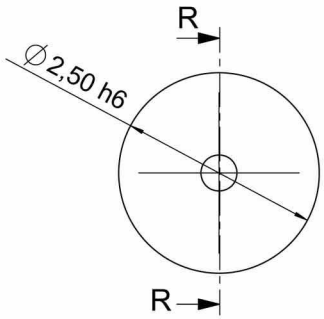
B-B

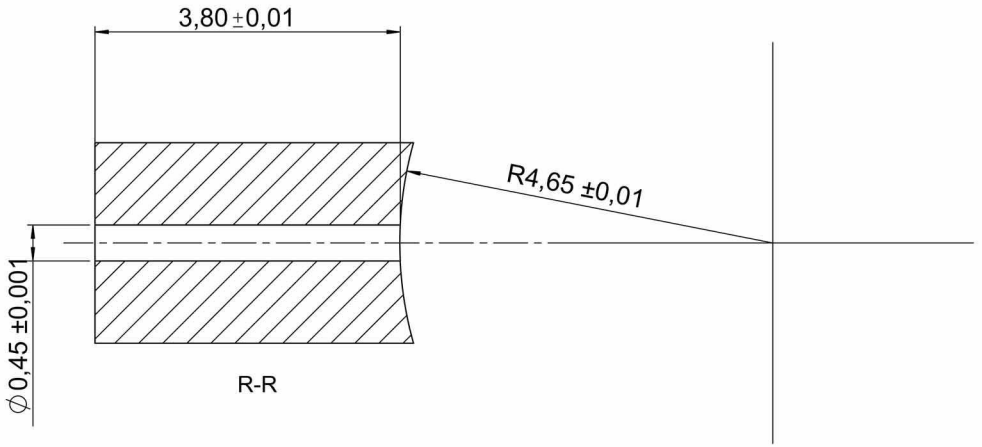


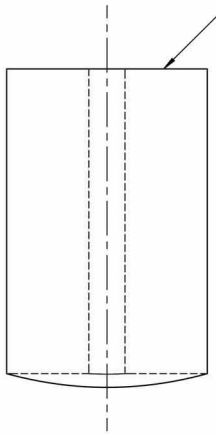
A-A

ECHELLE 1:1

LES COTES SONT EN MILLIMETRES ETAT DE SURFACE : Ra 1,6 TOLERANCES GENERALES : ISO 2768-mK		Laboratoire National de métrologie et d'Essai
Quantité : 1 TRAITEMENT :	TITRE :	ELEMENT T-01
MATIERE : ZRO2/Y	DESSIN N° : T-01	REVISION : 01 / A3
DATE : 04/07/2007	ECHELLE : 4:1 / PAGE 1 DE 1 / NOM : DR	



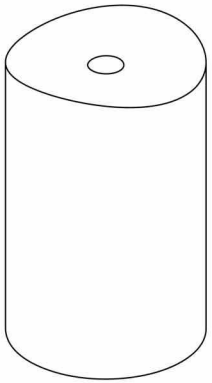




Note:

Des encoches peuvent être prévues
en périphérie sur cette face pour faciliter
le montage.

La forme de cette face n'est pas imposée,
la longeur du trou doit néanmoins être conservée.



LES COTES SONT EN MILLIMETRES ETAT DE SURFACE : Ra 1,6 TOLERANCES GENERALES : ISO 2768-mK		Laboratoire National de métrologie et d'Essai		
Quantité : 4	TITRE :	ELEMENT T-02		
TRAITEMENT :				
MATIERE : ZRO2/Y	DESSIN N° : T-02	REVISION : 00	A3	
DATE : 20/10/2006	ECHELLE : 15:1	PAGE 1 DE 1	NOM : DR	

Annexe D

Calculs intermédiaires dans la résolution des problèmes posés dans le chapitre 2

Cette Annexe traite de la résolution des problèmes posés dans les paragraphes 2.3 et 2.4. Celui posé dans le paragraphe 2.3 est un cas particulier du problème posé dans le paragraphe 2.4. Ainsi, les propos qui suivent ne traitent que de la résolution du problème général, les solutions du problème posé dans le paragraphe 2.3 se déduisant aisément des équations de couplage données ci-dessous.

Les coefficients inconnus du problème posé dans le paragraphe 2.4 forment six ensembles : $p_{\ell e\mu}$, $p_{\ell r\mu}$, B_{0e}, $\xi_{e\mu}$, B_{0r} et $\xi_{r\mu}$ définis respectivement par les équations (2.82), (2.89), (2.85.a et b) et (2.93.a et b) couplés au champ de pression dans la cavité de couplage (Eqs. (2.73), (2.74), (2.75) et (2.76.a et b)). Compte tenu du nombre important d'équations couplées, la résolution du problème est effectuée en écrivant ces équations sous forme matricielle. C'est l'objet de cette Annexe que de présenter ces calculs.

D.1 Calculs intermédiaires

i. Expression des constantes d'intégration $p_\mu(z)$

Les constantes d'intégration $p_\mu(z)$ sont données par l'expression (2.75) rappelée ci-dessous

$$p_\mu(z)=\frac{-\omega^2\rho_0}{1-K_v}[g_\mu(z,0)\langle\xi_e(w_0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle_e+g_\mu(z,\ell)\langle\xi_r(w_0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle_r]\,,$$

où les coefficients $g_\mu(z,z_0)$ sont donnés par les équations (2.76.a et b). Le produit scalaire

$$\langle\xi_e(w_0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle_e=2\pi\int_0^{a_e}\xi_e(w_0)\,\Xi_\mu(w_0)\,w_0\,dw_0 \qquad \text{(D.1.a)}$$

s'écrit d'après les équations (2.74), (2.83) et (2.84) (en faisant usage de la propriété (E.4)) :

$$\begin{cases} \langle \xi_e(w_0)|\Xi_0(w_0)\rangle_e = \left[\dfrac{\sqrt{\pi}\,a_e^2}{a} - \dfrac{J_1(k_{we}a_e)}{J_0(k_{we}a_e)}\dfrac{2\sqrt{\pi}\,a_e/a}{k_{we}}\right]B_{0e} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_e/a}{j_n}\xi_{en}, & \text{pour } \mu=0 \\ \langle \xi_e(w_0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle_e = \left[\dfrac{2\sqrt{\pi}\,a_e}{\gamma_\mu}\dfrac{J_1(\gamma_\mu a_e/a)}{J_0(\gamma_\mu)} - \dfrac{2\sqrt{\pi}\,a_e/a}{J_0(\gamma_\mu)J_0(k_{we}a_e)}\dfrac{1}{(\gamma_\mu/a)^2-k_{we}^2}\right. & \\ \quad .\left.\left[\dfrac{\gamma_\mu}{a}J_0(k_{we}a_e)J_1(\gamma_\mu a_e/a) - k_{we}J_0(\gamma_\mu a_e/a)J_1(k_{we}a_e)\right]\right]B_{0e} & \text{pour } \mu\geq 1, \\ \qquad\qquad + 2\dfrac{J_0(\gamma_\mu a_e/a)}{J_0(\gamma_\mu)}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{j_n a_e/a}{j_n^2-(\gamma_\mu a_e/a)^2}\xi_{en}, & \end{cases} \tag{D.1.b}$$

et le produit scalaire

$$\langle \xi_r(w_0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle_r = 2\pi\int_0^{a_r}\xi_r(w_0)\Xi_\mu(w_0)w_0\,dw_0 \tag{D.2.a}$$

s'écrit d'après les équations (2.74), (2.91) et (2.92) (en faisant usage de la propriété (E.4)) :

$$\begin{cases} \langle \xi_r(w_0)|\Xi_0(w_0)\rangle_r = \left[\dfrac{\sqrt{\pi}\,a_r^2}{a} - \dfrac{J_1(k_{we}a_r)}{J_0(k_{wr}a_r)}\dfrac{2\sqrt{\pi}\,a_r/a}{k_{wr}}\right]B_{0r} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_r/a}{j_n}\xi_{rn}, & \text{pour } \mu=0 \\ \langle \xi_r(w_0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle_r = \left[\dfrac{2\sqrt{\pi}\,a_r}{\gamma_\mu}\dfrac{J_1(\gamma_\mu a_r/a)}{J_0(\gamma_\mu)} - \dfrac{2\sqrt{\pi}\,a_r/a}{J_0(\gamma_\mu)J_0(k_{wr}a_r)}\dfrac{1}{(\gamma_\mu/a)^2-k_{wr}^2}\right. & \\ \quad .\left.\left[\dfrac{\gamma_\mu}{a}J_0(k_{wr}a_r)J_1(\gamma_\mu a_r/a) - k_{wr}J_0(\gamma_\mu a_r/a)J_1(k_{we}a_r)\right]\right]B_{0r} & \text{pour } \mu\geq 1. \\ \qquad\qquad + 2\dfrac{J_0(\gamma_\mu a_r/a)}{J_0(\gamma_\mu)}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{j_n a_r/a}{j_n^2-(\gamma_\mu a_r/a)^2}\xi_{rn}, & \end{cases} \tag{D.2.b}$$

ii. Expression des constantes d'intégration $p_{\ell e\mu}$ et $p_{\ell r\mu}$

Les coefficients $p_{\ell e\mu}$ et $p_{\ell r\mu}$ sont respectivement définis par les équations (2.82) et (2.89) rappelées ci-dessous :

$$p_{\ell e\mu} = \frac{-\omega^2\rho_0}{F_{ve}\epsilon_e}\frac{\langle \xi_e(w_0)|\Psi_{\ell e\mu}(w_0)\rangle_{ele}}{\chi_e^2-(j_\mu/a_{ele})^2},$$
$$p_{\ell r\mu} = \frac{\omega^2\rho_0}{F_{vr}\epsilon_r}\frac{\langle \xi_r(w_0)|\Psi_{\ell r\mu}(w_0)\rangle_{elr}}{\chi_r^2-(j_\mu/a_{elr})^2}.$$

Les produits scalaires $\langle \xi_e(w_0)|\Xi_{e\mu}(w_0)\rangle_e$ et $\langle \xi_r(w_0)|\Xi_{r\mu}(w_0)\rangle_r$ sont respectivement donnés par les solutions (D.1.b) et (D.2.b) avec $a=a_e$ pour le premier et $a=a_r$ pour le second. Les coefficients $p_{\ell e\mu}$ et $p_{\ell r\mu}$ s'écrivent alors

$$p_{\ell e\mu} = \frac{-\omega^2\rho_0 l/(F_{ve}\epsilon_e)}{\chi_e^2-(\gamma_\mu/a_e)^2}\left[\left(\sqrt{\pi}\,a_e\delta_{\mu 0} - \frac{J_1(k_{we}a_e)}{J_0(k_{we}a_e)}\frac{2\sqrt{\pi}\,k_{we}}{k_{we}^2-(\gamma_\mu/a_e)^2}\right)B_{0e} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{j_n}{j_n^2-\gamma_\mu^2}\xi_{en}\right] \tag{D.3}$$

et

$$p_{\ell r\mu}=\frac{\omega^2\rho_0/(F_{vr}\epsilon_r)}{\chi_r^2-(\gamma_\mu/a_r)^2}\left[\left(\sqrt{\pi}\,a_r\,\delta_{\mu 0}-\frac{J_1(k_{wr}a_r)}{J_0(k_{wr}a_r)}\frac{2\sqrt{\pi}\,k_{wr}}{k_{wr}^2-(\gamma_\mu/a_r)^2}\right)B_{0\mathrm{r}}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{j_n}{j_n^2-\gamma_\mu^2}\xi_{rn}\right] \tag{D.4}$$

où $\delta_{\mu 0}$ est le symbole de Kronecker.

iii. Expression des constantes d'intégration B_{0e} et $\xi_{e\mu}$

La constante B_{0e} est définie par l'équation (2.85.a) rappelée ci-dessous :

$$B_{0e}=\frac{p(a_e,0)-p_{\ell e}(a_e)-p_s}{T_{me}k_{we}^2}\,.$$

En utilisant les expressions (2.73) et (2.80) respectivement pour les champs de pression $p(w,z)$ et $p_{\ell e}(w)$, il vient

$$B_{0e}=\frac{\sum_{\mu=0}^{\infty}p_\mu(0)\Xi_\mu(a_e)-\sum_{\mu=0}^{\infty}p_{\ell e\mu}\Xi_{e\mu}(a_e)-p_s}{T_{me}k_{we}^2}\,. \tag{D.5}$$

Les coefficients $\xi_{e\mu}$ sont définis par l'équation (2.85.b) rappelée ci-dessous :

$$\xi_{e\mu}=\frac{\langle p(w_0,0)-p(a_e,0)|\Psi_{e\mu}(w_0)\rangle_e-\langle p_{\ell e}(w_0)-p_{\ell e}(a_e)|\Psi_{e\mu}(w_0)\rangle_e}{T_{me}(k_{we}^2-(j_\mu/a_e)^2)}\,.$$

En utilisant les expressions (2.73) et (2.80) respectivement pour les champs de pression $p(w,z)$ et $p_{\ell e}(w)$, il vient

$$\xi_{e\mu}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}p_n(0)\langle\Xi_n(w_0)-\Xi_n(a_e)|\Psi_{e\mu}(w_0)\rangle_e-\sum_{n=0}^{\infty}p_{\ell en}\langle\Xi_{en}(w_0)-\Xi_{en}(a_e)|\Psi_{e\mu}(w_0)\rangle_e}{T_{me}(k_{we}^2-(j_\mu/a_e)^2)} \tag{D.6}$$

où (d'après les équations (2.74), (2.84) et la propriété (E.4))

$$\langle\Xi_n(w_0)-\Xi_n(a_e)|\Psi_{e\mu}(w_0)\rangle_e=2\frac{J_0(\gamma_n a_e/a)}{J_0(\gamma_n)}\left(\frac{j_\mu a_e/a}{(j_\mu)^2-(\gamma_n a_e/a)^2}-\frac{a_e/a}{j_\mu}\right), \tag{D.7}$$

et où (d'après les équations (2.81), (2.84) et la propriété (E.4))

$$\langle\Xi_{en}(w_0)-\Xi_{en}(a_e)|\Psi_{e\mu}(w_0)\rangle_e=2\left(\frac{j_\mu}{j_\mu^2-\gamma_n^2}-\frac{1}{j_\mu}\right). \tag{D.8}$$

iv. Expression des constantes d'intégration B_{0r} et $\xi_{r\mu}$

La constante B_{0r} est définie par l'équation (2.93.a) rappelée ci-dessous :

$$B_{0\mathrm{r}}=-\frac{p(a_r,\ell)-p_{\ell r}(a_r)}{T_{mr}k_{wr}^2}\,.$$

En utilisant les expressions (2.73) et (2.87) respectivement pour les champs de pression $p(w,z)$ et $p_{\ell r}(w)$, il vient

$$B_{0\mathrm{r}}=-\frac{\sum_{\mu=0}^{\infty} p_{\mu}(\ell)\,\Xi_{\mu}(a_r)-\sum_{\mu=0}^{\infty} p_{\ell r\mu}\,\Xi_{r\mu}(a_r)}{T_{mr}k_{wr}^2}\,. \tag{D.9}$$

Les coefficients $\xi_{r\mu}$ sont définis par l'équation (2.93.b) rappelée ci-dessous :

$$\xi_{r\mu}=-\frac{\left\langle p(w_0,\ell)-p(a_r,\ell)\middle|\Psi_{r\mu}(w_0)\right\rangle_r-\left\langle p_{\ell r}(w_0)-p_{\ell r}(a_r)\middle|\Psi_{r\mu}(w_0)\right\rangle_r}{T_{mr}(k_{wr}^2-(j_{\mu}/a_r)^2)}\,.$$

En utilisant les expressions (2.73) et (2.87) respectivement pour les champs de pression $p(w,z)$ et $p_{\ell r}(w)$, il vient

$$\xi_{r\mu}=-\frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n(\ell)\left\langle \Xi_n(w_0)-\Xi_n(a_r)\middle|\Psi_{r\mu}(w_0)\right\rangle_r-\sum_{n=0}^{\infty} p_{\ell rn}\left\langle \Xi_{rn}(w_0)-\Xi_{rn}(a_r)\middle|\Psi_{r\mu}(w_0)\right\rangle_r}{T_{mr}(k_{wr}^2-(j_{\mu}/a_r)^2)}\,, \tag{D.10}$$

où (d'après les équations (2.74), (2.92) et la propriété (E.4))

$$\left\langle \Xi_n(w_0)-\Xi_n(a_r)|\Psi_{r\mu}(w_0)\right\rangle_r=2\frac{J_0(\gamma_n a_r/a)}{J_0(\gamma_n)}\left(\frac{j_{\mu}a_r/a}{(j_{\mu})^2-(\gamma_n a_r/a)^2}-\frac{a_r/a}{j_{\mu}}\right), \tag{D.11}$$

et où (d'après les équations (2.88), (2.92) et la propriété (E.4))

$$\left\langle \Xi_{rn}(w_0)-\Xi_{rn}(a_r)\middle|\Psi_{r\mu}(w_0)\right\rangle_r=2\left(\frac{j_{\mu}}{j_{\mu}^2-\gamma_n^2}-\frac{1}{j_{\mu}}\right). \tag{D.12}$$

D.2 Résolution du problème couplé

Rappelons que les coefficients inconnus du problème couplé défini au paragraphe 2.4 forment six ensembles : $p_{\ell e\mu}$, $p_{\ell r\mu}$, B_{0e}, $\xi_{e\mu}$, B_{0r} et $\xi_{r\mu}$ définis respectivement par les équations (2.82), (2.89), (2.85.a et b) et (2.93.a et b) couplés au champ de pression dans la cavité de couplage (Eqs. (2.73), (2.74), (2.75) et (2.76.a et b)).

D.2.1 Ecriture matricielle des équations du problème

i. Constantes d'intégration $p_{\mu}(z)$

Les constantes d'intégration $p_{\mu}(z)$, définies par l'équation (2.75) s'écrivent en fonction de B_{0e}, $\xi_{e\mu}$, B_{0r} et $\xi_{r\mu}$ sous la forme matricielle suivante :

$$p_{\mu}(z)=d_0^e(z)\,B_{0e}+D_0^e(z)\,\xi_{e\mu}+d_0^r(z)\,B_{0r}+D_0^r(z)\,\xi_{r\mu}\,, \tag{D.13}$$

où $d_0^e(z)$ et $d_0^r(z)$ sont des vecteurs colonnes définis par (Eqs. (2.75), (D.1.b) et (D.2.b))

$$\begin{cases} \left[d_0^e(z)\right]_0 = \dfrac{-\omega^2\rho_0}{1-K_v} g_0(z,0)\left[\dfrac{\sqrt{\pi}\,a_e^2}{a} - \dfrac{J_1(k_{we}a_e)}{J_0(k_{we}a_e)}\dfrac{2\sqrt{\pi}\,a_e/a}{k_{we}}\right], & j=0, \\ \left[d_0^e(z)\right]_j = \dfrac{-\omega^2\rho_0}{1-K_v} g_j(z,0)\left[\dfrac{2\sqrt{\pi}\,a_e}{\gamma_j}\dfrac{J_1(\gamma_j a_e/a)}{J_0(\gamma_j)} - \dfrac{2\sqrt{\pi}\,a_e/a}{J_0(\gamma_j)J_0(k_{we}a_e)}\dfrac{1}{(\gamma_j/a)^2-k_{we}^2}\right. & j\geq 1, \\ \qquad\qquad \left.\cdot\left[\dfrac{\gamma_j}{a}J_0(k_{we}a_e)J_1(\gamma_j a_e/a) - k_{we}J_0(\gamma_j a_e/a)J_1(k_{we}a_e)\right]\right], \end{cases} \tag{D.14}$$

et

$$\begin{cases} \left[d_0^r(z)\right]_0 = \dfrac{-\omega^2\rho_0}{1-K_v} g_0(z,\ell)\left[\dfrac{\sqrt{\pi}\,a_r^2}{a} - \dfrac{J_1(k_{wr}a_r)}{J_0(k_{wr}a_r)}\dfrac{2\sqrt{\pi}\,a_r/a}{k_{wr}}\right], & j=0, \\ \left[d_0^r(z)\right]_j = \dfrac{-\omega^2\rho_0}{1-K_v} g_j(z,\ell)\left[\dfrac{2\sqrt{\pi}\,a_r}{\gamma_j}\dfrac{J_1(\gamma_j a_r/a)}{J_0(\gamma_j)} - \dfrac{2\sqrt{\pi}\,a_r/a}{J_0(\gamma_j)J_0(k_{wr}a_r)}\dfrac{1}{(\gamma_j/a)^2-k_{wr}^2}\right. & j\geq 1, \\ \qquad\qquad \left.\cdot\left[\dfrac{\gamma_j}{a}J_0(k_{wr}a_r)J_1(\gamma_j a_r/a) - k_{wr}J_0(\gamma_j a_r/a)J_1(k_{wr}a_r)\right]\right], \end{cases} \tag{D.15}$$

et où $D_0^e(z)$ et $D_0^r(z)$ sont des matrices carrées définies par (Eqs. (2.75), (D.1.b) et (D.2.b))

$$\left[D_0^e(z)\right]_{i,j} = \frac{-2\omega^2\rho_0}{1-K_v} g_j(z,0)\frac{J_0(\gamma_j a_e/a)}{J_0(\gamma_j)}\frac{j_i a_e/a}{j_i^2-(\gamma_j a_e/a)^2} \tag{D.16}$$

et

$$\left[D_0^r(z)\right]_{i,j} = \frac{-2\omega^2\rho_0}{1-K_v} g_j(z,\ell)\frac{J_0(\gamma_j a_r/a)}{J_0(\gamma_j)}\frac{j_i a_r/a}{j_i^2-(\gamma_j a_r/a)^2}, \tag{D.17}$$

les coefficients $g_j(z,z_0)$ étant définies par l'équation (2.76).

