

**ECOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE**

LE MANS, FRANCE

**THÈSE DE DOCTORAT**

*Spécialité : ACOUSTIQUE*

présentée par

**Benoît TEYSSANDIER**

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

---

**ANALYSE DANS L'ESPACE DES PHASES DE CHAMPS ACOUSTIQUES.  
APPLICATION À DES GUIDES DE SECTION VARIABLE ET À DES ESPACES  
CLOS.**

---

Soutenue le 24 Septembre 2004 devant le jury composé de :

<b>C. BAUDET</b>	Professeur, LEGI, Grenoble	rapporteur
<b>J.P. SESSAREGO</b>	Directeur de Recherche, LMA, Marseille	rapporteur
<b>J. PICAUT</b>	Chargé de Recherche, LCPC, Nantes	examineur
<b>J.C. VALIÈRE</b>	Professeur, LEA, Poitiers	examineur
<b>C. DEPOLLIER</b>	Professeur, LAUM, Le Mans	co-directeur de thèse
<b>V. PAGNEUX</b>	Chargé de recherche, LAUM, Le Mans	co-directeur de thèse
<b>L. SIMON</b>	Maître de conférences, LAUM, Le Mans	co-directeur de thèse



Je tiens à remercier les différentes personnes qui ont gravité, de près ou de loin, autour de ce travail et qui ont contribué à son achèvement.

Tout d'abord merci à M. Bernard CASTAGNÈDE, responsable du DEA d'Acoustique Appliquée, de m'avoir donné la possibilité de suivre cette formation, ainsi que M. Sohbi SAHRAOUI, directeur du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, de m'avoir accueilli et donné les moyens matériels de réaliser ce travail.

Je tiens à remercier MM. Christophe BAUDET et Jean-Pierre SESSAREGO, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire de thèse, ainsi que MM. Judicaël PICAUT et Jean-Christophe VALIÈRE pour avoir accepté d'être membres du jury. J'ai apprécié l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux de thèse.

Mes remerciements s'adressent également à l'équipe formatrice et encadrante de ce travail, MM. Claude DEPOLLIER, Vincent PAGNEUX et Laurent SIMON, qui m'ont fait partager leurs connaissances et expériences dans le domaine de la recherche. Leur patience, leurs encouragements et leur sens précis de la physique ont été des facteurs prépondérants pour la réussite de ce manuscrit.

Je profite de ces quelques lignes pour remercier tous les membres du laboratoire, permanents et non permanents, pour la bonne humeur qu'ils instaurent au laboratoire.

Un grand merci aux nombreux doctorants et amis qui ont partagé avec moi (avec ou sans leur accord) l'expérience de la thèse et ses multiples rebondissements. Merci pour votre soutien, votre compréhension et vos sourires.

Je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance pour ma soeur Sandrine. Merci de m'avoir épaulé dès le premier jour.

Merci enfin à mes parents qui, en m'apportant leur soutien permanent, m'ont donné les moyens de réaliser un tel travail.

Benoît.



# Table des matières

Table des matières . . . . .	i
Notations . . . . .	v
<b>1 Généralités sur la représentation d'un champ d'ondes</b>	<b>1</b>
1.1 Quelques solutions dans le domaine spatial . . . . .	1
1.1.1 Solution en espace illimité . . . . .	2
1.1.2 Solution en espace limité . . . . .	3
1.2 Domaine de Fourier spatial . . . . .	5
1.2.1 Analyse spectrale en espace illimité . . . . .	6
1.2.2 Analyse spectrale en espace limité . . . . .	6
1.2.3 Limitations . . . . .	8
1.3 Nécessité d'une représentation conjointe en espace et nombre d'onde . . . . .	9
1.3.1 Distributions dans l'espace des phases : Etat de l'art . . . . .	9
1.3.2 Parallèle et divergence entre communautés scientifiques . . . . .	13
1.4 Représentation conjointe "temps-fréquence" . . . . .	14
1.4.1 Construction de la classe de Cohen . . . . .	14
1.4.2 Quelques propriétés . . . . .	14
1.4.3 Exemples de distributions de la classe de Cohen . . . . .	16
1.5 Représentation conjointe espace-nombre d'onde . . . . .	18
1.5.1 Spectre local . . . . .	18
1.5.2 Analyse de Birkhoff . . . . .	20
1.6 Présentation du document . . . . .	21
<b>2 Champ acoustique dans l'espace des phases.</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction . . . . .	28
2.2 Phase space distributions . . . . .	29
2.2.1 Husimi distribution (HD) . . . . .	29
2.2.2 Pseudo Wigner Ville distribution (PWVD) . . . . .	29
2.2.3 Modified Wigner Ville Distribution (MWVD) . . . . .	30
2.2.4 Smoothed Pseudo Wigner Ville Distribution (SPWVD) . . . . .	30
2.2.5 Birkhoff variables . . . . .	30

2.3	2D waveguide problem . . . . .	31
2.3.1	Gaussian beam excitation of a 2D waveguide . . . . .	31
2.3.2	Line source excitation of a 2D waveguide . . . . .	34
2.4	Sudden area expansion problem . . . . .	38
2.4.1	Phase space of four variables . . . . .	39
2.4.2	Birkhoff analysis . . . . .	41
2.5	Open billiard problem . . . . .	41
2.5.1	Numerical results . . . . .	42
2.6	Conclusion . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Méthode de réallocation pour l'étude de billards</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	Rappel sur la dynamique des billards . . . . .	51
3.2.1	Level Spacing Distribution (LSD) . . . . .	51
3.2.2	La carte de Birkhoff . . . . .	52
3.3	Etude de billards 2D . . . . .	53
3.3.1	Le billard carré . . . . .	53
3.3.2	Le billard annulaire . . . . .	55
3.3.3	Le stade de Bunimovich . . . . .	56
3.4	Densité de mesure semi-classique . . . . .	58
3.4.1	Méthode de réallocation . . . . .	59
3.4.2	Autres interprétations . . . . .	60
3.4.3	