ii. Constantes d'intégration $p_{\ell e\mu}$ et $p_{\ell r\mu}$

Les constantes d'intégration $p_{\ell e\mu}$ et $p_{\ell r\mu}$ définies par les équations (D.3) et (D.4) s'écrivent en fonction de B_{0e}, $\xi_{e\mu}$, B_{0r} et $\xi_{r\mu}$ sous les formes matricielles suivantes :

$$p_{\ell e\mu} = d_1^e B_{0e} + D_1^e \xi_{e\mu} \tag{D.18}$$

et

$$p_{\ell r\mu} = -d_1^r B_{0r} - D_1^r \xi_{r\mu}, \tag{D.19}$$

où d_1^e et d_1^r sont des vecteurs colonnes définis par (Eq. (D.3))

$$\left[d_1^e\right]_j = \frac{-\omega^2\rho_0/(F_{ve}\epsilon_e)}{\chi_e^2-(\gamma_j/a_e)^2}\left(\sqrt{\pi}\,a_e\delta_{j0} - \frac{J_1(k_{we}a_e)}{J_0(k_{we}a_e)}\frac{2\sqrt{\pi}\,k_{we}}{k_{we}^2-(\gamma_j/a_e)^2}\right) \tag{D.20}$$

et (Eq. (D.4))

$$\left[d_1^r\right]_j = \frac{-\omega^2\rho_0/(F_{vr}\epsilon_r)}{\chi_r^2-(\gamma_j/a_r)^2}\left(\sqrt{\pi}\,a_r\delta_{j0} - \frac{J_1(k_{wr}a_r)}{J_0(k_{wr}a_r)}\frac{2\sqrt{\pi}\,k_{wr}}{k_{wr}^2-(\gamma_j/a_r)^2}\right), \tag{D.21}$$

et où D_1^e et D_1^r sont des matrices carrées définies par (Eq. (D.3))

$$\left[D_1^e\right]_{i,j}=\frac{-2\omega^2\rho_0/(F_{ve}\epsilon_e)}{\chi_e^2-(\gamma_j/a_e)^2}\frac{j_i}{j_i^2-\gamma_j^2} \tag{D.22}$$

et (Eq. (D.4))

$$\left[D_1^r\right]_{i,j}=\frac{-2\omega^2\rho_0/(F_{vr}\epsilon_r)}{\chi_r^2-(\gamma_j/a_r)^2}\frac{j_i}{j_i^2-\gamma_j^2}\,. \tag{D.23}$$

iii. Constantes d'intégration B_{0e} et $\xi_{e\mu}$

La constante d'intégration B_{0e} définie par l'équation (D.5) s'écrit en fonction de $p_\mu(0)$ et $p_{\ell e\mu}$ sous la forme matricielle suivante :

$$B_{0e}=C_e\left[(d_2^e)^T p_\mu(0)+(d_3^e)^T p_{\ell e\mu}-p_s\right], \tag{D.24}$$

où C_e est une constante définie par (Eq. (D.5))

$$C_e=\frac{1}{T_{me}k_{we}^2}\,, \tag{D.25}$$

et où d_2^e et d_3^e sont des vecteurs colonnes (l'exposant T désignant leur transposé) définis par (Eqs. (D.5) et (2.74))

$$\left[d_2^e\right]_j=\frac{J_0\left(\gamma_j a_e/a\right)}{\sqrt{\pi}\,a\,J_0(\gamma_j)} \tag{D.26}$$

et (Eqs. (D.5) et (2.81))

$$\left[d_3^e\right]_j=\frac{-\delta_{jj}}{\sqrt{\pi}\,a_e}\,. \tag{D.27}$$

Les constantes d'intégration $\xi_{e\mu}$ définies par l'équation (D.6) s'écrivent en fonction de $p_\mu(0)$ et $p_{\ell e\mu}$ sous la forme matricielle suivante :

$$\xi_{e\mu}=D_2^e p_\mu(0)-D_3^e p_{\ell e\mu}\,, \tag{D.28}$$

où D_2^e et D_3^e sont des matrices carrées définies par (Eqs. (D.6) et (D.7))

$$\left[D_2^e\right]_{i,j}=\frac{2}{T_{me}\left(k_{we}^2-(j_j/a_e)^2\right)}\frac{J_0(\gamma_i a_e/a)}{J_0(\gamma_i)}\left(\frac{j_j a_e/a}{(j_j)^2-(\gamma_i a_e/a)^2}-\frac{a_e/a}{j_j}\right) \tag{D.29}$$

et (Eqs. (D.6) et (D.8))

$$\left[D_3^e\right]_{i,j}=\frac{2}{T_{me}\left(k_{we}^2-(j_j/a_e)^2\right)}\left(\frac{j_j}{j_j^2-\gamma_i^2}-\frac{1}{j_j}\right) \tag{D.30}$$

iv. Constantes d'intégration B_{0r} et $\xi_{r\mu}$

La constante d'intégration B_{0r} définie par l'équation (D.9) s'écrit en fonction de $p_\mu(\ell)$ et $p_{\ell r\mu}$ sous la forme matricielle suivante :

$$B_{0r}=-C_r\left[(d_2^r)^T p_\mu(\ell)+(d_3^r)^T p_{\ell r\mu}\right], \tag{D.31}$$

où C_r est une constante définie par (Eq. (D.9))

$$C_r = \frac{1}{T_{mr}\, k_{wr}^2}\,, \tag{D.32}$$

et où d_2^r et d_3^r sont des vecteurs colonnes (l'exposant T désignant leur transposé) définis par (Eq. (D.9) et (2.74))

$$\left[d_2^r\right]_j = \frac{J_0\left(\gamma_j a_r / a\right)}{\sqrt{\pi}\, a\, J_0(\gamma_j)} \tag{D.33}$$

et (Eq. (D.9) et (2.88))

$$\left[d_3^r\right]_j = \frac{-\delta_{jj}}{\sqrt{\pi}\, a_r}\,. \tag{D.34}$$

Les constantes d'intégration $\xi_{r\mu}$ définies par l'équation (D.10) s'écrivent en fonction de $p_\mu(\ell)$ et $p_{\ell r\mu}$ sous la forme matricielle suivante :

$$\xi_{r\mu} = -D_2^r\, p_\mu(\ell) + D_3^r\, p_{\ell r\mu}\,, \tag{D.35}$$

où D_2^r et D_3^r sont des matrices carrées définies par (Eqs. (D.10) et (D.11))

$$\left[D_2^r\right]_{i,j} = \frac{2}{T_{mr}\left(k_{wr}^2 - (j_j / a_r)^2\right)} \frac{J_0(\gamma_i a_r / a)}{J_0(\gamma_i)} \left(\frac{j_j a_r / a}{(j_j)^2 - (\gamma_i a_r / a)^2} - \frac{a_r / a}{j_j} \right) \tag{D.36}$$

et (Eqs. (D.10) et (D.12))

$$\left[D_3^r\right]_{i,j} = \frac{2}{T_{mr}\left(k_{wr}^2 - (j_j / a_r)^2\right)} \left(\frac{j_j}{j_j^2 - \gamma_i^2} - \frac{1}{j_j} \right). \tag{D.37}$$

D.2.2 Calcul des coefficients inconnus du problème

Les équations (2.75), (2.82), (2.89), (2.85.a et b) et (2.93.a et b) réécrites respectivement sous les formes matricielles (D.13), (D.18), (D.19), (D.24), (D.28), (D.31) et (D.35) définissent un système d'équations rappelé ci-dessous dont les inconnues sont les constantes $p_\mu(z)$, $p_{\ell e\mu}$, $p_{\ell r\mu}$, B_{0e}, $\xi_{e\mu}$, B_{0r} et $\xi_{r\mu}$.

$$\begin{cases}
p_\mu(z) = d_0^e(z)\, B_{0e} + D_0^e(z)\, \xi_{e\mu} + d_0^r(z)\, B_{0r} + D_0^r(z)\, \xi_{r\mu}\,, & \text{(D.38.a)} \\
p_{\ell e\mu} = d_1^e\, B_{0e} + D_1^e\, \xi_{e\mu}\,, & \text{(D.38.b)} \\
p_{\ell r\mu} = -d_1^r\, B_{0\mathrm{r}} - D_1^r\, \xi_{r\mu}\,, & \text{(D.38.c)} \\
B_{0e} = C_e\left[(d_2^e)^T\, p_\mu(0) + (d_3^e)^T\, p_{\ell e\mu} - p_s\right], & \text{(D.38.d)} \\
\xi_{e\mu} = D_2^e\, p_\mu(0) - D_3^e\, p_{\ell e\mu}\,, & \text{(D.38.e)} \\
B_{0r} = -C_r\left[(d_2^r)^T\, p_\mu(\ell) + (d_3^r)^T\, p_{\ell r\mu}\right], & \text{(D.38.f)} \\
\xi_{r\mu} = -D_2^r\, p_\mu(\ell) + D_3^r\, p_{\ell r\mu}\,. & \text{(D.38.g)}
\end{cases}$$

En reportant d'une part les équations (D.38.a) et (D.38.b) dans (D.38.d) et (D.38.e) et d'autre part les équations (D.38.a) et (D.38.c) dans (D.38.f) et (D.38.g), le système se simplifie et s'écrit :

$$\begin{cases} C_0 B_{0e} + (h_0)^T \xi_{e\mu} + C_1 B_{0r} + (h_1)^T \xi_{r\mu} + C_e p_s = 0, & \text{(D.39.a)} \\ h_4 B_{0e} + H_0 \xi_{e\mu} + h_5 B_{0r} + H_1 \xi_{r\mu} = 0, & \text{(D.39.b)} \\ C_2 B_{0e} + (h_2)^T \xi_{e\mu} + C_3 B_{0r} + (h_3)^T \xi_{r\mu} = 0, & \text{(D.39.c)} \\ h_6 B_{0e} + H_2 \xi_{e\mu} + h_7 B_{0r} + H_3 \xi_{r\mu} = 0, & \text{(D.39.d)} \end{cases}$$

où les constantes C_i sont définies par les équations

$$\begin{cases} C_0 = C_e \left((d_2^e)^T d_0^e(0) + (d_3^e)^T d_1^e \right) - 1, & \text{(D.40.a)} \\ C_1 = C_e (d_2^e)^T d_0^r(0), & \text{(D.40.b)} \\ C_2 = C_r (d_2^r)^T d_0^e(\ell), & \text{(D.40.c)} \\ C_3 = C_r \left((d_2^r)^T d_0^r(\ell) - (d_3^r)^T d_1^r \right) + 1, & \text{(D.40.d)} \end{cases}$$

les vecteurs h_i sont définis par les équations

$$\begin{cases} (h_0)^T = C_e \left((d_2^e)^T D_0^e(0) + (d_3^e)^T D_1^e \right), & \text{(D.41.a)} \\ (h_1)^T = C_e (d_2^e)^T D_0^r(0), & \text{(D.41.b)} \\ (h_2)^T = C_r (d_2^r)^T D_0^e(\ell), & \text{(D.41.c)} \\ (h_3)^T = C_r \left((d_2^r)^T D_0^r(\ell) - (d_3^r)^T D_1^r \right), & \text{(D.41.d)} \\ h_4 = D_2^e d_0^e(0) - D_3^e d_1^e, & \text{(D.41.e)} \\ h_5 = D_2^e d_0^r(0), & \text{(D.41.f)} \\ h_6 = D_2^r d_0^e(\ell), & \text{(D.41.g)} \\ h_7 = D_2^r d_0^r(\ell) + D_3^r d_1^r, & \text{(D.41.h)} \end{cases}$$

et les matrices H_i sont définis par les équations

$$\begin{cases} H_0 = D_2^e D_0^e(0) - D_3^e D_1^e - I, & \text{(D.42.a)} \\ H_1 = D_2^e D_0^r(0), & \text{(D.42.b)} \\ H_2 = D_2^r D_0^e(\ell), & \text{(D.42.c)} \\ H_3 = D_2^r D_0^r(\ell) + D_3^r D_1^r + I, & \text{(D.42.d)} \end{cases}$$

où I est la matrice identité.

En combinant les équations (D.39.b) et (D.39.d) il vient

$$\begin{cases} \xi_{r\mu} = h_8 B_{0e} + h_9 B_{0r}, & \text{(D.43.a)} \\ \xi_{e\mu} = h_{10} B_{0e} + h_{11} B_{0r}, & \text{(D.43.b)} \end{cases}$$

où les vecteurs h_{8-11} sont définis par les équations

$$\begin{cases} h_8 = -[H_3 - H_2 H_0^{-1} H_1]^{-1} [h_6 - H_2 H_0^{-1} h_4], , & \text{(D.44.a)} \\ h_9 = -[H_3 - H_2 H_0^{-1} H_1]^{-1} [h_7 - H_2 H_0^{-1} h_5], & \text{(D.44.b)} \\ h_{10} = -H_0^{-1} [h_4 + H_1 h_8], & \text{(D.44.c)} \\ h_{11} = -H_0^{-1} [h_5 + H_1 h_9]. & \text{(D.44.d)} \end{cases}$$

Puis, en reportant les équations (D.43.a et b) dans (D.39.c) il vient

$$B_{0r} = C_4 B_{0e}, \qquad \text{(D.45)}$$

où la constante C_4 est définie par l'équation

$$C_4 = -[C_3 + (h_2)^T h_{11} + (h_3)^T h_9]^{-1}[C_2 + (h_2)^T h_{10} + (h_3)^T h_8] \,. \tag{D.46}$$

Enfin, en reportant les équations (D.45) dans (D.43.a) et (D.43.b), puis les équations obtenues dans (D.39.a) le coefficient B_{0e} s'écrit

$$B_{0e} = \left[C_0 + (h_0)^T [h_{10} + h_{11} C_4] + C_1 C_4 + (h_1)^T [h_8 + h_9 C_4] \right]^{-1} C_e \, p_s \,. \tag{D.47}$$

Les autres coefficients B_{0r}, $\xi_{e\mu}$, $\xi_{r\mu}$, $p_{\ell e\mu}$ et $p_{\ell r\mu}$ se déduisent alors du résultat obtenu à l'aide des équations (D.45), (D.43.a et b) et (D.38.b et c).

Annexe E

Propriétés utiles des fonctions de Bessel

Cette Annexe regroupe quelques propriétés concernant les fonctions de Bessel modifiées cylindrique de première espèce.

i. Définition

La fonction $J_\nu(z)$, avec $z\in\mathbb{C}$, est la fonction de Bessel cylindrique de première espèce d'ordre ν, solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial z}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)f=0\,. \tag{E.1}$$

ii. Relation d'intégrale

$$\int_0^z z^\nu J_{\nu-1}(z)\,dz=z^\nu J_\nu(z)\,. \tag{E.2}$$

iii. Intégrales de Lommel :

$$\int_0^z z\,[J_\nu(kz)]^2\,dz=\frac{z^2}{2}\left[[J'_\nu(kz)]^2+\left(1+\frac{\nu^2}{k^2z^2}\right)[J_\nu(kz)]^2\right] \tag{E.3}$$

$$\int_0^z J_\nu(kz)\,J_\nu(qz)\,z\,dz=\frac{z}{k^2-q^2}[k\,J_\nu(qz)J_{\nu+1}(kz)-q\,J_\nu(kz)J_{\nu+1}(qz)] \tag{E.4}$$

iv. Relations de récurrence

$$2\,\frac{n}{z}J_n(z)=J_{n+1}(z)+J_{n-1}(z) \tag{E.5}$$

v. Comportement asymptotique

Lorsque $z\to 0$ et n est entier, alors

$$J_n(z)=\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n\text{, quand } z\to 0\,. \tag{E.6}$$

vi. Autres relations

$$H_n^{(2)}(z)=J_n(z)-i\,N_n(z)\ . \tag{E.7}$$

$$J_{n+1}(z)\,N_n(z)-N_{n+1}(z)J_n(z)=\frac{2}{\pi z}\ . \tag{E.8}$$

Pour tout $n>0$ et γ_k les zéros de $J_n(z)$ [67, § 15.41],

$$\frac{-J_{n+1}(z)}{J_n(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-\gamma_k}+\frac{1}{\gamma_k}\right\}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+\gamma_k}-\frac{1}{\gamma_k}\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-\gamma_k^2} \tag{E.9}$$

Annexe F

Fiches synoptiques

F.1 Fiche synoptique de l'appareil de réciprocité [68]

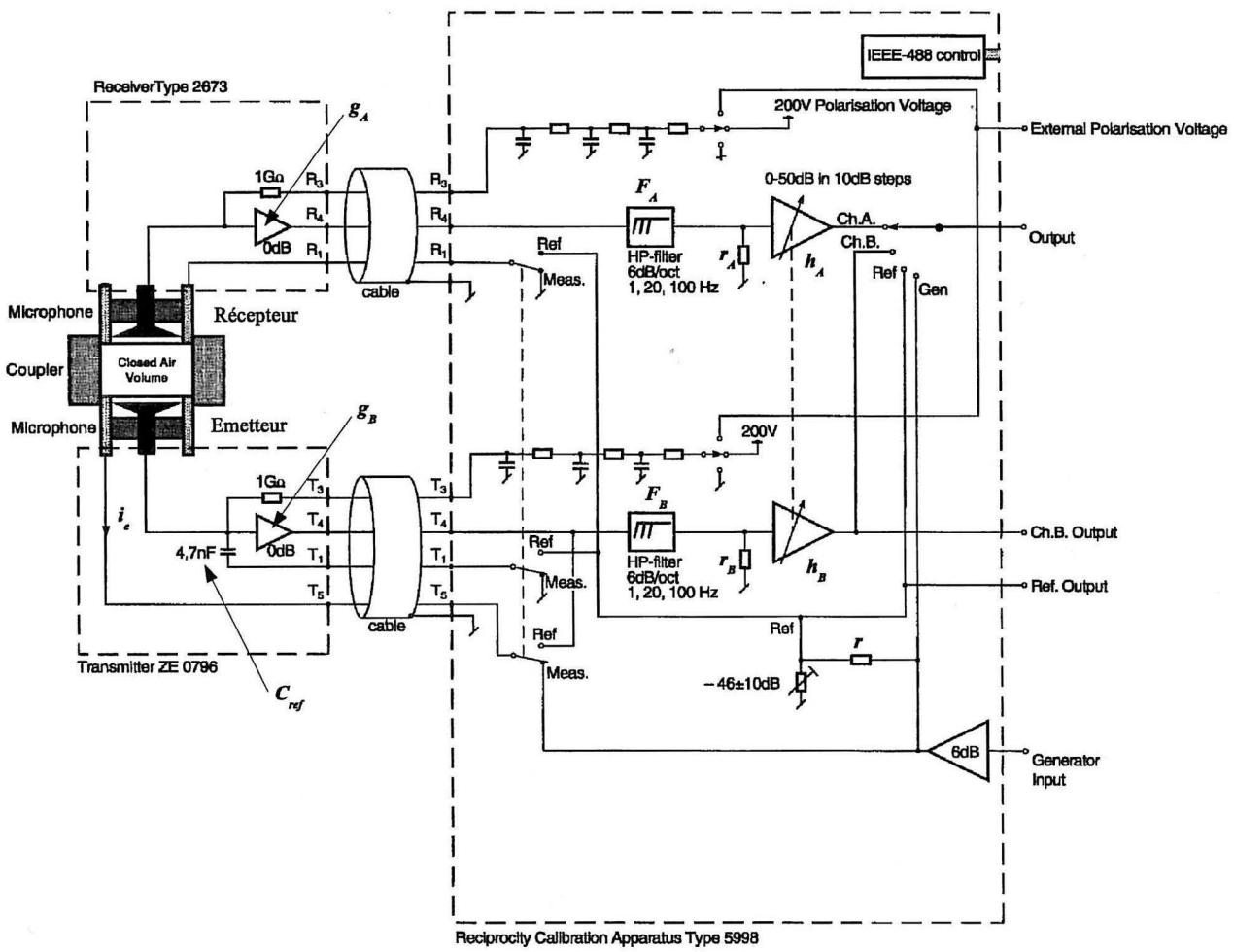


Figure F.1. Schéma de l'appareil de réciprocité Brüel & Kjær 5998.

F.2 Fiche synoptique de l'amplificateur Nexus [69]

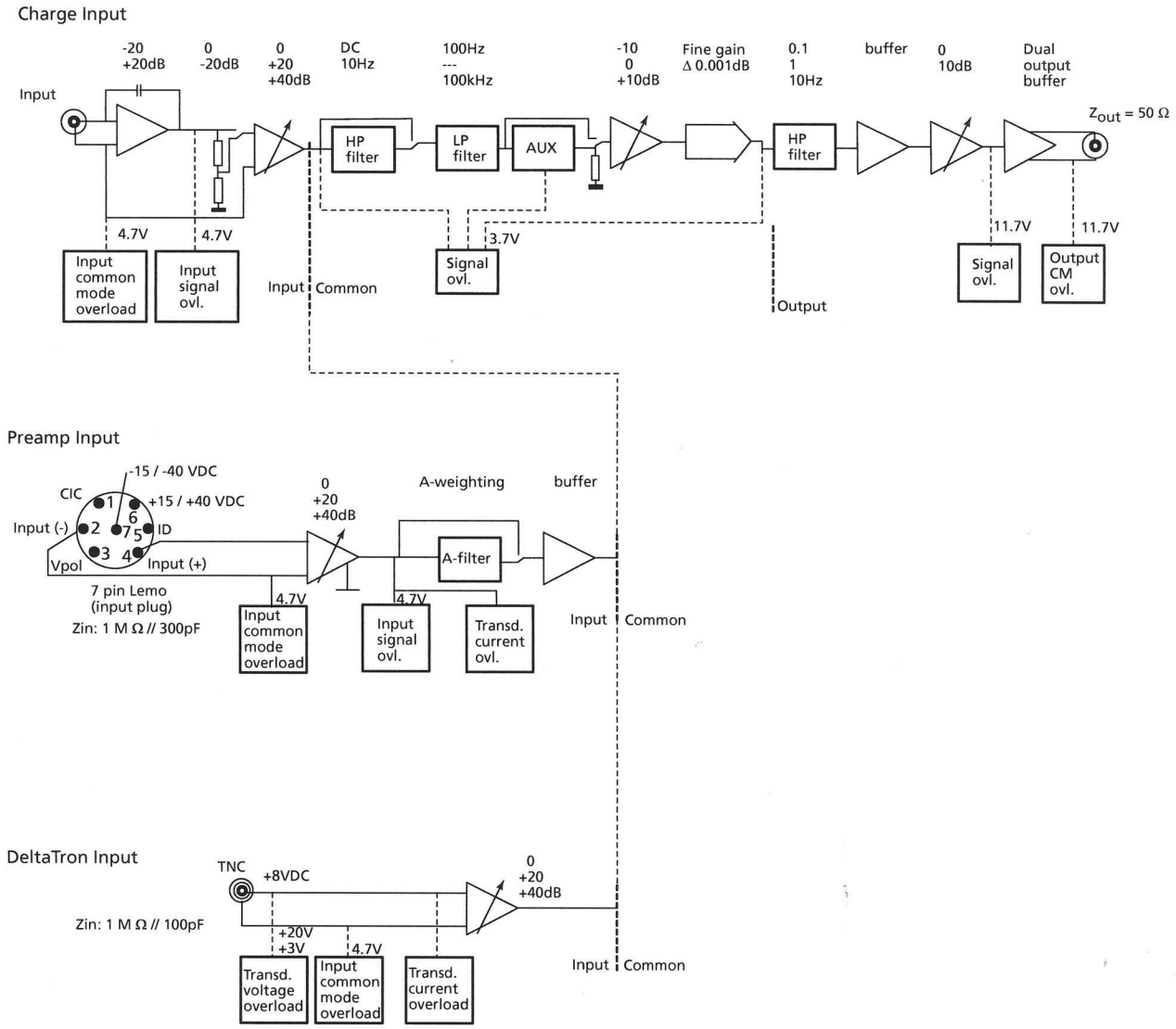


Figure F.2. Schéma de l'amplificateur Nexus Brüel & Kjær 2690.

Annexe G

Fenêtre de filtrage : techniques de synthèse, performances et paramètres d'influences

G.1 Synthèse d'une fenêtre de filtrage par la méthode de la fenêtre

La synthèse d'un filtre pour le problème posé par l'étalonnage en champ libre des microphones par la méthode de la réciprocité en utilisant la méthode de la fenêtre consiste à approcher la forme du filtre temporel souhaité par une fonction de période $T=1/\Delta f$, par exemple une fonction rectangulaire définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} w_r(t)=1, & \forall |t| \in [0, t_0], \\ w_r(t)=0, & \forall |t| \in]t_0, T/2\,], \end{cases} \tag{G.1}$$

où $t_0 \in [0, T/2]$ définit la demi durée du palier unitaire de la fenêtre rectangulaire. Dans ce cas, la fenêtre spectrale $W_r(k)$ peut être obtenue par TF de $w_r(t)$, soit

$$W_r(f_k)=\Delta f \int_{-T/2}^{T/2} w_r(t)\, e^{-2i\pi k \Delta f t}\, dt = \frac{\sin(2\pi k \Delta f t_0)}{\pi k}\,. \tag{G.2}$$

Il en résulte que la suite $W_r(k)$ obtenue est infinie. Il est alors possible de tronquer cette suite en ne conservant que les $N+1$ valeurs allant de $-N/2$ à $N/2$. Néanmoins, la hauteur du premier lobe secondaire de $W_r(k)$ (Eq. G.2) n'étant que de -13 dB, cette troncature ne peut intervenir qu'à un ordre $N/2$ relativement élevé de manière à ne pas introduire d'ondulations (phénomène de Gibbs) sur le palier unitaire du filtre temporel défini initialement (Eq. G.1). D'autres fenêtres peuvent être utilisées telle que la fenêtre de Hanning définie de la manière suivante

$$\begin{cases} w_h(t)=\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\left(\pi \dfrac{t}{t_0}\right)\right), & \forall |t| \in [0, t_0], \\ w_h(t)=0, & \forall |t| \in]t_0, T\,], \end{cases} \tag{G.3}$$

où la hauteur du premier lobe secondaire de la fenêtre spectrale $W_h(k)=\mathrm{TF}^{-1}\left(w_h(t)\right)$ est de -31,5 dB ce qui permet une troncature de $W_h(k)$ à un ordre $N/2$ moins élevé que la fenêtre rectangulaire. Néanmoins, du fait de la forme en cosinus de la fenêtre temporelle $w_h(t)$ (palier unitaire réduit à un point), par multiplication, cette fenêtre introduit indéniablement une déformation du pic principal de la TF^{-1} du produit des efficacités $M_{ff\mu} M_{ffv}$.

Dans la référence [35], l'auteur propose un compromis en utilisant une fenêtre de Tukey qui n'est autre qu'une convolution entre une fenêtre de Hanning et une fenêtre rectangulaire. La fenêtre de

Tukey est définie par la relation

$$\begin{cases} w_T(t)=1, & \forall |t| \in [0,\alpha t_0], \\ w_T(t)=\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\pi\frac{t-\alpha t_0}{(1-\alpha)t_0}\right)\right), & \forall |t| \in [\alpha t_{0,} t_0] \\ w_T(t)=0, & \forall |t| \in]t_0, T\,], \end{cases} \qquad \text{(G.4)}$$

où $\alpha \in [0,1]$ est un paramètre fixant la durée du palier unitaire autour de $t=0$. A noter que lorsque $\alpha=0$ la fenêtre de Tukey est équivalente à une fenêtre de Hanning et lorsque $\alpha=1$ à une fenêtre rectangulaire. La figure G.1 illustre ces deux cas extrêmes et un cas intermédiaire avec $\alpha=0.5$ pour une fenêtre temporelle optimale filtrant tous les échos perturbateurs listés dans le paragraphe 3.3.2 lorsque les microphones sont espacés de 30 cm, soit une demi durée de la fenêtre temporelle $t_0=0{,}3/c_0$. La figure G.2 montre les coefficients des fenêtres spectrales obtenues par TF des fenêtres de Tukey en question. Le passage d'une fenêtre rectangulaire ($\alpha=1$) à une fenêtre de Hanning ($\alpha=0$), s'accompagne d'une réduction des ondulations de la fenêtre spectrale en raison de l'élargissement de la durée de transition $[\alpha t_0 ; t_0]$.

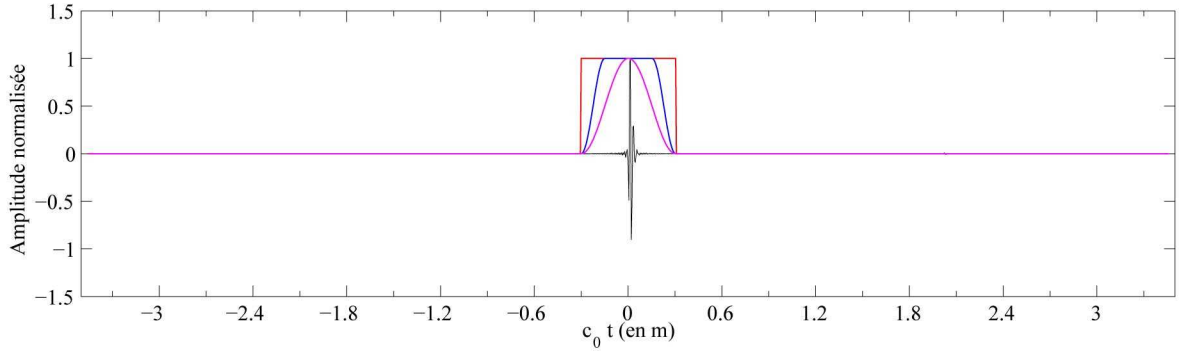


Figure G.1. TF^{-1} (amplitude normalisée) du produit d'efficacités $M_{ff\,\mu} M_{ff\,\nu}$ (microphones LS2P (½") espacés de 30 cm, courbe noire) et diverses fenêtres temporelles de Tukey : $\alpha=1$ (courbe rouge), $\alpha=0{,}5$ (courbe bleue) et $\alpha=0$ (courbe mauve).

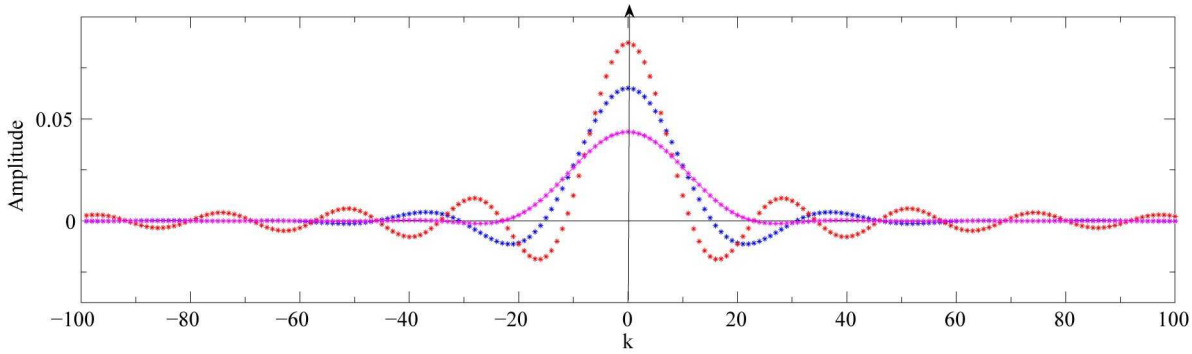


Figure G.2. Fenêtres spectrales $W_T(k)$ tronquées $|k|=100$, obtenues par TF des fenêtres temporelles de Tukey $w_T(t)$ définies sur la figure G.1, $\alpha=1$ (points rouges), $\alpha=0{,}5$ (points bleus) et $\alpha=0$ (points mauves).

La figure G.3 montre l'influence de la troncature des coefficients des fenêtres spectrales au delà de $|k|=46$ $(N=46)$ sur les fenêtres temporelles de filtrage définies précédemment. Cette troncature a pour conséquence l'introduction d'oscillations sur le palier unitaire et sur le palier nul des fenêtres temporelles, oscillations non constantes qui de plus ne peuvent être contrôlées séparément. Pour ces raisons, il est préférable de synthétiser la fenêtre de filtrage avec une méthode itérative, méthode d'optimisation qui ne présente pas cet inconvénient.

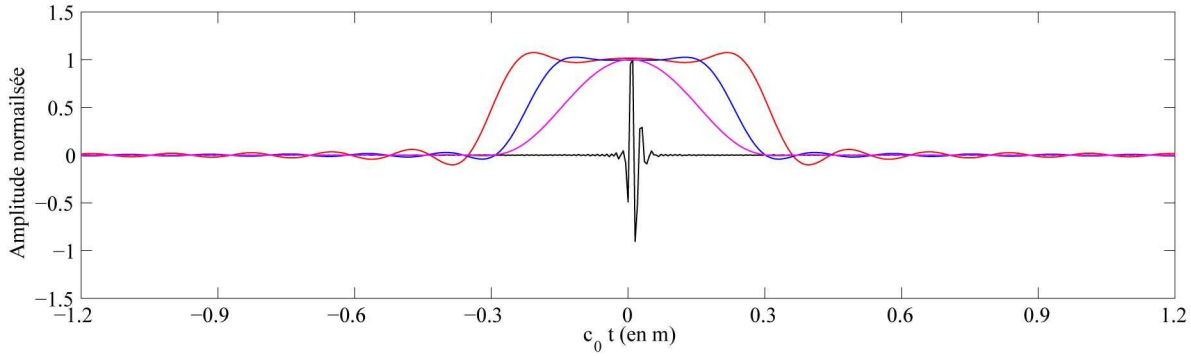


Figure G.3. Influence de la troncature à $|k|=46$ *des fenêtres spectrales représentées sur la figure G.2 sur les fenêtres temporelles : fenêtres de Tukey,* $\alpha=1$ *(courbe rouge),* $\alpha=0{,}5$ *(courbe bleue) et* $\alpha=0$ *(courbe mauve).*

G.2 Méthode itérative : performance des fenêtres de filtrages et paramètres d'influences

Les fonctions de transfert mesurées lors de l'étalonnage en champ libre des microphones par la méthode de la réciprocité requièrent un filtrage spécifique qu'il convient d'optimiser. La méthode itérative telle que l'algorithme de Parks-McClellan répond à ces exigences. La fenêtre recherchée étant un compromis entre son ordre et sa performance, on se propose dans ce paragraphe d'étudier la performance du filtre en fonction des caractéristiques du filtre.

Le gabarit du filtre est défini dans l'espace temporel, ses spécifications et les termes utilisés sont définis dans la figure 3.13 en fonction de l'espace $c_0 t$ pour des considérations pratiques. Les spécifications à définir sont les suivantes :

- la largeur de la fenêtre $c_0 T$ (non modifiable compte tenu de $T=1/\Delta f$, où $\Delta f=50\,\text{Hz}$),
- le taux d'ondulation maximum dans la largeur préservée (en dB).
- l'affaiblissement minimum dans la largeur atténuée (en dB),
- la demi-largeur préservée $c_0 t_p$,
- la largeur de transition $c_0 t_{tr}$,

Ces paramètres conduisent à la synthèse d'une fenêtre spectrale $W(f_k)$ (où $f_k=k\Delta f$) filtrant par convolution les produits des efficacités en champ libre de deux microphones ($\left(M_{ff\mu}M_{ff\nu}\right)$, Eqs. (3.53.a et b)). Le choix optimum de ces paramètres dépend du dispositif expérimental et plus particulièrement de la distance qui sépare les deux microphones lors des mesures. L'étude présentée ici traite plus particulièrement du cas où les microphones sont espacés de 30 cm. Les paramètres retenus ont été obtenus par essais de manière à présenter un filtre de performance visiblement insuffisante, un filtre très performant mais difficilement utilisable compte tenu de l'ordre qui lui correspond et un filtre intermédiaire.

G.2.1 Paramètres d'influences sur la performance du filtrage

Les filtres synthétisés dans le cadre de cette étude ne sont pas parfaits et ont indéniablement une incidence sensible sur les produits d'efficacités filtrés $\left[M_{ff\mu}M_{ff\nu}\right]_c$. Cette incidence nommée « érosion » dépend des paramètres choisis pour la synthèse des filtres, principalement le taux d'ondulation maximum accepté dans la largeur préservée.

i. Erosion par filtrage des produits d'efficacités $M_{ff\mu}M_{ff\nu}$, taux d'ondulation maximum

accepté dans la largeur préservée

L'érosion est évaluée à partir d'un produit d'efficacités $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})$ « idéal », fonction analytique approchant celui issu d'expérimentations. Cette quantité idéale peut être construite à partir d'un modèle simple de l'efficacité en pression M_P d'un microphone.

En considérant un simple circuit résonnant pour décrire le comportement mécanique du microphone [20,70], son efficacité en pression M_P s'écrit sous la forme

$$M_P = \frac{M_{pbf}}{1-(\omega/\omega_0)^2 - i\,\omega/(\omega_0\,Q_0)}\,, \tag{G.5}$$

où M_{pbf}, ω_0 et Q_0 sont respectivement l'efficacité en pression aux basses fréquences, la pulsation de résonance et le facteur de qualité du microphone. Ces paramètres peuvent être mesurés pour chaque microphone, mais dans le cas présent une simple approximation est suffisante. L'efficacité en champ libre M_{ff} d'un microphone est alors déduite de son efficacité en pression M_P en appliquant à celle-ci la correction champ libre Δ_{ff} [40] (cf. § 3.4.2), soit pour un produit de deux efficacités en champ libre (en supposant deux microphones identiques)

$$(M_{ff\mu}M_{ff\nu})_a = \left(\frac{M_{pbf}}{1-(\omega/\omega_0)^2 - i\,\omega/(\omega_0 Q_0)}\,\Delta_{ff}\right)^2 \approx (M_{ff\mu}M_{ff\nu})\,. \tag{G.6}$$

En utilisant les options avancées d'approximations de courbes disponibles dans de nombreux programmes de calcul tel que Matlab ou Scilab, un produit d'efficacités $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})$ issu d'expérimentations peut être approché par une fonction analytique $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})_a$ selon le modèle défini par l'équation (G.6) (figure G.4).

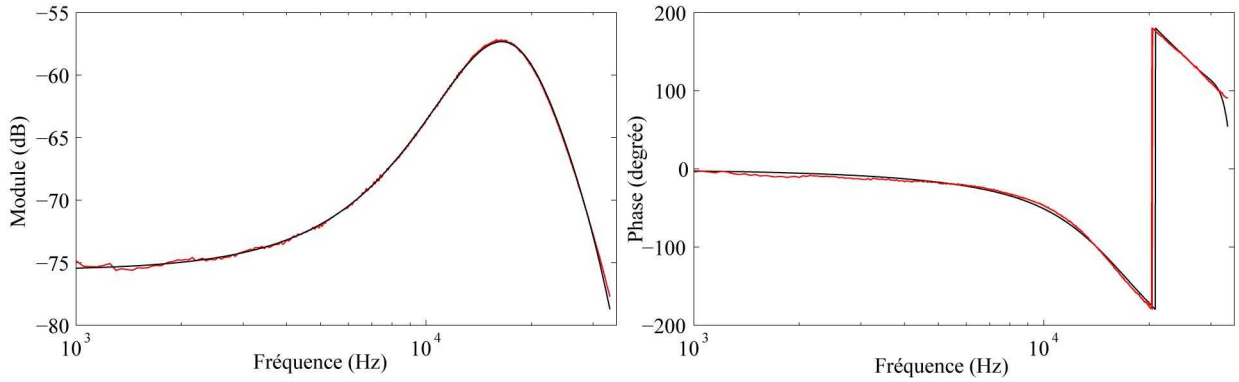


Figure G.4. Produit d'efficacités $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})$ (module et phase, microphones LS2P (½")) : issu d'expérimentations (courbe rouge) et son approximation $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})_a$ selon le modèle défini par l'équation (G.6) (courbe noire).

La fonction analytique $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})_a$ ainsi obtenue ne comporte aucune perturbation. En filtrant cette fonction, il est alors possible de déterminer sa déformation δ_e (érosion) attribuable à l'opération de filtrage. La figure G.5 présente plusieurs exemples d'érosion (définie par l'opération $\delta_e = ((M_{ff\mu}M_{ff\nu})_a * W_{1,2,3})/(M_{ff\mu}M_{ff\nu})_a)$ en fonction des filtres donnés dans le tableau G.1. Conformément aux attentes, l'érosion est d'autant plus importante que le taux d'ondulation maximum accepté dans la largeur préservée est grand. De cette façon, l'érosion δ_e peut être estimée pour chaque produit d'efficacités $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})$ issu d'expérimentations et est utilisée comme correction (les résultats qui suivent prennent en compte cette correction).

	Filtre W_1	Filtre W_2	Filtre W_3
Largeur de la fenêtre $c_0 T$ (en m)	6,98	6,98	6,98
Demi-largeur préservée $c_0 t_p$ (en m)	0,07	0.07	0.07
Largeur de transition $c_0 t_{tr}$ (en m)	0.23	0.23	0.23
Taux d'ondulation maximum dans la largeur préservée (en dB)	0.01	0.03	0.05
Affaiblissement minimum dans la largeur atténuée (en dB)	-40	-40	-40
Ordre $(N+1)$ du filtre $W(f_k)$ obtenu	85	75	71

Tableau G.1. Paramètres utilisés pour la synthèse de divers filtres et ordres des filtres obtenus (algorithme de Parks-McClellan).

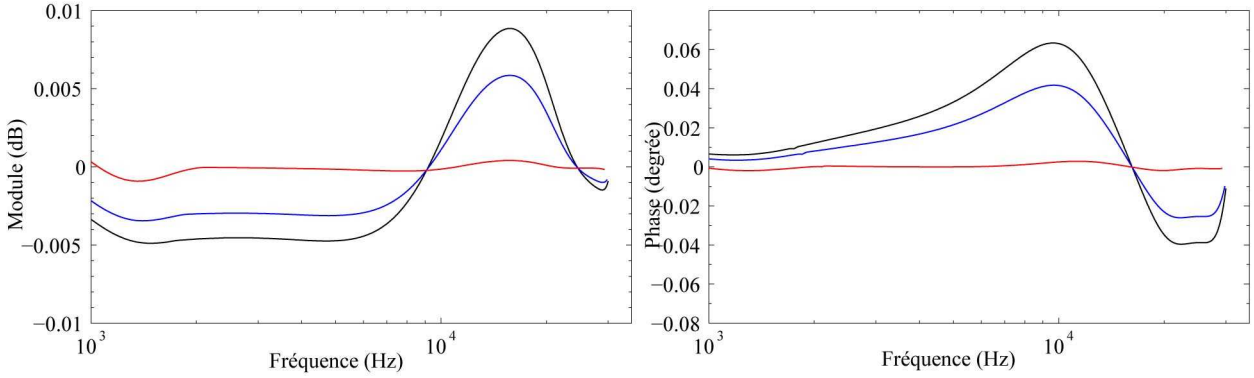


Figure G.5. Erosion δ_e par filtrage (module et phase) d'un produit d'efficacités analytique $(M_{ff\mu} M_{ff\nu})_a$ (microphones LS2P (½")), calculée à partir des filtres définis dans le tableau G.1 : filtre W_1 (courbe rouge), filtre W_2 (courbe bleue) et filtre W_3 (courbe noire).

ii. Demi-largeur préservée $c_0 t_p$

La demi-largeur préservée est fixée à partir d'observations expérimentales, soit lorsque la TF^{-1} du produit des efficacités $(M_{ff\mu} M_{ff\nu})$ semble atteindre le niveau de bruit global (figure G.6). Dans le cas présent la demi-largeur préservée est fixée à $c_0 t_p = 0{,}07$ m .

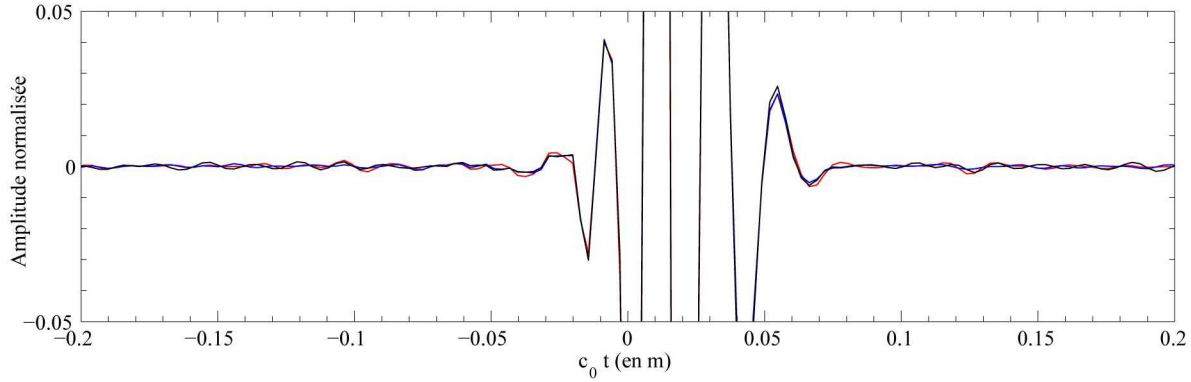


Figure G.6. TF^{-1} de trois produits d'efficacités $(M_{ff\mu} M_{ff\nu})$ issus d'expérimentations (microphones LS2P (½") espacés de 30 cm).

iii. Largeur de transition $c_0 t_{tr}$

Le choix de la largeur de transition est essentiel car il détermine les perturbations éliminées par le filtrage. Trois filtres sont créés avec les paramètres définis dans le tableau G.2. Trois largeurs de transitions sont ici testées : une courte ($c_0 t_{tr}$=0,13 m) filtrant un maximum de perturbations, une moyenne ($c_0 t_{tr}$=0,23 m) moins performante et une grande ($c_0 t_{tr}$=0,53 m) encore moins performante, notamment sur le filtrage de la diaphonie.

	Filtre W_1	Filtre W_2	Filtre W_3
Largeur de la fenêtre $c_0 T$ (en m)	6,98	6,98	6,98
Demi-largeur préservée $c_0 t_p$ (en m)	0,07	0,07	0,07
Largeur de transition $c_0 t_{tr}$ (en m)	0,13	0,23	0,53
Taux d'ondulation maximum dans la largeur préservée (en dB)	0,03	0,03	0,03
Affaiblissement minimum dans la largeur atténuée (en dB)	-40	-40	-40
Ordre $(N+1)$ du filtre $W(f_k)$ obtenu	133	75	33

Tableau G.2. Paramètres utilisés pour la synthèse de divers filtres et ordres des filtres obtenus (algorithme de Parks-McClellan).

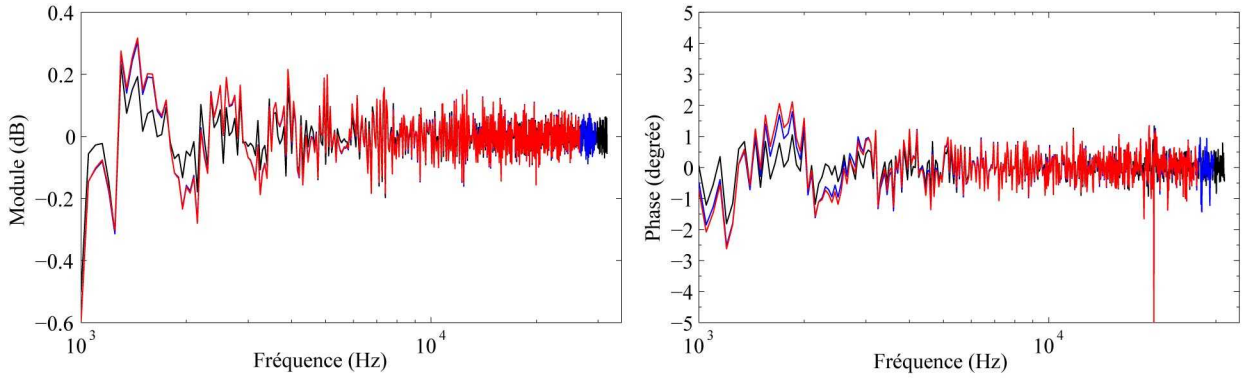


Figure G.7. Perturbations filtrées (module et phase) sur un produit d'efficacités en champ libre $M_{ff\mu} M_{ff\nu}$ issu d'expérimentations (microphones LS2P (½") espacés de 30 cm) : filtre W_1 (courbe rouge), filtre W_2 (courbe bleue) et filtre W_3 (courbe noire), soit $(M_{ff\mu} M_{ff\nu}) * W_{1,2,3} / (M_{ff\mu} M_{ff\nu})$ (filtres définis dans le tableau G.2).

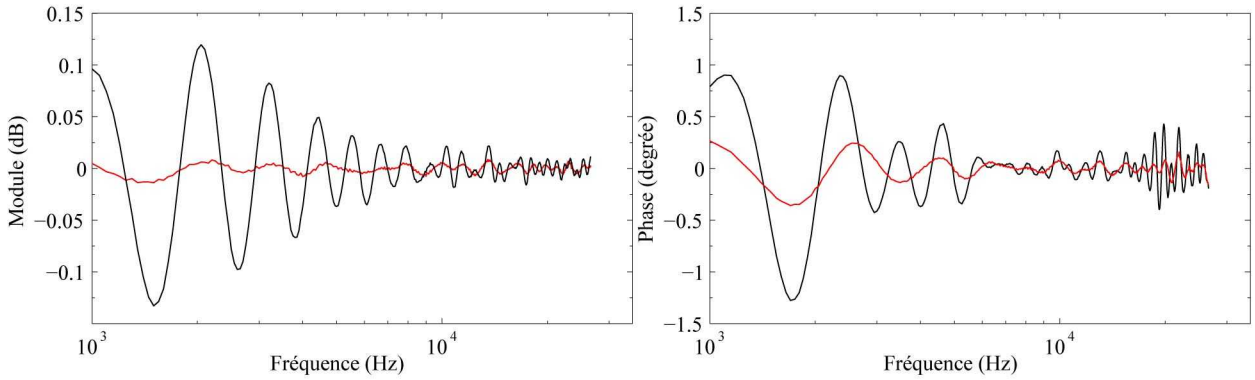


Figure G.8. Comparaisons (module et phase) entre les produits d'efficacités $M_{ff\mu} M_{ff\nu}$ filtrés avec les filtres W_2 (courbe rouge) ou W_3 (courbe noire) et le produit d'efficacités $M_{ff\mu} M_{ff\nu}$ filtré avec le filtre W_1, soit $((M_{ff\mu} M_{ff\nu}) * W_{2,3}) / ((M_{ff\mu} M_{ff\nu}) * W_1)$ (microphones LS2P (½") espacés de 30 cm, filtres définis dans le tableau G.2).

La figure G.7 présente les perturbations filtrées (opérations $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})*W_{1,2,3}/(M_{ff\mu}M_{ff\nu})$, les filtres $W_{1,2,3}$ étant définis dans le tableau G.2) sur un produit d'efficacités $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})$ issu d'expérimentations. Il apparaît que les deux filtres les plus sélectifs (filtres W_1 et W_2) montrent peu de différences quant à la performance du filtrage, ce qui n'est pas le cas du troisième. Afin de mieux visualiser ces différences, les produits d'efficacités $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})$ filtrés avec les filtres W_2 ou W_3 sont comparés à ceux filtrés avec le filtre le plus sélectif, soit le filtre W_1. La figure G.8 représentant ces comparaisons (opérations définies par $((M_{ff\mu}M_{ff\nu})*W_{2,3})/((M_{ff\mu}M_{ff\nu})*W_1)$) montre l'insuffisance du filtre W_3, notamment en basses fréquences où les différences atteignent 0,1 dB en module. En revanche, les performances des filtres W_2 et W_1 sont semblables, l'ordre du filtre W_2 étant bien inférieur, les différences atteignent 0,01 dB en module.

iv. Affaiblissement minimum dans la largeur atténuée

L'influence de l'affaiblissement minimum dans la largeur atténuée est testée en construisant trois filtres caractérisés par les affaiblissements suivant : -60, -40 et -20 dB (cf. tableau G.3).

	Filtre W_1	Filtre W_2	Filtre W_3
Largeur de la fenêtre c_0T (en m)	6,98	6,98	6,98
Demi-largeur préservée c_0t_p (en m)	0,07	0,07	0,07
Largeur de transition c_0t_{tr} (en m)	0,23	0,23	0,23
Taux d'ondulation maximum dans la largeur préservée (en dB)	0,03	0,03	0,03
Affaiblissement minimum dans la largeur atténuée (en dB)	-60	-40	-20
Ordre $(N+1)$ du filtre $W(f_k)$ obtenu	95	75	57

Tableau G.3. Paramètres utilisés pour la synthèse de divers filtres et ordres des filtres obtenus (algorithme de Parks-McClellan).

La figure G.9 présente les perturbations filtrées sur un produit d'efficacités $M_{ff\mu}M_{ff\nu}$ issu d'expérimentations (opérations $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})*W_{1,2,3}/(M_{ff\mu}M_{ff\nu})$, les filtres $W_{1,2,3}$ étant définis dans le tableau G.3). Les différences de performances entre filtres restent minimes comme le confirme la figure G.10 présentant les comparaisons $((M_{ff\mu}M_{ff\nu})*W_{2,3})/((M_{ff\mu}M_{ff\nu})*W_1)$.

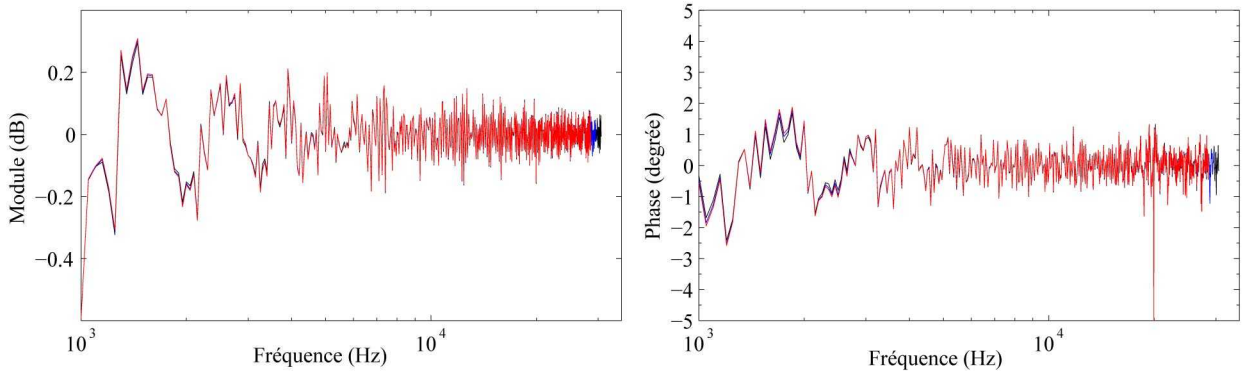


Figure G.9. Perturbations filtrées (module et phase) sur un produit d'efficacités en champ libre $M_{ff\mu}M_{ff\nu}$ issu d'expérimentations (microphones LS2P (½") espacés de 30 cm) : filtre W_1 (courbe rouge), filtre W_2 (courbe bleue) et filtre W_3 (courbe noire), soit $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})*W_{1,2,3}/(M_{ff\mu}M_{ff\nu})$ (filtres définis dans le tableau G.3).

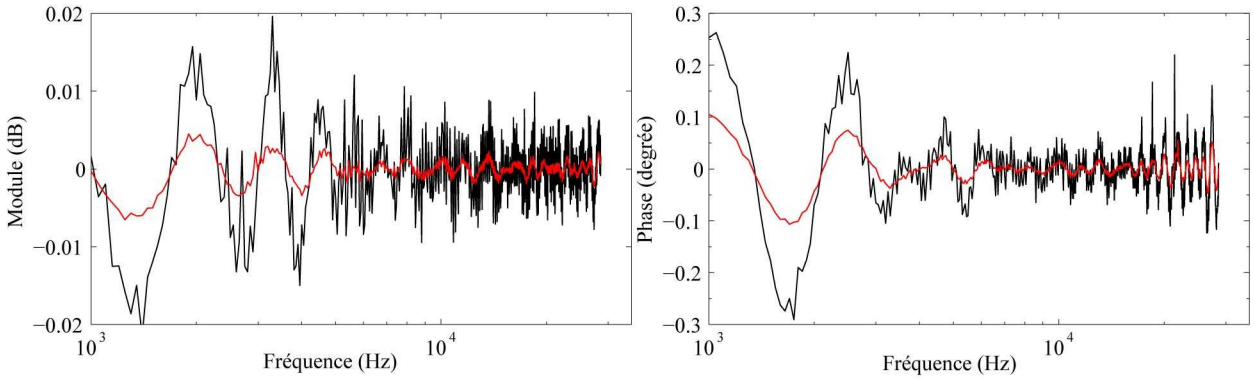


Figure G.10. Comparaisons (module et phase) entre les produits d'efficacités $M_{ff\mu}M_{ff\nu}$ filtrés avec les filtres W_2 (courbe rouge) ou W_3 (courbe noire) et le produit d'efficacités $M_{ff\mu}M_{ff\nu}$ filtré avec le filtre W_1, soit $\left((M_{ff\mu}M_{ff\nu})*W_{2,3}\right)/\left((M_{ff\mu}M_{ff\nu})*W_1\right)$ (microphones LS2P (½") espacés de 30 cm, filtres définis dans le tableau G.3).

G.2.2 Conclusion

Compte tenu des éléments qui précèdent, un filtre est construit par compromis entre performance et ordre du filtre (tableau G.4). La figure 3.15 présente le filtre spectral $W(k)$ obtenu.

Largeur de la fenêtre $c_0 T$ (en m)	6,98
Demi largeur préservée $c_0 t_p$ (en m)	0,07
Largeur de transition $c_0 t_{tr}$ (en m)	0,23
Taux d'ondulation maximum dans la largeur préservée (en dB)	0,03
Affaiblissement minimum dans la largeur atténuée (en dB)	-40
Ordre $(N+1)$ du filtre $W(f_k)$ obtenu	75

Tableau G.4. Paramètres utilisés pour la synthèse d'un filtre destiné au filtrage des produits d'efficacités $\left(M_{ff\mu}M_{ff\nu}\right)$ lorsque les microphones sont espacés de 30 cm (algorithme de Parks-McClellan).

Annexe H

Etalonnage des microphones en champ libre par la méthode de réciprocité : bilan des incertitudes

Cette Annexe traite de l'évaluation des incertitudes sur les efficacités des microphones étalonnés en champ libre selon la méthode de la réciprocité. Les calculs s'appuient sur la norme NF ENV 13005 [47].

H.1 Mesurande : efficacité en champ libre d'un microphone

Le produit des efficacités en champ libre de deux microphones (indicés μ et ν) obtenu expérimentalement est donné par la relation (3.53.b) rappelée ci-dessous

$$\begin{cases} M_{ff\,\mu} M_{ff\,\nu} = \dfrac{2(d_m - d_\mu - d_\nu)}{j\rho_{\mu\nu} f} Z_{Em\mu\nu} \mathrm{e}^{ik_{\mu\nu}(d_m - d_\mu - d_\nu)} e^{\gamma_{\mu\nu}(d_m - d_\mu - d_\nu)} \\ \qquad .\delta_T^{ff}(f, f_{0\mu}, \Delta T_{\mu\nu})\,\delta_P^{ff}(f, f_{0\mu}, \Delta P_{\mu\nu})\,\delta_T^{ff}(f, f_{0\nu}, \Delta T_{\mu\nu})\,\delta_P^{ff}(f, f_{0\nu}, \Delta P_{\mu\nu}), \end{cases} \tag{H.1}$$

où $k_{\mu\nu} = \omega / c_{\mu\nu}$, les variables thermodynamiques $\rho_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$ et $\gamma_{\mu\nu}$ sont évaluées en fonction des conditions d'environnement (pression statique $P_{\mu\nu}$, température statique $T_{\mu\nu}$ et taux d'humidité relatif $HR_{\mu\nu}$) selon la méthode décrite dans la référence [42].

Le facteur δ_P^{ff} corrigeant l'effet des variations de pression statique $\Delta P_{\mu\nu} = P_0 - P_{\mu\nu}$ sur l'efficacité en champ libre $M_{ff\,\mu,\nu}$ est donné par l'équation (3.49.b), à savoir

$$\delta_P^{ff}(f, f_{0\mu,\nu}, \Delta P_{\mu\nu}) = \delta_P^{P}(f, f_{0\mu,\nu}, \Delta P_{\mu\nu}) = 10^{C_{PM}(f, f_{0\mu,\nu})\Delta P_{\mu\nu}/20} e^{jC_{PP}(f, f_{0\mu,\nu})\Delta P_{\mu\nu}\pi/180}, \tag{H.2}$$

où δ_P^{P} est le facteur corrigeant l'effet des variations de pression statique $\Delta P_{\mu\nu}$ sur l'efficacité en pression $M_{P\mu,\nu}$ donné sous forme de polynômes dans la référence [43], avec C_{PM} le polynôme correctif en module (en dB) et C_{PP} celui en phase (en degré).

De même, le facteur δ_T^{ff} corrigeant l'effet des variations de température statique $\Delta T_{\mu\nu} = T_0 - T_{\mu\nu}$ sur l'efficacité en champ libre $M_{ff\,\mu,\nu}$ est donné par l'équation (3.52), à savoir

$$\delta_T^{ff}(f, f_{0\mu,\nu}, \Delta T_{\mu\nu}) = \delta_T^{P}(f, f_{0\mu,\nu}, \Delta T_{\mu\nu}) \frac{\Delta_{ff}(f, T_0)}{\Delta_{ff}(f, T_{\mu\nu})}, \tag{H.3}$$

où δ_T^{P} est le facteur corrigeant l'effet des variations de température statique $\Delta T_{\mu\nu}$ sur l'efficacité en pression $M_{P\mu,\nu}$ et où Δ_{ff} désigne les corrections champ libre. En faisant intervenir les polynômes caractérisant ces quantités, l'équation (H.3) s'écrit

$$\delta_T^{ff}(f, f_{0\mu,\nu}, \Delta T_{\mu\nu}) = 10^{C_{TM}(f, f_{0\mu,\nu})\Delta T_{\mu\nu}/20} e^{jC_{TP}(f, f_{0\mu,\nu})\Delta T_{\mu\nu}\pi/180} \frac{10^{C_{ffM}(f, T_0)/20}}{10^{C_{ffM}(f, T_{\mu\nu})/20}}, \quad \text{(H.4)}$$

où C_{TM} et C_{TP} désignent les polynômes corrigeant l'effet des variations de température statique $\Delta T_{\mu\nu}$ sur l'efficacité en pression $M_{P\mu,\nu}$, respectivement en module et phase [43] et où C_{ffM} désigne le polynôme des corrections champ libre en module, fonction de la température statique [40]. La phase des corrections champ libre Δ_{ff} n'est pas prise en compte dans le cas présent en raison de l'insuffisance des données disponibles. A notre connaissance, seul la référence [41] présente sous forme graphique cette correction de phase comme étant indépendante de la température statique et par suite s'annulant dans le rapport $\Delta_{ff}(f, T_0)/\Delta_{ff}(f, T_{\mu\nu})$ de la relation (H.4).

L'impédance électrique de transfert $Z_{Em\mu\nu}(f)$ est mesurée selon la méthode décrite dans le paragraphe 3.3 et est déduite de l'équation suivante :

$$Z_{Em\mu\nu}(f) = \frac{u_{r0\nu}}{i_{e\mu}} = \frac{-1}{j2\pi f C_{ref}} R_{T\mu\nu}(f) R'_{T\mu\nu}(f), \quad \text{(H.5)}$$

où $R_{T\mu\nu}(f)$ et $R'_{T\mu\nu}(f)$ désignent les deux rapports de tensions mesurés (Eq. 3.43) mais considérés dans le cas présent sans perturbations (cf. ci-dessous).

Afin de tenir compte des incertitudes induites par diverses imperfections de la mesure, plusieurs facteurs de déviations sont introduits (la notation indice « $\mu\nu$ » signifie que le facteur de déviation est dépendant du couple de microphones utilisé) :

- $g_P(f)$, lié à l'incertitude sur les polarisations des deux microphones,
- $g_m(f)$, lié aux variations induites par le manque de répétabilité des mesures abstraction faite des bruits électrique et acoustique (répétabilité de montage, distance entre microphones principalement et angle d'incidence) sur les produits d'efficacités $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})$,
- $g_{b\mu\nu}(f)$, lié aux variations induites par les bruits électrique et acoustique sur les produits d'efficacités après filtrage $(M_{ffc\mu}M_{ffc\nu})$,
- $g_e(f)$, lié aux variations induites par la diaphonie et les échos sur les produits d'efficacités après filtrage $(M_{ffc\mu}M_{ffc\nu})$,
- $g_{BF\mu\nu}(f)$, lié à l'incertitude du produit d'efficacités en basses fréquences $(M_{ff\mu}M_{ff\nu})_{BF}$ obtenu à partir d'un étalonnage en pression par la méthode de la réciprocité ($(M_{ff\mu}M_{ff\nu})_{BF} = M_{P\mu}M_{P\nu}\Delta_{ff}^2$, $\forall f < 1\,\text{kHz}$, cf. § 3.4.2).

Ainsi, le produit des efficacités en champ libre de deux microphones prend la forme

$$\begin{cases} M_{ff\mu}M_{ff\nu} = \dfrac{2(d_m - d_\mu - d_\nu)}{j\rho_{\mu\nu}f} Z_{Em\mu\nu} e^{ik_{\mu\nu}(d_m - d_\mu - d_\nu)} e^{\gamma_{\mu\nu}(d_m - d_\mu - d_\nu)} \delta_T^{ff}(f_{0\mu}, \Delta T_{\mu\nu}) \delta_P^{ff}(f_{0\mu}, \Delta P_{\mu\nu}) \\ \qquad . \delta_T^{ff}(f_{0\nu}, \Delta T_{\mu\nu}) \delta_P^{ff}(f_{0\nu}, \Delta P_{\mu\nu}) g_P(f) g_m(f) g_{b\mu\nu}(f) g_e(f) g_{BF12}(f). \end{cases} \quad \text{(H.6)}$$

L'efficacité d'un microphone est déduite de trois produits d'efficacités

$$\begin{cases} P_{e12} = M_{ff1}M_{ff2}, \\ P_{e13} = M_{ff1}M_{ff3}, \\ P_{e23} = M_{ff2}M_{ff3}, \end{cases} \quad \text{(H.7)}$$

évalués selon l'expression (H.6). L'efficacité d'un microphone (le mesurande) s'écrit alors par exemple pour le microphone 1

$$M_{ff\,1}=\sqrt{\frac{P_{e12}P_{e13}}{P_{e23}}} \tag{H.8}$$

L'incertitude composée u_c associée au mesurande M_{ff} est estimée à partir de la variance composée u_c^2 donnée par

$$u_c^2=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial M_{ff}}{\partial x_n}\right)^2 u^2(x_n) \tag{H.9}$$

où x_n est le n^{ième} paramètre d'entrée (cf. infra) caractérisé par son incertitude $u(x_n)$.

H.2 Paramètres d'entrée, incertitudes

Les paramètres d'entrée intervenant dans le calcul de l'efficacité d'un microphone sont listés ci-dessous ainsi que leurs incertitudes associées. Le tableau H.1 regroupe quelques grandeurs dont les incertitudes $u(x_n)$ sont évaluées à partir de leurs incertitudes élargies $U(x_n)=ku(x_n)$ (où k est le facteur d'élargissement dépendant de la loi de probabilité des observations, $k=2$ pour une loi normale ou $k=\sqrt{3}$ pour une loi uniforme) obtenues directement par les instruments de mesures ou par des certificats d'étalonnages.

	Unité	U	k	u
Distance entre microphones d_m	m	10^{-3}	$\sqrt{3}$	$0{,}58.10^{-3}$
Centres acoustiques $d_{1,2,3}$	m	2.10^{-3}	$\sqrt{3}$	$1{,}16.10^{-3}$
Profondeur des microphones (membrane-bague)	m	10^{-5}	$\sqrt{3}$	$0{,}58.10^{-5}$
Pression statique mesurée $P_{\mu\nu}$	hPa	0,1	2	0,05
Température statique mesurée $T_{\mu\nu}$	°C	0,1	2	0,05
Taux d'humidité relatif mesurée $HR_{\mu\nu}$	%	1	2	0,5
Capacité C_{ref}	F	$1{,}48.10^{-12}$	2	$2{,}38.10^{-13}$
Fréquence de résonance $f_{0\ 1,2,3}$ des microphones	Hz	100	$\sqrt{3}$	28,87
Module rapport de tension $R_{T\mu\nu}$ et $R'_{T\mu\nu}$	dB	0,01	$\sqrt{3}$	$0{,}58.10^{-4}$
Phase rapport de tension $R_{T\mu\nu}$ et $R'_{T\mu\nu}$	degré	0,01	$\sqrt{3}$	$0{,}58.10^{-4}$

Tableau H.1. Paramètres d'entrée, incertitudes élargies $U(x_n)$ et incertitudes $u(x_n)$.

i. Incertitudes liées aux approximations des polynômes

Les coefficients δ_P^P, δ_T^P, et Δ_{ff} intervenant dans le calcul des facteurs corrigeant les effets des variations de température et pression statiques sur les efficacités en champ libre M_{ff} (Eqs. H.2 et H.4) sont calculés à partir des polynômes C_{PM}, C_{PP}, C_{TM}, C_{TP} et C_{ffM} définis dans les références [43,20,40]. Sauf pour le polynôme C_{ffM}, ces références ne donnent pas les incertitudes associées à ces polynômes. Les éléments graphiques donnés dans la référence [20] permettent néanmoins d'estimer approximativement (par majoration) les incertitudes associées aux polynômes C_{PM}, C_{PP}, C_{TP} et C_{TM} ; soit

$$\begin{cases} u(C_{PM}) \approx 0{,}0005/\sqrt{3} \approx 2{,}9.10^{-4}\,\text{dB/kPa}, & \text{(H.10.a)} \\ u(C_{PP}) \approx 0{,}005/\sqrt{3} \approx 2{,}9.10^{-3}\,°/\text{kPa}, & \text{(H.10.b)} \\ u(C_{PM}) \approx 0{,}0005/\sqrt{3} \approx 2{,}9.10^{-4}\,\text{dB/K}, & \text{(H.10.c)} \\ u(C_{PM}) \approx 0{,}005/\sqrt{3} \approx 2{,}9.10^{-3}\,°/\text{K}. & \text{(H.10.d)} \end{cases}$$

L'incertitude associée au polynôme C_{ffM} est d'après le document technique [40] la somme de l'incertitude des données expérimentales d'origine (cf. tableau A.1 de la référence [40]) et d'une incertitude de 0,05 dB, due à l'approximation du polynôme. Dans le cas présent, le polynôme C_{ffM} intervient dans l'équation (H.4) au numérateur et au dénominateur d'un rapport de coefficients champs libres Δ_{ff}. Par conséquent, la variation de ce rapport dues à l'incertitude sur le polynôme C_{ffM} s'annule.

L'affaiblissement linéique $\gamma_{\mu\nu}$ est calculé selon la méthode décrite dans la référence [42] en fonction de la température statique $T_{\mu\nu}$, de la pression statique $P_{\mu\nu}$ et pour une composition de l'air standard. La norme [26] préconise une incertitude relative élargie de 10% sur $\gamma_{\mu\nu}$, soit

$$u(\gamma_{ij})/\gamma_{ij} = 0{,}1/\sqrt{3} \approx 5{,}8\,\% \qquad \text{(H.11)}$$

ii. Incertitude liée à la polarisation des microphones

L'efficacité d'un microphone est liée à sa polarisation. En ne considérant qu'une petite variation de la polarisation d'un microphone, son impédance mécanique peut être considérée comme constante. Dans ces conditions, l'efficacité du microphone est directement proportionnelle à sa tension de polarisation.

La polarisation des microphones est de $200 \pm 0{,}2$ V. Le facteur de déviation $g_P(f)$ s'écrit pour un couple de microphones

$$g_P(f) = g_P = \left(\frac{200 \pm (0{,}2/\sqrt{3})}{200} \right)^2 \approx 1 \pm 0{,}12\,\% \qquad \text{(H.12)}$$

iii. Incertitudes liées au processus de filtrage et au prolongement en basses fréquences

Le produit des efficacités en champ libre $\left(M_{ff\mu} M_{ff\nu}\right)_{BF}$ en basses fréquences ($f < 1\,\text{kHz}$) est obtenu à partir des efficacités en pression $M_{P\mu}$, $M_{P\nu}$ des deux microphones et de leurs corrections champ libre (cf. § 3.4.2), soit

$$\left(M_{ff\mu} M_{ff\nu}\right)_{BF} = M_{P\mu} M_{P\nu} \Delta_{ff}^2, \qquad \forall f < 1\ \text{kHz}. \qquad \text{(H.13)}$$

Les efficacités en pression sont obtenues par des étalonnages indépendants, effectués par la méthode de la réciprocité en pression. Elles sont donc connues avec une incertitude tout comme les coefficients champ libre, incertitude qui se « propage » par filtrage aux points fréquentiels supérieurs à 1 kHz. Cette « propagation » d'incertitude est évaluée en considérant un produit d'efficacité « idéal » (fonction analytique non bruitée, cf. Annexe G.2.1.i, Eq. (G.6)), la variance composée est alors calculée en filtrant cette quantité idéale et en considérant les variations possibles de $M_{P\mu,\nu}$ et de Δ_{ff} aux fréquences inférieures à 1 kHz. L'incertitude élargie ($k = 2$) associée aux efficacités en pression $M_{P\mu,\nu}$ est de 0,04 dB en module et 0,4 ° en phase (incertitudes données au LNE [48]). En ce qui concerne la correction champ libre, le document technique [40] ne donne pas son incertitude aux fréquences inférieures à 1 kHz ; cependant, compte tenu des faibles valeurs de ces corrections pour les fréquences en question et des éléments fournis dans la référence [40],

l'incertitude élargie ($k=2$) associée peut raisonnablement être estimée à 0,1 dB en module et $0{,}5\,°$ en phase. La figure G.9 montre l'évaluation de l'incertitude due à la « propagation » de d'incertitude du produit des efficacités en champ libre $\left(M_{ff\mu}M_{ff\nu}\right)_{BF}$ en basses fréquences. Une fonction approchée en est déduite ce qui permet d'écrire le facteur de déviation $g_{BF}(f)$ sous la forme

$$g_{BF}(f)=(1\pm g_{BFm})e^{\pm j\, g_{BFp}(f)} \tag{H.14}$$

où

$$\begin{cases} g_{BFm}(f)\approx 6\, e^{-2{,}3.10^{-3} f}, & \text{en } \%, \quad \text{(H.15.a)} \\ g_{BFp}(f)\approx 7{,}96.10^{-2}\, e^{-2{,}51.10^{-3} f}, & \text{en radian}. \quad \text{(H.15.b)} \end{cases}$$

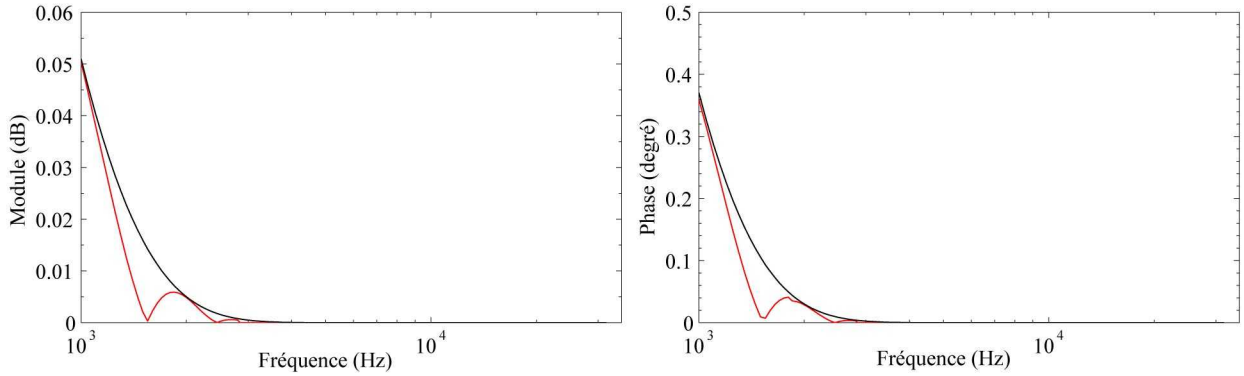


Figure H.1. Incertitude due à la « propagation » au delà de 1 kHz par filtrage (filtre défini dans le tableau 3.2) de l'incertitude du produit des efficacités en champ libre $\left(M_{ff\mu}M_{ff\nu}\right)_{BF}$ en basses fréquences (courbe rouge), forme approchée (courbe noire).

iv. Incertitude liée à la diaphonie et aux perturbations acoustiques résiduelles

Le processus de filtrage développé dans le cadre de cette étude n'est pas totalement efficace. Après filtrage, des perturbations résiduelles b persistent, leurs amplitudes varient selon la performance du filtre choisi. L'évaluation de ces perturbations résiduelles est assez délicate et ne peut être faite de manière exacte ; elles sont prises en compte comme indiqué ci-dessous.

La performance du filtre est testée sur un produit d'efficacités en champ libre parfaitement connu P_{Eb} constitué d'une composante « idéale » P_{Ei} (fonction analytique non bruitée, cf. Annexe G.2.1.i, Eq. (G.6)) et de perturbations connues et réalistes B_c, soit

$$P_{Eb}=P_{Ei}B_c\,. \tag{H.16}$$

En filtrant ce produit d'efficacités bruité P_{Eb} avec un filtre spectral W, il vient

$$P_{Eb}*W=P_{Ei}\delta_e b\,, \tag{H.17}$$

où δ_e est le facteur d'érosion (sur le produit d'efficacités « idéal » P_{Ei}, cf. Annexe G.2.1.i) et où b représente les perturbations résiduelles restant après filtrage, liées aux perturbations totales B_c présentes avant filtrage par la relation

$$B_c=B\,b\,, \tag{H.18}$$

où B désigne les perturbations éliminées par le filtre W.

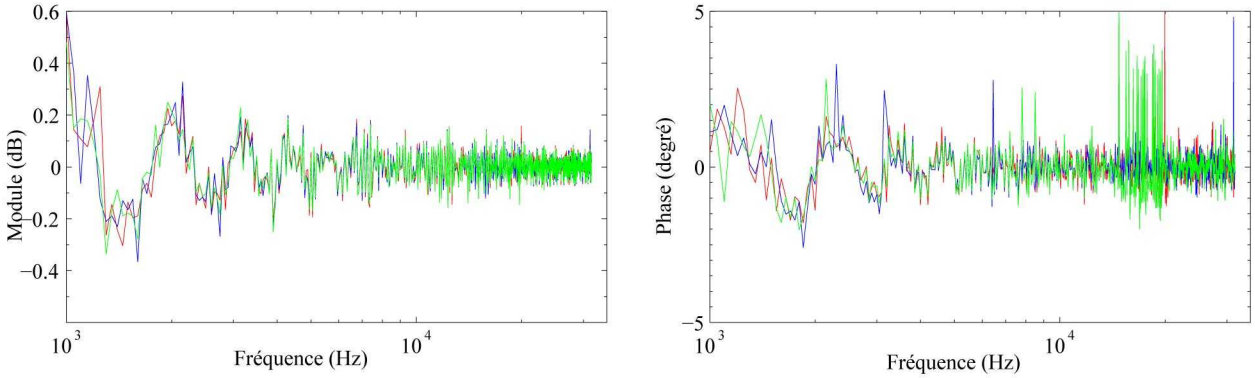


Figure H.2. Perturbations filtrées (filtre défini dans le tableau 3.2) en module et en phase sur trois produits d'efficacités $M_{ff\mu}M_{ff\nu}$ issus d'expérimentations (courbes rouge, bleue et verte).

La méthode consiste à estimer les perturbations totales B_c aussi proches que possible de celles présentes dans les produits des efficacités $M_{ff\mu}M_{ff\nu}$ issus d'expérimentations. La meilleure approximation peut être obtenue à partir des perturbations B éliminées par le filtrage sur ces produits d'efficacités (figure H.2). Cela sous entend que ces perturbations B sont représentatives des perturbations réellement présentes B_c avant filtrage, ce qui peut être considéré comme vrai en l'absence d'échos proches et en utilisant une fenêtre de filtrage très sélective. Ces perturbations B restent néanmoins sous-estimées comparées aux perturbations initialement présentes B_c car elles ne contiennent pas les perturbations résiduelles b (Eq. H.18). Une solution pour l'estimation consiste à appliquer un facteur de majoration k_m, soit

$$B_c \approx k_m B \,. \tag{H.19}$$

Les perturbations résiduelles sont alors estimées avec la relation

$$b \approx \frac{P_{Eb} * W}{P_{Ei}\delta_e} \,, \tag{H.20}$$

soit

$$b \approx \frac{(P_{Ei} k_m B) * W}{P_{Ei}\delta_e} \,. \tag{H.21}$$

La figure H.3 présente les perturbations résiduelles b (Eq. H.21) estimées pour un facteur majorant $k_m = 1{,}2$, ce qui signifie que les perturbations B extraites par filtrage des produits des efficacités $M_{ff\mu}M_{ff\nu}$ issus d'expérimentations (figure H.2) représentent au moins 80% des perturbations totales B_c présentes avant filtrage. La comparaison des amplitudes des perturbations filtrées B (figure H.2) majorées de 20% avec les amplitudes des perturbations résiduelles b calculées (figure H.3) permet de vérifier que le filtre utilisé est efficace à plus de 80% et donc de valider le choix du facteur majorant $k_m = 1{,}2$. Une courbe majorante (courbe noire, figure H.3) est obtenue à partir des perturbations résiduelles b calculées, de laquelle est déduit un écart type (en considérant une loi de probabilité rectangulaire, soit un facteur $1/\sqrt{3}$, trait noir discontinu) permettant d'écrire le facteur de déviation $g_e(f)$ sous la forme

$$g_e(f) = (1 \pm g_{em}) e^{\pm j g_{ep}(f)} \,, \tag{H.22}$$

où

$$\begin{cases} g_{em}(f) \approx 0{,}17\ e^{-5{,}6.10^{-4} f} + 3{,}5.10^{-2}, & \text{en } \%, \quad \text{(H.23.a)} \\ g_{ep}(f) \approx 4{,}5.10^{-3}\, e^{-3.10^{-4} f} + 8{,}7.10^{-4} e^{3{,}7.10^{-5} f + 0{,}2}, & \text{en radian}. \quad \text{(H.23.b)} \end{cases}$$

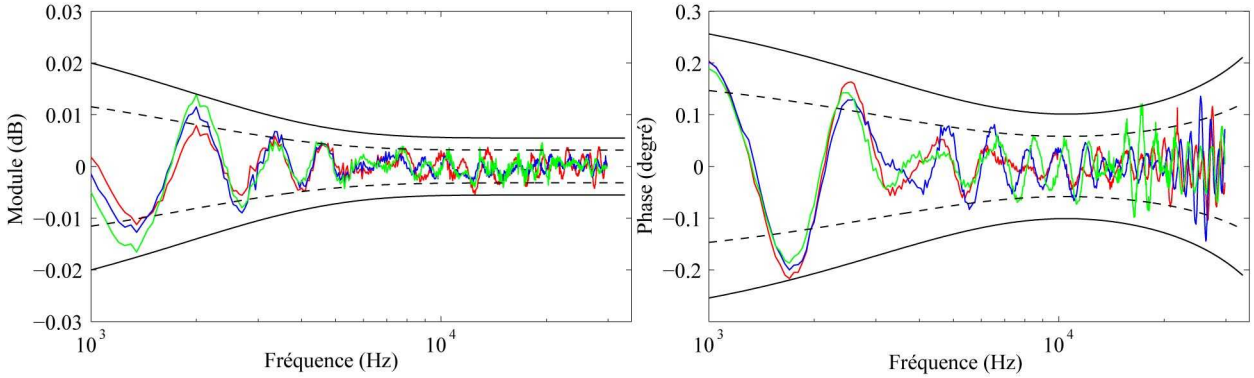


Figure H.3. Estimations des perturbations résiduelles b en module et phase (courbes rouge, bleue et verte issues des trois estimations de bruits B, cf. figure H.2), courbe majorante (courbe noire) et écart type (trait discontinu noir) ; calculées avec le filtre défini dans le tableau 3.2.

A noter que le choix de la fenêtre de filtrage est d'une grande importance dans la réduction de l'écart type associé à la part non filtrée des échos et de la diaphonie. La figure H.2 présente par exemple l'estimation des perturbations résiduelles b lorsque le filtre W_3 défini dans le tableau G.2 est utilisé, filtre moins performant que celui précédemment utilisé (filtre W_2 du tableau G.2 ou 1.2, cf. figures G.6 et G.7). L'estimation des perturbations résiduelles b atteignent alors en module 0,15 dB (figure H.2) en basses fréquences au lieu de 0,01 dB précédemment (figure H.1).

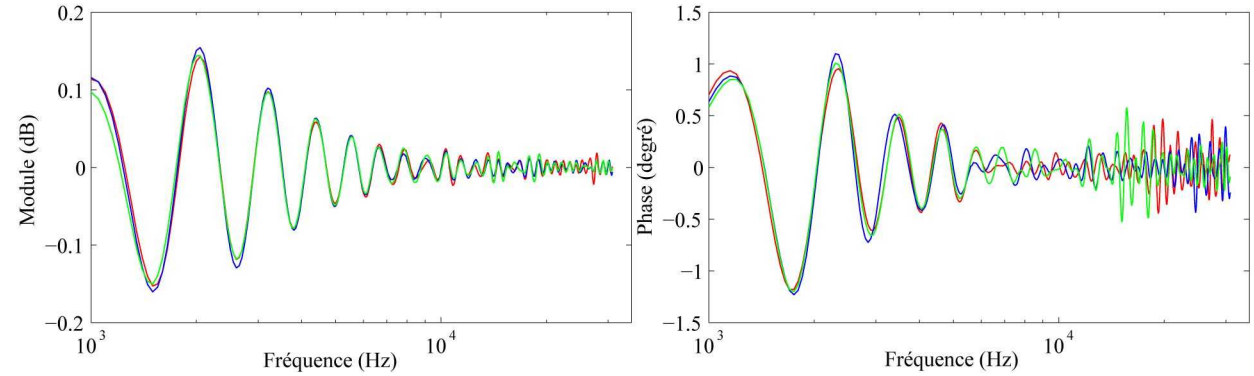


Figure H.4. Estimations des perturbations résiduelles b en module et phase (courbes rouge, bleue et verte issues des trois estimations de bruits B, cf. figure H.2) calculées avec le filtre W_3 défini dans le tableau G.2.

v. Répétabilité des mesures

Le défaut de répétabilité des mesures affecte la précision sur les impédances électriques de transfert $Z_{Em\mu v}(f)$ mesurées. Il dépend des paramètres variables du montage expérimental (principalement la distance entre les microphones et l'angle d'incidence) mais également des bruits électrique et acoustique qui sont en partie éliminés par le processus de filtrage. Ces deux types de défauts sont pris en compte de manière distincte par les facteurs de déviations $g_m(f)$ (répétabilité liée au montage, abstraction faite des bruits électrique et acoustique) et $g_b(f)$ (répétabilité liée aux bruits électrique et acoustique).

Les facteurs de déviations $g_m(f)$ et $g_b(f)$ sont évalués à partir d'observations statistiques. Dans un premier temps, une série de mesures est effectuée en gardant le montage inchangé : il en

résulte un écart type qui renseigne sur la répétabilité des mesures liée aux bruits électrique et acoustique. Puis une autre série de mesures est effectuée en modifiant le montage à chaque mesure : il en résulte un écart type qui renseigne sur la répétabilité liée à la fois au montage et aux bruits électrique et acoustique. La figure H.5 présente ces écart types obtenus avec une série de cinq mesures lorsque les microphones sont espacés de 30 cm. La répétabilité liée au montage est alors déduite en soustrayant les deux écarts types (figure H.5). Il en résulte une répétabilité liée au montage peu variable en fréquence pour le module (de l'ordre de 0,02 dB soit environ 0,23%) et proportionnelle à la fréquence pour la phase (coefficient directeur de l'ordre de 5.10^{-4} en $°/\mathrm{Hz}$) s'expliquant principalement par l'incertitude du positionnement des microphones. Le facteur de déviation $g_m(f)$ peut alors être écrit

$$g_m(f)=(1\pm g_{mm})e^{\pm j g_{mp}(f)}, \tag{H.24}$$

où

$$\begin{cases} g_{mm}\approx 0{,}23, & \text{en } \%, \quad \text{(H.25.a)} \\ g_{mp}(f)\approx 8{,}73.10^{-6} f, & \text{en radian}. \quad \text{(H.24.b)} \end{cases}$$

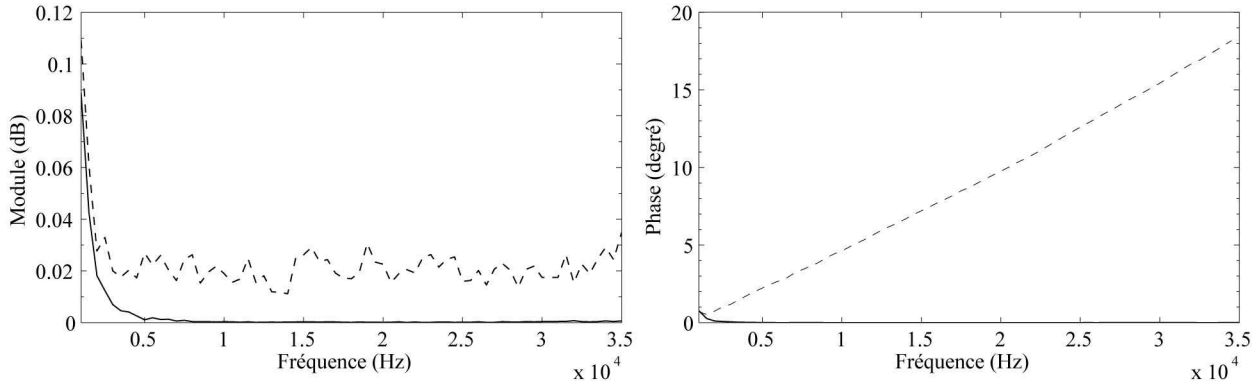


Figure H.5. Répétabilités des mesures (module et phase) : écart type lié aux bruits électrique et acoustique (trait plein) et somme des écarts types liés au montage, bruits électrique et acoustique (trait discontinu).

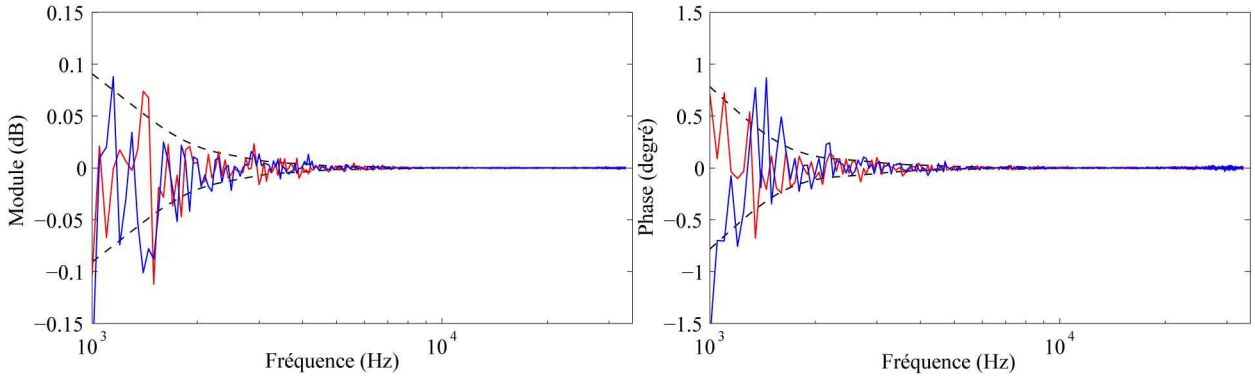


Figure H.6. Ecart type en module et phase lié aux bruits électrique et acoustique (trait discontinu) et deux exemples de bruit B calibrés par cet écart type selon une loi de probabilité normale (courbes bleue et rouge).

L'évaluation de l'incertitude liée aux bruits électrique et acoustique doit tenir compte du filtrage. Elle est évaluée à partir d'un produit d'efficacités P_{Eb} parfaitement connu constitué d'une composante « idéale » P_{Ei} (fonction analytique non bruitée, cf. Annexe G.2.1.i, Eq. (G.6)) auquel est ajouté un bruit B caractérisé par une loi de probabilité normale dont l'écart type est celui constaté expérimentalement (figure H.5, trait plein), soit

$$P_{Eb}=P_{Ei}B\,. \tag{H.26}$$

La figure H.6 présente deux exemples de tels bruits (courbes en trait plein, bleu et rouge).

La somme des bruits électrique et acoustique B_r restant après filtrage est alors évaluée en effectuant l'opération

$$B_r = \frac{\left(P_{Eb} * W\right)}{P_{Ei}} \,. \tag{H.27}$$

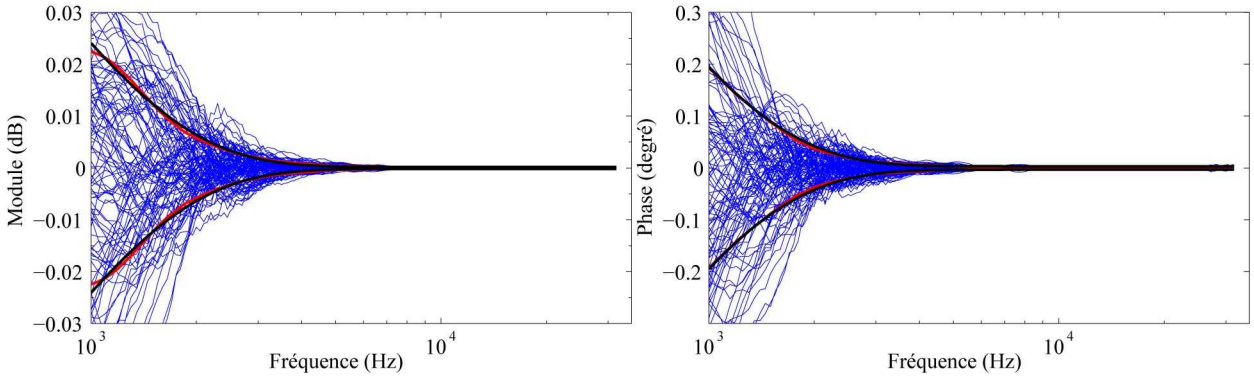


Figure H.7. Bruit restant B_r après filtrage (filtre défini dans le tableau 3.2) en module et phase (courbes bleues), écart type (courbe rouge) et écart type approché (courbe noire).

Afin d'obtenir suffisamment de données statistiques, l'opération est répétée plusieurs fois avec plusieurs produits d'efficacités P_{Eb} (figure H.7, courbes bleues). Il en résulte un écart type (courbe rouge), le facteur de déviation $g_b(f)$ est alors écrit sous forme approchée (courbe noire)

$$g_b(f) \approx (1 \pm g_{bm}(f)) e^{\pm j g_{bp}(f)} \tag{H.28}$$

où

$$\begin{cases} g_{bm} \approx 1.06\ e^{-1{,}35.10^{-3} f} + 2.10^{-3}, & \text{en } \%, \quad \text{(H.29.a)} \\ g_{bp} \approx 1{,}59.10^{-2} e^{-1{,}57.10^{-3} f} + 2{,}78.10^{-5}, & \text{en radian}. \quad \text{(H.29.b)} \end{cases}$$

A noter que à l'instar du paragraphe précédent G.2.1.iv, le bruit électrique et acoustique B_r restant dépend du filtre utilisé, par conséquent, les écarts types (H.29.a et b) ne peuvent être utilisés que pour le filtre utilisé, soit le filtre défini dans le tableau 3.2.

H.3 Incertitude composée élargie

L'incertitude composée est évaluée numériquement en faisant varier les paramètres d'entrée listés (tableau H.1, Eqs. (H.11), (H.12), (H.15), (H.23) et (H.29)) dans le paragraphe précédent selon leurs incertitudes constatées et pour des variations maximums des conditions d'environnement autour des valeurs de référence, soit une pression statique $P_0 = 1013{,}25 \pm 30\,\text{hPa}$, une température statique $T_0 = 23 \pm 3\,°C$ et un taux d'humidité relatif $HR_0 = 50 \pm 30\,\%$. Les résultats obtenus sont présentés et discutés dans le paragraphe 3.5.2.

Annexe I

Valeurs des paramètres d'un microphone électrostatique dans un modèle à constantes localisées

Dans la référence [20], l'auteur propose un modèle de microphone électrostatique à constantes localisées (figure I.1) utilisées ici au paragraphe 4.2.1. L'impédance acoustique $Z_c = p_c / q$ du microphone, la tension T_m et la masse surfacique σ_s de la membrane peuvent être calculés à partir des données publiées par l'auteur pour des microphones de laboratoire de type B&K 4160 (LS1, 1") et B&K 4180 (LS2, ½"), microphones utilisés comme références actuellement pour l'étalonnage des microphones par la méthode de la réciprocité.

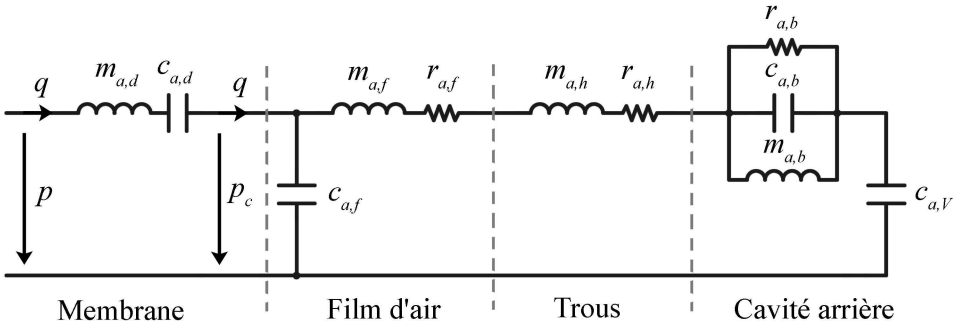


Figure I.1. Réseau à constantes localisées décrivant un microphone électrostatique [20].

Plus précisément, l'impédance acoustique Z_c, la tension de la membrane T_m et sa masse surfacique σ_s sont obtenues en faisant usage des relations ci-dessous (I.1, I.2 et I.3) et des différents paramètres rappelées dans le tableau I.1 [20] (inductances $m_{x,y}$, capacités $c_{x,y}$ et résistances $r_{x,y}$), paramètres moyens calculés à partir des dimensions géométriques, du facteur de qualité et du volume équivalent de ces microphones.

$$\frac{1}{Z_c} = \left(j\omega m_{a,f} + r_{a,f} + j\omega m_{a,h} + r_{a,h} + \frac{1}{1/r_{a,b} + j\omega C_{a,b} + 1/(j\omega m_{a,b})} + \frac{1}{j\omega c_{a,V}} \right)^{-1} + j\omega c_{a,f}, \tag{I.1}$$

$$T_m = \frac{S_m^2}{8\,\pi c_{a,d}}, \tag{I.2}$$

et

$$\sigma_s = \frac{3}{4} m_{a,d} S_m \,. \tag{I.3}$$

Composant	Unité	B&K 4160	B&K 4180
$m_{a,d}$	kg.m^{-4}	225	660
$c_{a,d}$	10^{-12} m^3.Pa^{-1}	1,19	0,068
$c_{a,f}$	10^{-12} m^3.Pa^{-1}	0,05	0,01
$m_{a,f}$	kg.m^{-4}	52	190
$r_{a,f}$	10^6 Pa.s.m^{-3}	18	93
$m_{a,h}$	kg.m^{-4}	38	75
$r_{a,h}$	Pa.s.m^{-3}	1075 $\sqrt{f}$	2100 $\sqrt{f}$
$m_{a,b}$	kg.m^{-4}	115	115
$c_{a,b}$	10^{-12} m3.Pa^{-1}	1,5	0,19
$r_{a,b}$	10^6 Pa.s.m^{-3}	26	74
$c_{a,V}$	10^{-12} m^3.Pa^{-1}	5,15	0,952

Tableau I.1. Constantes localisées de la figure I.1 issues de la référence [20] pour des microphones de type B&K 4160 (1") et B&K 4180 (½") (f désigne la fréquence).

Annexe J

Centre acoustique des microphones électrostatiques : calculs intermédiaires et résolution matricielle du problème

Cette Annexe regroupe quelques calculs intermédiaires utilisés dans le paragraphe 4.2 ainsi que la résolution sous forme matricielle du problème posé par la détermination analytique du centre acoustique d'un microphone électrostatique.

J.1 Calculs intermédiaires

i. Calcul de l'expression (4.53) des coefficients ξ_n

Les coefficients ξ_n sont définis par l'équation (4.25.b) rappelée ci-dessous :

$$\xi_n = \frac{\langle p_1(a_1,-\ell) - p_1(w,-\ell) | \Psi_n(w) \rangle}{T_m (k_w^2 - (j_n/a_1)^2)} \,. \tag{J.1}$$

En utilisant l'équation (4.51) l'intégrale

$$\begin{aligned} \langle p_1(a_1,-\ell) | \Psi_n(w) \rangle = \frac{2}{a_1^2} \int_0^{a_1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Bigg(& \frac{\langle p_2(w_0,0) | \Xi_\mu(w_0) \rangle}{\cos(k_{z\mu}\ell)} \\ & - \rho_0 \omega^2 \frac{\tan(k_{z\mu}\ell) \langle \xi(w_0) | \Xi_\mu(w_0) \rangle}{k_{z\mu}} \Bigg) \frac{J_0(j_n w/a_1)}{J_1(j_n)} \, w \, dw \,, \end{aligned} \tag{J.2}$$

s'écrit (en utilisant la propriété (E.4))

$$\langle p_1(a_1,-\ell) | \Psi_n(w) \rangle = 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{\langle p_2(w_0,0) | \Xi_\mu(w_0) \rangle}{\cos(k_{z\mu}\ell)} - \rho_0 \omega^2 \frac{\tan(k_{z\mu}\ell) \langle \xi(w_0) | \Xi_\mu(w_0) \rangle}{k_{z\mu}} \right) \frac{1}{j_n} \,. \tag{J.3}$$

De même l'intégrale

$$\begin{aligned} \langle p_1(w,-\ell) | \Psi_n(w) \rangle = \frac{2}{a_1^2} \int_0^{a_1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Bigg(& \frac{\langle p_2(w_0,0) | \Xi_\mu(w_0) \rangle}{\cos(k_{z\mu}\ell)} \\ & - \rho_0 \omega^2 \frac{\tan(k_{z\mu}\ell) \langle \xi(w_0) | \Xi_\mu(w_0) \rangle}{k_{z\mu}} \Bigg) \frac{J_0(\gamma_\mu w/a_1)}{J_0(\gamma_\mu)} \frac{J_0(j_n w/a_1)}{J_1(j_n)} \, w \, dw \,, \end{aligned} \tag{J.4}$$

s'écrit (en utilisant la propriété (E.4))

$$\langle p_1(w,-\ell)|\Psi_n(w)\rangle = 2\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{\langle p_2(w_0,0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle}{\cos(k_{z\mu}\ell)} - \rho_0\omega^2\frac{\tan(k_{z\mu}\ell)\langle\xi(w_0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle}{k_{z\mu}}\right)\frac{j_n}{j_n^2-\gamma_\mu^2}\,. \tag{J.5}$$

En reportant les équations (J.3) et (J.5) dans la relation (J.1), les coefficients ξ_n s'écrivent

$$\xi_n = \frac{2}{T_m(k_w^2-(j_n/a_1)^2)}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{\langle p_2(w_0,0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle}{\cos(k_{z\mu}\ell)} - \rho_0\omega^2\frac{\tan(k_{z\mu}\ell)\langle\xi(w_0)|\Xi_\mu(w_0)\rangle}{k_{z\mu}}\right)\left(\frac{1}{j_n}-\frac{j_n}{j_n^2-\gamma_\mu^2}\right) \tag{J.6}$$

ii. Continuité des vitesses entre les domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$: calcul des expressions (4.56) des contantes f_0 et f_n

La condition (4.5.d) traduisant la continuité des vitesses entre les domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, conduit à l'aide des relations (4.37) et (4.54) à l'équation (4.55), à savoir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho_0\omega^2\frac{\langle\xi(w_0)|\Xi_n(w_0)\rangle}{\cos(k_{zn}\ell)} - k_{zn}\tan(k_{zn}\ell)\langle p_2(w_0,0)|\Xi_n(w_0)\rangle\right)\Xi_n(w) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\Phi_n(w) \tag{J.7}$$

En projetant cette relation sur la base des fonctions propres orthonormées $\Phi_\mu(w)$, il vient,

$$\begin{aligned}\int_0^{a_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho_0\omega^2\frac{\langle\xi(w_0)|\Xi_n(w_0)\rangle}{\cos(k_{zn}\ell)} - k_{zn}\tan(k_{zn}\ell)\langle p_2(w_0,0)|\Xi_n(w_0)\rangle\right)\Xi_n(w)\Phi_\mu(w)2\pi\,w\,dw \\ = \int_0^{a_2}\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Phi_n(w)\Phi_\mu(w)2\pi\,w\,dw\,,\end{aligned} \tag{J.8}$$

soit

$$\begin{aligned}f_\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho_0\omega^2\frac{\langle\xi(w_0)|\Xi_n(w_0)\rangle}{\cos(k_{zn}\ell)} - k_{zn}\tan(k_{zn}\ell)\langle p_2(w_0,0)|\Xi_n(w_0)\rangle\right) \\ \cdot\int_0^{a_1}\frac{2}{a_1a_2J_0(\gamma_n)J_0(\gamma_\mu)}J_0\left(\gamma_n\frac{w}{a_1}\right)J_0\left(\gamma_\mu\frac{w}{a_2}\right)w\,dw\,.\end{aligned} \tag{J.9}$$

Dans le cas où $\mu=0$, cette équation s'écrit à l'aide de la propriété (E.2)

$$f_0 = \left(\rho_0\omega^2\frac{\langle\xi(w_0)|\Xi_0(w_0)\rangle}{\cos(k_0\ell)} - k_0 tg(k_0\ell)\langle p_2(w_0,0)|\Xi_0(w_0)\rangle\right)\frac{a_1}{a_2}\,, \tag{J.10}$$

et pour $\mu\geq 1$ à l'aide de la propriété (E.4)

$$f_\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho_0\omega^2\frac{\langle\xi(w_0)|\Xi_n(w_0)\rangle}{\cos(k_{zn}\ell)} - k_{zn}\tan(k_{zn}\ell)\langle p_2(w_0,0)|\Xi_n(w_0)\rangle\right)\frac{2\gamma_\mu(a_1/a_2)^2}{(\gamma_\mu a_1/a_2)^2-(\gamma_n)^2}\frac{J_1(\gamma_\mu a_1/a_2)}{J_0(\gamma_\mu)}. \tag{J.11}$$

iii. Condition (4.59) (démonstration)

L'expression (4.58) rappelée ci-dessous

$$\hat{P}_2(w,s) = \frac{-P(s)J_0(\chi w)}{\chi J_1(\chi a_2)} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n+s\,h_n}{s^2-\chi_n^2}\Phi_n(w)\,, \tag{J.12}$$

définissant la pression dans le domaine $\mathcal{D}_2$ impose une condition supplémentaire assurant que la fonction est analytique, soit parfaitement définie y compris lorsque $s=\pm\chi_n$ (absence de pôle). En

multipliant la relation (J.12) par $J_1(\chi a_2)$, il vient

$$\hat{P}_2(w,s)J_1(\chi a_2)=\frac{-P(s)J_0(\chi w)}{\chi}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n+s\,h_n}{s^2-\chi_n^2}J_1(\chi a_2)\Phi_n(w)\ . \tag{J.13}$$

Lorsque $s\to\pm\chi_n$, en utilisant les relations (4.15) $\chi^2=s^2+k_0^2$, et (4.41) $\chi_n^2=(\gamma_n/a_2)^2-k_0^2$ alors

$$\chi\to\pm\gamma_n/a_2\ ,\ \text{et}\ J_1(\pm\chi a_2)\to 0\ .$$

Ainsi, si $s\to\pm\chi_n$, le membre de gauche de l'équation (J.13) est nécessairement nul puisque la pression $\hat{P}_2(w,s)$ est obligatoirement analytique. Ceci implique

$$\lim_{s\to\pm\chi_n}\left[\frac{P(s)J_0\left(w\sqrt{s^2+k_0^2}\right)}{\sqrt{s^2+k_0^2}}\right]=\lim_{s\to\pm\chi_n}\left[\frac{f_n+s\,h_n}{s^2-\chi_n^2}J_1\left(a_2\sqrt{s^2+k_0^2}\right)\Phi_n(w)\right]\ . \tag{J.14}$$

En faisant usage des équations (4.41) et (4.35), il vient

$$\lim_{s\to\pm\chi_n}\left[J_0\left(w\sqrt{s^2+k_0^2}\right)\right]=J_0\left(w\frac{\gamma_n}{a_2}\right)=\sqrt{\pi}\,a_2J_0(\gamma_n)\Phi_n(w)\ . \tag{J.15}$$

L'équation (J.14) s'écrit alors

$$\lim_{s\to\pm\chi_n}\left[\frac{P(s)\sqrt{\pi}\,a_2J_0(\gamma_n)}{\sqrt{s^2+k_0^2}}\right]=\lim_{s\to\pm\chi_n}\left[\frac{f_n+s\,h_n}{s^2-\chi_n^2}J_1\left(a_2\sqrt{s^2+k_0^2}\right)\right]\ . \tag{J.16}$$

D'autre part, la propriété (E.9) permet d'écrire l'équation

$$-\frac{J_2\left(a_2\sqrt{s^2+k_0^2}\right)}{J_1\left(a_2\sqrt{s^2+k_0^2}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\ a_2\sqrt{s^2+k_0^2}}{a_2^2\left(s^2+k_0^2\right)-\gamma_n^2}\ , \tag{J.17}$$

qui conduit en utilisant la relation de récurrence (E.5) et l'équation (4.41) à la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(a_2\sqrt{s^2+k_0^2}\right)}{s^2-\chi_n^2}=\frac{J_0\left(a_2\sqrt{s^2+k_0^2}\right)}{(2/a_2)\sqrt{s^2+k_0^2}}-\frac{J_1\left(a_2\sqrt{s^2+k_0^2}\right)}{s^2+k_0^2}\ , \tag{J.18}$$

soit en considérant la limite $s\to\pm\chi_n$

$$\lim_{s\to\pm\chi_n}\frac{J_1\left(a_2\sqrt{s^2+k_0^2}\right)}{s^2-\chi_n^2}=\lim_{s\to\pm\chi_n}\frac{J_0\left(a_2\sqrt{s^2+k_0^2}\right)}{(2/a_2)\sqrt{s^2+k_0^2}}=\lim_{s\to\pm\chi_n}\frac{a_2J_0(\gamma_n)}{2\sqrt{s^2+k_0^2}}\ ,\ \text{pour}\ n\geq 1\ . \tag{J.19}$$

En reportant cette dernière équation dans la relation (J.16), il vient

$$2\sqrt{\pi}\,P(\pm\chi_n)=f_n\pm\chi_n h_n\ ,\qquad \forall\, n\geq 1\ . \tag{J.20}$$

Dans le cas particulier où $n=0$, en utilisant le comportement autour de l'origine des fonctions de Bessel (E.6) lorsque $s\to\pm\chi_0=\pm jk_0$ soit $\left(a_2\sqrt{s^2+k_0^2}\right)\to 0$, il vient

$$\lim_{s\to\pm jk_0}\frac{J_1\left(a_2\sqrt{s^2+k_0^2}\right)}{s^2+k_0^2}\approx\lim_{s\to\pm jk_0}\frac{a_2\sqrt{s^2+k_0^2}}{2\left(s^2+k_0^2\right)}=\lim_{s\to\pm jk_0}\frac{a_2}{2\sqrt{s^2+k_0^2}}\ . \tag{J.21}$$

En reportant cette dernière équation dans la relation (J.16) pour $n=0$ il vient

$$2\sqrt{\pi}\,P(\pm jk_0)=f_0\pm jk_0 h_0\,. \tag{J.22}$$

La condition nécessaire traduisant l'analycité de la fonction $\hat{P}_2(w,s)$ se traduit donc par la condition suivante

$$2\sqrt{\pi}\,P(\pm\chi_n)=f_n\pm\chi_n h_n\,, \qquad \forall\, n\geq 0\,. \tag{J.23}$$

iv. Pression acoustique en champ lointain (équation 4.76)

Le calcul du champ de pression dans l'espace $\mathcal{D}_3$ nécessite l'inversion de la transformée de Laplace de l'expression (4.47). soit l'opération

$$p_3(w,z)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{-P(s)H_0^{(2)}(\chi w)}{\chi H_1^{(2)}(\chi a_2)}e^{sz}\,ds\,. \tag{J.24}$$

En effectuant le changement de variable

$$z=r\cos\theta \;\text{ et }\; w=r\sin\theta\,, \tag{J.25}$$

il vient,

$$p_3(r,\theta)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{-P(s)H_0^{(2)}(\chi r\sin\theta)}{\chi H_1^{(2)}(\chi a_2)}e^{sr\cos\theta}\,ds\,. \tag{J.26}$$

La complexité de cette expression ne permet pas un calcul exact de la pression acoustique $p_3(r,\theta)$. Une expression asymptotique ($r\to\infty$) de cette intégrale peut être calculée en utilisant la méthode du col. Ainsi, en écrivant l'intégrale (J.26) sous la forme équivalente,

$$p_3(r,\theta)=\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}h(s)e^{ru(s)}ds\,, \tag{J.27}$$

où

$$h(s)=\frac{1}{2\pi j}\frac{-P(s)H_0^{(2)}(\sqrt{s^2+k_0^2}\,r\sin\theta)}{\sqrt{s^2+k_0^2}\,H_1^{(2)}(\sqrt{s^2+k_0^2}\,a_2)}e^{j\sqrt{s^2+k_0^2}\,r\sin\theta} \tag{J.28}$$

et

$$u(s)=s\cos\theta-j\sin\theta\sqrt{s^2+k_0^2}\,, \tag{J.29}$$

le point col de $u(s)$, c'est à dire le point pour lequel $\partial u(s)/\partial s=0$, est donné par $s_c=-jk_0\cos\theta$, et l'intégrale (J.26) présente la forme asymptotique

$$p_3(r,\theta)\to -h(s_c)e^{ru(s_c)}\sqrt{\frac{2\pi}{-ru''(s_c)}}\,, \qquad \text{pour } r\to\infty\,, \tag{J.30}$$

soit

$$p_3(r,\theta)\to\frac{1}{2\pi j}\frac{P(-jk_0\cos\theta)H_0^{(2)}(rk_0\sin^2\theta)}{k_0\sin\theta H_1^{(2)}(a_2k_0\sin\theta)}\sqrt{\frac{2\pi k_0\sin^2\theta}{jr}}e^{jrk_0\sin^2\theta}e^{jk_0r}\,, \qquad \text{pour } r\to\infty\,. \tag{J.31}$$

En utilisant la propriété

$$H_0^{(2)}(x)e^{jx} \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{j\pi/4} = \sqrt{\frac{2j}{\pi x}}\ , \text{ lorsque } |x| \to \infty\ , \tag{J.32}$$

il vient,

$$p_3(r,\theta) \to \frac{P(-jk_0\cos\theta)}{j\pi k_0 \sin\theta H_1^{(2)}(a_2 k_0 \sin\theta)}\frac{e^{jk_0 r}}{r}\ , \quad \text{pour } r \to \infty\ . \tag{J.33}$$

Le facteur $P(-jk_0\cos\theta)$ déduit de l'équation (4.70), soit

$$P(-jk_0\cos\theta) = k_0^2(1-\cos\theta)K_P(-jk_0\cos\theta)K_P(jk_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n - \beta_n}{\chi_n - jk_0\cos\theta}\ , \tag{J.34}$$

permet d'écrire la solution asymptotique (J.33) sous la forme

$$p_3(r,\theta) \to \frac{k_0(1-\cos\theta)K_P(-jk_0\cos\theta)K_P(jk_0)}{j\pi\sin\theta H_1^{(2)}(a_2 k_0\sin\theta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n-\beta_n}{\chi_n - jk_0\cos\theta}\frac{e^{jk_0 r}}{r}\ , \qquad \text{pour } r \to \infty\ . \tag{J.35}$$

où les coefficients α_n et β_n sont définis en fonction des inconnues f_n et h_n (Eqs. (4.71.a et b)) du système d'équations (4.52), (4.53), (4.56) et (4.73) résolu ci-dessous.

J.2 Résolution du problème couplé

Les équations (4.52), (4.53), (4.56) et (4.73) définissent un système d'équations dont les inconnues sont les constantes B_0, ξ_n, f_n, h_n. Ces équations sont écrites sous forme matricielle de manière à simplifier la résolution du système d'équations.

J.2.1 Ecriture matricielle des équations du problème

i. Constante d'intégration B_0 (Eq. (4.52))

Le produit scalaire $\langle \xi(w_0)|\Xi(w_0)\rangle$ (Eq. (4.50)) intervenant dans l'équation (4.52) s'écrit en fonction de B_0 et ξ_n sous la forme matricielle suivante :

$$\langle \xi(w_0)|\Xi(w_0)\rangle = d_0 B_0 + D_0 \xi_n\ , \tag{J.36}$$

où d_0 est un vecteur colonne défini par

$$\left[d_0\right]_j = \sqrt{\pi}a_1\delta_{j0} - \frac{J_1(k_w a_1)}{J_0(k_w a_1)}\frac{2\sqrt{\pi}k_w}{k_w^2 - (\gamma_j/a_1)^2}\ , \tag{J.37}$$

et D_0 est une matrice carrée définie par

$$\left[D_0\right]_{i,j} = 2\frac{j_i}{j_i^2 - \gamma_j^2}\ . \tag{J.38}$$

De même, le produit scalaire $\langle p_2(w_0,0)|\Xi(w_0)\rangle$ (Eq. (4.49)) intervenant dans l'équation (4.52) s'écrit en fonction de h_n sous la forme matricielle suivante :

$$\langle p_2(w_0,0)|\Xi(w_0)\rangle = D_1 h_n\ , \tag{J.39}$$

où D_1 est une matrice carrée définie par

$$\begin{cases} \left[D_1\right]_{i,j} = \dfrac{a_1}{a_2}, & i=0,\ j=0, \\ \left[D_1\right]_{i,j} = 0, & i=0,\ j\geq 1, \\ \left[D_1\right]_{i,j} = \dfrac{2\gamma_i (a_1/a_2)^2}{(\gamma_i a_1/a_2)^2 - (\gamma_j)^2} \dfrac{J_1(\gamma_i a_1/a_2)}{J_0(\gamma_i)}, & i\geq 1,\ j\geq 0. \end{cases} \tag{J.40}$$

En utilisant les notations matricielles définies par les équations (J.36) et (J.39), l'équation (4.52) s'écrit en fonction de p_s, h_n, B_0 et ξ_n sous la forme matricielle suivante :

$$B_0 = C_0\, p_s - (d_1)^T D_1\, h_n + (d_2)^T \left[d_0 B_0 + D_0 \xi_n\right], \tag{J.41}$$

soit

$$\left[1 - (d_2)^T d_0\right] B_0 - (d_2)^T D_0 \xi_n + (d_1)^T D_1 h_n = C_0\, p_s, \tag{J.42}$$

où C_0 est une constante définie par

$$C_0 = \frac{1}{T_m k_w^2}, \tag{J.43}$$

où d_1 et d_2 sont des vecteurs colonnes (l'exposant T désignant sa transposée) définis par

$$\left[d_1\right]_j = \frac{1}{T_m k_w^2 \sqrt{\pi}\, a_1 \cos(k_{zj}\ell)}, \tag{J.44}$$

et

$$\left[d_2\right]_j = \frac{\rho_0 \omega^2}{T_m k_w^2} \frac{\tan(k_{zj}\ell)}{\sqrt{\pi}\, a_1 k_{zj}}. \tag{J.45}$$

ii. Constantes d'intégration ξ_n (Eq. (4.53))

En utilisant les notations matricielles définies par les équations (J.36) et (J.39), l'équation (4.53) s'écrit en fonction de h_n, B_0 et ξ_n sous la forme matricielle suivante :

$$\xi_n = D_2 D_1\, h_n - D_3 \left[d_0 B_0 + D_0 \xi_n\right], \tag{J.46}$$

soit

$$D_2 D_1\, h_n - D_3 d_0 B_0 - \left[D_3 D_0 + I\right] \xi_n = 0, \tag{J.47}$$

où D_2 et D_3 sont des matrices carrées définies par

$$\left[D_2\right]_{i,j} = \frac{2}{T_m \cos(k_{zi}\ell)\left(k_w^2 - (j_j/a_1)^2\right)} \left[\frac{1}{j_j} - \frac{j_j}{(j_j)^2 - (\gamma_i)^2}\right], \tag{J.48}$$

et

$$\left[D_3\right]_{i,j} = \frac{2\rho_0 \omega^2 \tan(k_{zi}\ell)}{T_m k_{zi}\left(k_w^2 - (j_j/a_1)^2\right)} \left[\frac{1}{j_j} - \frac{j_j}{(j_j)^2 - (\gamma_i)^2}\right]. \tag{J.49}$$

et où I est la matrice unité.

iii. Constantes f_n (Eq. (4.56))

En utilisant les notations matricielles définies par les équations (J.36) et (J.39), l'équation (4.56) s'écrit en fonction de f_n, B_0, ξ_n et h_n sous la forme matricielle suivante :

$$f_n = D_4[d_0 B_0 + D_0 \xi_n] - D_5 D_1 h_n \tag{J.50}$$

où D_4 et D_5 sont des matrices carrées définies par

$$\begin{cases} [D_4]_{i,j} = \dfrac{\rho_0 \omega^2}{\cos(k_0 \ell)} \dfrac{a_1}{a_2}, & i=0, j=0, \\ [D_4]_{i,j} = 0, & i \geq 1, j=0, \\ [D_4]_{i,j} = \dfrac{\rho_0 \omega^2}{\cos(k_{zi} \ell)} \dfrac{2\gamma_j (a_1/a_2)^2}{(\gamma_j a_1/a_2)^2 - (\gamma_i)^2} \dfrac{J_1(\gamma_j a_1/a_2)}{J_0(\gamma_j)}, & i \geq 0, j \geq 1, \end{cases} \tag{J.51}$$

et

$$\begin{cases} [D_5]_{i,j} = k_0 \tan(k_0 \ell) \dfrac{a_1}{a_{2,}} & i=0, j=0, \\ [D_5]_{i,j} = 0, & i \geq 1, j=0, \\ [D_5]_{i,j} = k_{zi} \tan(k_{zi} \ell) \dfrac{2\gamma_j (a_1/a_2)^2}{(\gamma_j a_1/a_2)^2 - (\gamma_i)^2} \dfrac{J_1(\gamma_j a_1/a_2)}{J_0(\gamma_j)}, & i \geq 0, j \geq 1. \end{cases} \tag{J.52}$$

iv. Constantes α_n et β_n (Eqs. (4.73), (4.71.a et b))

L'équation (4.73) s'écrit en fonction de α_n et β_n sous la forme matricielle suivante :

$$D_6 \beta_n = D_7 \alpha_n, \tag{J.53}$$

où D_6 et D_7 sont des matrices carrées définies par

$$\begin{cases} [D_6]_{i,j} = \left[1 + \dfrac{(2\chi_j)^2}{[(ik_0 + \chi_j) K_P(\chi_j)]^2}\right] \dfrac{1}{2\chi_j}, & i = j, \\ [D_6]_{i,j} = \dfrac{1}{\chi_i + \chi_j}, & i \neq j, \end{cases} \tag{J.54}$$

et

$$\begin{cases} [D_7]_{i,j} = \left[1 - \dfrac{(2\chi_j)^2}{[(ik_0 + \chi_j) K_P(\chi_j)]^2}\right] \dfrac{1}{2\chi_j}, & i = j, \\ [D_7]_{i,j} = \dfrac{1}{\chi_i + \chi_j}, & i \neq j, \end{cases} \tag{J.55}$$

les vecteurs α_n et β_n étant liés aux constantes f_n et h_n par les relations (4.71.a et b), soit sous forme matricielle

$$\begin{cases} \alpha_n = D_8 f_n, & \text{(J.56.a)} \\ \beta_n = D_9 h_n, & \text{(J.56.b)} \end{cases}$$

où H_0 et H_1 sont des matrices diagonales définies par

$$\begin{cases} \left[D_8\right]_{i,j} = -\dfrac{ik_0+\chi_n}{4ik_0\sqrt{\pi}}\dfrac{K_P(\chi_j)}{K_P(ik_0)}\dfrac{1}{\chi_j}, & i=j\,, \\ \left[D_8\right]_{i,j} = 0, & i\neq j\,, \end{cases} \tag{J.57}$$

et

$$\begin{cases} \left[D_9\right]_{i,j} = -\dfrac{ik_0+\chi_n}{4ik_0\sqrt{\pi}}\dfrac{K_P(\chi_j)}{K_P(ik_0)}, & i=j\,, \\ \left[D_9\right]_{i,j} = 0, & i\neq j. \end{cases} \tag{J.58}$$

J.2.2 Calcul des coefficients inconnus du problème

Les équations (4.52), (4.53), (4.56) et (4.73) réécrites sous les formes matricielles (J.42), (J.47), (J.50), (J.53) et (J.56.a et b) définissent un système d'équations rappelées ci-dessous dont les inconnues sont les constantes B_0, ξ_n, f_n, h_n, les vecteurs α_n et β_n étant liés aux vecteurs inconnus f_n et h_n (J.56.a et b).

$$\begin{cases} [1-(d_2)^T d_0]\,B_0 - (d_2)^T D_0 \xi_n + (d_1)^T D_1 h_n = C_0 p_s\,, \\ D_2 D_1 h_n - D_3 d_0 B_0 - [D_3 D_0 + I]\,\xi_n = 0, \\ f_n = D_4[d_0 B_0 + D_0 \xi_n] - D_5 D_1 h_n\,, \\ D_6 \beta_n = D_7 \alpha_n\,, \\ \alpha_n = D_8 f_n\,, \\ \beta_n = D_9 h_n\,. \end{cases}$$

En récrivant l'équation (J.42) sous la forme

$$B_0 = [1-(d_2)^T d_0]^{-1}(d_2)^T D_0 \xi_n - [1-(d_2)^T d_0]^{-1}(d_1)^T D_1 h_n + [1-(d_2)^T d_0]^{-1} C_0 p_s\,, \tag{J.59}$$

et en reportant cette relation dans l'équation (J.47) il vient

$$\begin{aligned} &\left[D_3 D_0 + I + D_3 d_0 [1-(d_2)^T d_0]^{-1}(d_2)^T D_0\right]\xi_n \\ &\quad = \left[D_2 D_1 + D_3 d_0 [1-(d_2)^T d_0]^{-1}(d_1)^T D_1\right] h_n - D_3 d_0 [1-(d_2)^T d_0]^{-1} C_0 p_s\,, \end{aligned} \tag{J.60}$$

soit de façon réduite

$$\xi_n = D_{10}[D_{11} h_n - d_3 p_s]\,, \tag{J.61}$$

avec

$$\begin{cases} D_{10} = \left[D_3 D_0 + I + D_3 d_0 [1-(d_2)^T d_0]^{-1}(d_2)^T D_0\right]^{-1}, & \text{(J.62.a)} \\ D_{11} = \left[D_2 D_1 + D_3 d_0 [1-(d_2)^T d_0]^{-1}(d_1)^T D_1\right], & \text{(J.62.b)} \\ d_3 = D_3 d_0 [1-(d_2)^T d_0]^{-1} C_0\,. & \text{(J.62.c)} \end{cases}$$

En reportant la relation (J.61) dans l'équation (J.59) il vient

$$B_0 = \left[1-(d_2)^T d_0\right]^{-1}\left[(d_2)^T D_0 D_{10} D_{11} - (d_1)^T D_1\right] h_n + \left[1-(d_2)^T d_0\right]^{-1}\left[C_0 - (d_2)^T D_0 D_{10} d_3\right] p_s \tag{J.63}$$

soit

$$B_0 = (d_4)^T h_n + C_1 p_s\,, \tag{J.64}$$

avec

$$\begin{cases}(d_4)^T=\left[1-(d_2)^T d_0\right]^{-1}\left[(d_2)^T D_0 D_{10} D_{11}-(d_1)^T D_1\right], & \text{(J.65.a)}\\ C_1=\left[1-(d_2)^T d_0\right]^{-1}\left[C_0-(d_2)^T D_0 D_{10} d_3\right]. & \text{(J.65.b)}\end{cases}$$

D'autre part, en combinant les relations (J.50), (J.53) et (J.56.a), puis en reportant les équations (J.61) et (J.64) dans l'expression obtenue il vient

$$D_6\beta_n=D_7 D_8\left[D_4 d_0 (d_4)^T+D_4 D_0 D_{10} D_{11}-D_5 D_1\right]h_n+D_7 D_8 D_4\left[d_0 C_1-D_0 D_{10} d_3\right]p_s\,, \qquad \text{(J.66}$$

soit

$$D_6\beta_n=D_{12}h_n+d_5 p_s\,, \qquad \text{(J.67)}$$

avec

$$\begin{cases}D_{12}=D_7 D_8\left[D_4 d_0 (d_4)^T+D_4 D_0 D_{10} D_{11}-D_5 D_1\right], & \text{(J.68.a)}\\ d_5=D_7 D_8 D_4\left[d_0 C_1-D_0 D_{10} d_3\right]. & \text{(J.68.b)}\end{cases}$$

Enfin, en reportant la relation (J.56.b) dans l'équation (J.67) il vient

$$\left[D_6-D_{12}D_9^{-1}\right]\beta_n=d_5 p_s\,. \qquad \text{(J.69)}$$

La résolution de ce système d'équations matricielles est effectuée pour une force unitaire (l'ensemble des résultats recherchés étant proportionnel à p_s, source d'énergie du système). Ainsi, l'équation (J.69) devient :

$$\left[D_6-D_{12}D_9^{-1}\right]\beta_n=d_5\,. \qquad \text{(J.70)}$$

J.3 Fonctions Kp

Les fonctions $K_P(\chi_n)$ où $\chi_n^2=(\gamma_n/a_2)^2-k_0^2$ sont nécessaires au calcul analytique de la position du centre acoustique d'un microphone (Eqs. (4.76) et (4.73)). La méthode utilisée ici pour calculer les fonctions $K_P(\chi_n)$ est décrite dans la référence [71]. Le tableau présente quelques valeurs de la fonction $K_P(\chi_n)$ ainsi calculées en fonction de $k_0 a_2$ et n.

$k_0 a_2$	**n=1**	**n=2**	**n=3**	**n=4**	**n=5**	**n=6**	**n=7**	**n=8**	**n=9**	**n=10**
0	1 - 0i	0.4532 + 0i	0.3526 + 0i	0.2988 + 0i	0.264 + 0i	0.2391 + 0i	0.2201 + 0i	0.2051 + 0i	0.1927 + 0i	0.1824 + 0i
0.25	0.974 - 0.148i	0.4555 - 0.0003i	0.3535 - 0.0001i	0.2994 - 0.0001i	0.2644 - 0i	0.2394 - 0i	0.2203 - 0i	0.2052 - 0i	0.1929 - 0i	0.1825 - 0i
0.5	0.907 - 0.2716i	0.4618 - 0.0022i	0.3562 - 0.0009i	0.3009 - 0.0005i	0.2654 - 0.0004i	0.2401 - 0.0003i	0.2209 - 0.0002i	0.2057 - 0.0002i	0.1933 - 0.0001i	0.1828 - 0.0001i
0.75	0.8175 - 0.3618i	0.4714 - 0.0067i	0.3602 - 0.0028i	0.3032 - 0.0016i	0.267 - 0.0011i	0.2413 - 0.0008i	0.2218 - 0.0006i	0.2064 - 0.0005i	0.1938 - 0.0004i	0.1833 - 0.0003i
1	0.7204 - 0.4196i	0.4836 - 0.0148i	0.3652 - 0.006i	0.3061 - 0.0035i	0.2689 - 0.0023i	0.2427 - 0.0017i	0.2229 - 0.0013i	0.2073 - 0.0011i	0.1946 - 0.0009i	0.1839 - 0.0007i

1.25	0.6254 - 0.4503i	0.4976 - 0.0274i	0.3708 - 0.0109i	0.3094 - 0.0062i	0.2711 - 0.0042i	0.2443 - 0.003i	0.2241 - 0.0023i	0.2083 - 0.0019i	0.1954 - 0.0015i	0.1846 - 0.0013i
1.5	0.5381 - 0.4596i	0.5125 - 0.0451i	0.3768 - 0.0175i	0.3128 - 0.0099i	0.2734 - 0.0066i	0.246 - 0.0048i	0.2254 - 0.0037i	0.2093 - 0.003i	0.1962 - 0.0024i	0.1853 - 0.0021i
1.75	0.4611 - 0.4532i	0.5271 - 0.069i	0.3826 - 0.026i	0.3162 - 0.0147i	0.2757 - 0.0097i	0.2476 - 0.0071i	0.2267 - 0.0054i	0.2103 - 0.0043i	0.1971 - 0.0036i	0.186 - 0.003i
2	0.3954 - 0.4357i	0.5396 - 0.0999i	0.3879 - 0.0366i	0.3193 - 0.0205i	0.2777 - 0.0135i	0.2491 - 0.0098i	0.2279 - 0.0075i	0.2113 - 0.006i	0.1979 - 0.0049i	0.1867 - 0.0042i
2.25	0.3408 - 0.4107i	0.5479 - 0.1388i	0.392 - 0.0493i	0.3218 - 0.0274i	0.2795 - 0.018i	0.2504 - 0.013i	0.2289 - 0.01i	0.2121 - 0.008i	0.1985 - 0.0065i	0.1873 - 0.0055i
2.5	0.2967 - 0.381i	0.5483 - 0.1862i	0.3943 - 0.0641i	0.3234 - 0.0354i	0.2807 - 0.0232i	0.2513 - 0.0168i	0.2296 - 0.0128i	0.2127 - 0.0102i	0.199 - 0.0084i	0.1877 - 0.0071i
2.75	0.2622 - 0.3483i	0.5359 - 0.2418i	0.3939 - 0.0808i	0.3237 - 0.0444i	0.281 - 0.0291i	0.2517 - 0.021i	0.2299 - 0.016i	0.213 - 0.0128i	0.1993 - 0.0105i	0.1879 - 0.0088i
3	0.2365 - 0.3137i	0.5031 - 0.3031i	0.3896 - 0.0991i	0.3221 - 0.0543i	0.2803 - 0.0355i	0.2512 - 0.0256i	0.2296 - 0.0196i	0.2127 - 0.0156i	0.1991 - 0.0128i	0.1878 - 0.0108i
3.25	0.219 - 0.2775i	0.438 - 0.3629i	0.3796 - 0.1181i	0.3178 - 0.0648i	0.2778 - 0.0425i	0.2496 - 0.0306i	0.2284 - 0.0234i	0.2118 - 0.0187i	0.1984 - 0.0153i	0.1872 - 0.0129i
3.5	0.2102 - 0.2381i	0.3207 - 0.3986i	0.3608 - 0.136i	0.3091 - 0.0752i	0.2725 - 0.0495i	0.2459 - 0.0358i	0.2258 - 0.0274i	0.2098 - 0.0219i	0.1967 - 0.018i	0.1858 - 0.0151i
3.75	0.2157 - 0.1863i	0.1101 - 0.3082i	0.3234 - 0.1467i	0.2902 - 0.0834i	0.2606 - 0.0556i	0.2376 - 0.0405i	0.2195 - 0.0312i	0.2048 - 0.025i	0.1927 - 0.0206i	0.1824 - 0.0173i
4	0.2879 - 0.1869i	0.3442 - 0.1146i	0.3109 - 0.0967i	0.2801 - 0.0576i	0.253 - 0.0391i	0.2316 - 0.0288i	0.2147 - 0.0223i	0.2008 - 0.0179i	0.1893 - 0.0148i	0.1796 - 0.0125i
4.25	0.2918 - 0.217i	0.3766 - 0.2047i	0.3295 - 0.0877i	0.2895 - 0.0519i	0.259 - 0.0351i	0.2359 - 0.0257i	0.2179 - 0.0199i	0.2034 - 0.016i	0.1914 - 0.0132i	0.1813 - 0.0111i
4.5	0.2813 - 0.2352i	0.3561 - 0.2525i	0.3454 - 0.0896i	0.2977 - 0.0522i	0.2642 - 0.0351i	0.2397 - 0.0256i	0.2208 - 0.0198i	0.2057 - 0.0158i	0.1933 - 0.0131i	0.1829 - 0.011i
4.75	0.2652 - 0.2454i	0.3233 - 0.2761i	0.3596 - 0.0983i	0.305 - 0.0559i	0.269 - 0.0372i	0.2431 - 0.0271i	0.2234 - 0.0208i	0.2078 - 0.0167i	0.195 - 0.0137i	0.1844 - 0.0116i
5	0.247 - 0.2492i	0.2893 - 0.2843i	0.3719 - 0.1131i	0.3113 - 0.0622i	0.2731 - 0.041i	0.2461 - 0.0297i	0.2257 - 0.0227i	0.2097 - 0.0182i	0.1966 - 0.0149i	0.1857 - 0.0126i

Tableau J.1. Fonctions $K_P(X_n)$ *en fonction de* $k_0 a_2$ *et* n *.*

Bibliographie

[1] M. R. Moldever, J. B. Mehl, M. Greespan. Gas-filled spherical resonators: Theory and experiment. J. Acoust. Soc. Am., 79:253-272, 1986.

[2] P. M. Morse and K. U. Ingard. Theoretical Acoustics. McGraw-Hill, New York, 1968.

[3] M. Bruneau. Manuel d'acoustique fondamentale. Hermès, Paris, 1998.

[4] J.-P. Dalmont. Acoustic impedance measurement, part I: A review. J. Sound Vib., 243(3):427-439, 2001.

[5] J.-P. Dalmont. Acoustic impedance measurement, Part II: A new calibration method. J. Sound Vib., 243(3):441-459, 2001.

[6] S. Ballantine. Technique of Microphone Calibration. J. Acoust. Soc. Am., 3:319-360, 1962.

[7] Norme Internationale CEI 61094-1. Microphone de mesure, Partie 1 : Méthode primaire pour l'étalonnage en pression des microphones étalons de laboratoire par la méthode de réciprocité, 1992.

[8] Norme Internationale CEI 61094-2. Microphone de mesure, Partie 2 : Méthode primaire pour l'étalonnage en pression des microphones étalons de laboratoire par la méthode de réciprocité, 1992.

[9] C. Guianvarc'h, J.-N. Durocher, M. Bruneau, A.-M. Bruneau. Acoustic transfer admittance of cylindrical cavities. J. Sound Vib., 292:595-603, 2006.

[10] C. Guianvarc'h, J.-N. Durocher, M. Bruneau, A.-M. Bruneau. Improved formulation of the acoustic transfer admittance of cylindrical cavities. Acta Acust. united Ac., 92:345-354, 2006.

[11] Norme Internationale CEI 60318-1. Electroacoustique - Simulateurs de tête et d'oreille humaines - Partie 1 : simulateur d'oreille pour l'étalonnage des écouteurs supra-auraux, 1998.

[12] M. Bruneau. Machines thermiques, capteur gyrométrique et métrologie acoustique en application des propriétés des couches limites thermo-visqueuses. 8ème Congrès Français d'Acoustique, invited Paper, Tours (France), 2006.

[13] K. O. Ballagh. Acoustical admittance of cylindrical cavities. J. Sound Vib., 3:567-569, 1987.

[14] C. Guianvarc'h. La cavité de couplage acoustique dans la méthode de réciprocité ; modèles analytiques pour l'étalonnage des microphones et la mesure d'impédances de petits composants. Thèse de doctorat, Université du Maine, 2005.

[15] K. Rasmussen. Radial wave-motion in cylindrical plane-wave couplers. Acta Acustica, EUROMET project 294:145-151, 1993.

[16] A.J. Zuckerwar. Theoretical response of condenser microphones. J. Acoust. Soc. Am., 64(5):1278-1285, 1978.

[17] R. S. Grinnip. Advanced Simulation of a condenser Microphone Capsule. AES 117th Convention, San Fransisco, 2004.

[18] T. Le Van Suu, S. Durand, M. Bruneau. Fluid Layer Trapped Between a Plane, Circular Membrane and an Axisymmetrically Curved, Smooth Backing Wall: Analytical Model of the Dynamic Behaviour. Acta Acust. united Ac., 94(3):474-482, 2008.

[19] Technical Documentation. Master Catalogue 1980. Brüel & Kjær, 1980.

[20] K. Rasmussen. The static pressure and temperature coefficients of laboratory standard microphones. Metrologia, 36:265-273, 1999.

[21] U. Ingard, H. Ising. Acoustic Nonlinearity of an Orifice. J. Acoust. Soc. Am., 42:6-17, 1967.

[22] P. J. Morris, S. Boluriaan, C. M. Shieh. Numerical Simulation of Minor Losses Due to a Sudden Contraction and Expansion in High Amplitude Acoustic Resonators. Acta Acust. united Ac., 90:393-409, 2004.

[23] Z. Škvor. Vibrating Systems and their Equivalent Circuits. Elsevier Science Publishers, 1991.

[24] R. Bossart, N. Joly, M. Bruneau. Hybrid numerical and analytical solutions for acoustic boundary problems in therlo-viscous fluids. J. Sound Vib., 263:69-84, 2003.

[25] N. Joly. Finite element modelling of thermoviscous acoustics in closed cavities. J. Acoust. Soc. Am., 123(5):3292, 2008.

[26] Norme Internationale CEI 61094-3. Microphones de mesure, Partie 3 : Méthode primaire pour l'étalonnage en champ libre des microphones étalons de laboratoire par la méthode de réciprocité, 1996.

[27] W. Schotty. Das Gesetz des Tiefempfangs in der Akistik und Elektroakustik. Zeits. f. Physik, 36(9 and 10):689-736, 1926.

[28] W. R. MacLean. Absolute measurement of sound without a primary standard. J. Acoust. Soc. Am., 12:140-146, 1940.

[29] L. L. Foldy, H. Primakoff. A general theory of passive linear electroacoustic transducers and the electroacoustic reciprocity theorem. J. Acoust. Soc. Am., 17:109-120, 1945.

[30] L. L. Foldy, H. Primakoff. A general theory of passive linear electroacoustic transducers and the electroacoustic reciprocity theorem, part 2. J. Acoust. Soc. Am., 19:50-58, 1946.

[31] S. Ballantine. Reciprocity in electromagnetic, mechanical, acoustical and interconnected systems. Proc. I.R.E, 17(6):929-951, 1929.

[32] I. Rudnick, M. N. Stein. Reciprocity Free Field Calibration of Microphones to 100 Kc in Air. J. Acoust. Soc. Am., 20(6):818-825, 1948.

[33] K. Rasmussen, E. Sandermann Olsen. Intercomparison on Free-Field Calibration of Microphones. Technical University of Denmark, Report PL-07, 1993.

[34] J.-M. Lambert, J.-N. Durocher. Analyse des perturbations acoustiques lors de l'étalonnage en champ libre des microphones étalons à condensateurs dits d'un pouce par la technique de réciprocité. Bureau National de Métrologie, Ministère de l'industrie, des P & T et du tourisme, Réf. contrat 880610, 1989.

[35] S. Barrera-Figueroa, K. Rasmussen, F. Jacobsen. A time-selective technique for free-field reciprocity calibration of condenser microphones. J. Acoust. Soc. Am., 114(3):1467-1476, 2003.

[36] K. Rasmussen, S. Barrera-Figueroa. Technical protocol for key comparison CCAUV.A-K4. El Centro Nacional de Metrologia, The Danish Primary Laboratory for Acoustics, CCAUV.A-K4, 2006.

[37] Whittaker, Watson. Modern Analysis. Cambridge University Press, 1940.

[38] S. Barrera-Figueroa, K. Rasmussen, F. Jacobsen, L. Muñiz. On the interference between the two microphones in free-field reciprocity calibration. J. Acoust. Soc. Am., 116(5):2771-2778, 2004.

[39] Norme internationale ISO 266. Acoustique : Fréquences normales, 1997.

[40] Draft technical specification CEI 61094-7 TS Ed.1. Measurement microphones - Part 7: Values for the difference between free field and pressure sensitivity levels of laboratory standard microphones, 2005.

[41] S. Barrera-Figueroa, K. Rasmussen, F. Jacobsen. On experimental determination of the free-field correction of laboratory standard microphones at normal incidence. Metrologia, 44:57-63, 2007.

[42] K. Rasmussen. Calculation methods for the physical properties of air used in the calibration of microphones. Technical University of Denmark, Report PL-11b, 1997.

[43] Technical Review. Properties and Calibration of Laboratory Standard Microphones, Uncertainties in Microphone Frequency Responses. Brüel & Kjær, 2001.

[44] S. Barrera-Figueroa. New methods for transducer calibration: Free-field reciprocity calibration of condenser microphones. PhD thesis, Acoustic Technology of the Technical University of Danemark, 2003.

[45] R. Boite, H. Leich. Les filtres numériques. Masson, 1990.

[46] Parks-McClellan FIR Filter Design.
http://www.dsptutor.freeuk.com/remez/RemezFIRFilterDesign.html. Accessed January 2008.

[47] Norme Européenne, Norme Française NF ENV 13005. Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure, 1999.

[48] Calibration and Measurements Capabilities Acoustics, Ultrasound, Vibration : Measurements microphones, Free-field sensitivity level (air). http://kcdb.bipm.org/AppendixC/country_list.asp?Iservice=AUV/A.1.2.1. Accessed January 2008.

[49] A. Degroot, R. MacDonald, O. Richoux, B. Gazengel, M. Campbell. Suitability of laser Doppler velocimetry for the calibration of pressure microphones. Applied Acoustics, In press:, 2008.

[50] A. Degroot. Contribution à l'estimation de la vitesse acoustique par Vélocimétrie Laser Dopler & application à l'étalonnage de microphones en champ libre. Thèse de doctorat, Université du Maine, 2007.

[51] F. M. Wiener. On the relation between the sound fields radiated and diffracted by plane obstacles. J. Acoust. Soc. Am., 23:697-700, 1951.

[52] F. Jacobsen, S. Barrera-Figueroa, K. Rasmussen. A note on the concept of acoustic center. J. Acoust. Soc. Am., 115(4):1468-1473, 2004.

[53] K. Rasmussen. Acoustic centre of condenser microphones. Technical University of Denmark, Report No. 5, 1973.

[54] R. P.Wagner, V. Nedzeinistsky. Determination of acoustic center correction values for type LS2aP microphones at normal incidence. J. Acoust. Soc. Am., 104(1):192-203, 1998.

[55] S. Barrera-Figueroa, K. Rasmussen, F. Jacobsen. The acoustic center of laboratory standard microphones. J. Acoust. Soc. Am., 120(5):2668-2675, 2006.

[56] Y. Ando. On the Sound Radiation from Semi-Infinite Circular Pipe of Certain Wall Thickness. Acustica, 22:219-224, 1970.

[57] E. Matsui. Free-Field Correction for Laboratory Standard Microphones Mounted on a Semiinfinite Rod. J. Acoust. Soc. Am., 49(5 Part 2):1475-1483, 1970.

[58] D. S. Jones. The scattering of a scalar wave by a semi-infinite rod of circular cross section. Phil. Trans. Roy. Soc., 247(A):499-528, 1955.

[59] H. Levine, J. Schwinger. On the Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe. Phys. Rev., 73(4):383-406, 1948.

[60] B. Noble. Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. Chelsea Pub Co, 1998.

[61] Y. Ando. Experimental Study of the Pressure Directivity and the Acoustic Centre of the "Circular Pipe Horn Loud Speaker". Acustica, 20:366-369, 1968.

[62] M. Vorländer, H. Bietz. Novel broad-band reciprocity technique for simultaneous free-field and diffuse-field microphone calibration. Acustica, 80:365-377, 1994.

[63] A. D. Pierce. Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications. ASA-AIP, 1994.

[64] S. Barrera-Figueroa, F. Jacobsen, K. Rasmussen. On determination of microphones response and other parameters by a hybrid experimental and numerical method. J. Acoust. Soc. Am., 123(5):3229, 2008.

[65] P. Juhl. A numerical investigation of standard condenser microphones. J. Sound Vib., 177(4):433-446, 1994.

[66] A. Bravo, R. Barham, M. Ruiz, J. M. Lopez, G. De Arcas, M. Recuero. A new 3D finite element model of the IEC 60318-1 artificial ear. Metrologia, 45:448-458, 2008.

[67] G. N. Watson. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge Mathematical Library, 1944.

[68] Technical Documentation. Reciprocity Calibration System Type 9699, Including Reciprocity Calibration Apparatus Type 5998. Brüel & Kjær, 1997.

[69] Technical Documentation. The Nexus Range of Conditioning Amplifiers Types 2690, 2691, 2692 and 2693. Brüel & Kjær, 1999.

[70] K. Rasmussen. Datafiles simulating a pressure reciprocity calibration of microphones. Technical University of Denmark (Department of acoustic technology), EUROMET project 294, 2001.

[71] R. Ramakrishan. A note on the calculation of Wiener-Hopf split functions. J. Sound Vib., 81(4):592-595, 1982.

METHODE DE RECIPROCITE : CARACTERISATION DE PETITS COMPOSANTS ACOUSTIQUES, ETALONNAGE DES MICROPHONES EN PRESSION ET EN CHAMP LIBRE

L'étalonnage absolu des microphones de mesure en acoustique repose sur l'obtention d'étalons primaires, eux-mêmes étalonnés suivant un protocole sophistiqué (méthode de réciprocité) et conformément aux normes en vigueur ; ces normes ont fait l'objet d'améliorations au cours des dernières décennies mais laissent toujours des zones d'ombre. Parallèlement, la caractérisation appropriée des oreilles artificielles, nécessaire au réglage des audiomètres et par suite à leur étalonnage, fait aujourd'hui défaut.

Ce propos met en cause la précision de l'étalonnage des étalons de mesure de pressions acoustiques et l'insuffisance des réglages d'appareils médicaux largement utilisés. Les enjeux pratiques, techniques et scientifiques ont donc leur importance et les études à mener comportent des exigences qui nécessitent des recherches approfondies. C'est ainsi que les thèmes abordés font appel ici à la méthode de la réciprocité en cavité et en champ libre.

Dans la première partie du travail, l'objectif recherché est d'adapter et d'améliorer la méthode de réciprocité en cavité. L'adaptation de cette méthode conduit à une technique de mesure d'impédances d'entrée de petits éléments acoustiques, tels que des tubes, fentes, cavités (utilisés dans l'oreille artificielle). L'amélioration des incertitudes de mesure des efficacités recherchée pour les hautes fréquences a conduit à proposer une modélisation améliorée d'un microphone ainsi que du dispositif d'étalonnage dans sa globalité de manière à étudier l'influence des modes radiaux dans la cavité sur les résultats de l'étalonnage.

La deuxième partie de ce travail trouve son origine dans une comparaison clé à l'échelle internationale portant sur les techniques d'étalonnage des microphones en champ libre. Cette comparaison clé a nécessité une refonte complète du dispositif expérimental du LNE, des techniques d'acquisitions et des méthodes de filtrage des perturbations liées aux faibles niveaux acoustiques mis en jeu. Ce travail a conduit à entreprendre des études plus approfondies sur les plans analytique et expérimental du concept de centre acoustique d'un microphone.

Certains résultats obtenus posent les bases des travaux futurs qui devraient permettre de poursuivre la modélisation pour réduire les incertitudes mais également pour prévoir la mise en œuvre des méthodes adaptées à la métrologie des capteurs du futur qui seront fabriqués par des procédés relevant des microtechnologies.

Mots clefs : acoustique, microphone, mesure d'impédance, étalonnage, réciprocité, cavité acoustique, champ libre

RECIPROCITY METHOD: CHARACTERIZATION OF SMALL ACOUSTIC COMPONENTS, PRESSURE AND FREE-FIELD RECIPROCITY CALIBRATION OF MICROPHONES

The absolute calibration of the microphones for acoustic measurements requires primary standard microphones. These standard microphones are themselves calibrated using sophisticated protocol (reciprocity calibration) according to the current standards. These standards have been improved all-over the past ten years but some questions remain unclear. In the same way, the appropriate characterization of the artificial ears, required for the calibration of the audiometers, has not been developed yet.

This outlines the lacks in the calibration of standard microphones (in terms of precision) and in the settings of the widely used medical devices. The practical, technical and scientific stakes are therefore of great importance and the studies to be carried out require deepened investigations. Therefore the purpose of this work deals with the reciprocity method for both the free-field calibration and the pressure calibration.

The aim of the first part of this work is to adapt and improve the pressure reciprocity method. The adaptation of this method leads to a technique for characterizing the input behavior of small acoustic components such as small tubes, slits, and cavities (used in the artificial ear). Improving the measurement uncertainties on the microphone efficiency in the highest frequency range led to suggest both an improved model for the microphone and a global modeling for the calibration device in order to study the influence of the radial modes in the cavity on the calibration results.

The second part of this work arises from a key comparison, at an international level, dealing with free-field microphone calibration techniques. This key comparison has required a complete revision of the experimental calibration device at LNE, of the acquisition processes, and of the signal filtering methods required by the extremely low acoustic levels. This work led to undertake more advanced works on both analytical and experimental studies on the concept of acoustic center for microphones.

Some of the results obtained here lay the basis for future works which should enable to improve the modeling for reducing the uncertainties and also for foreseeing the implementation of methods dedicated to the metrology of future MEMS sensors.

Keywords: acoustics, microphone, impedance measurement, calibration, reciprocity, acoustic cavity, free-field.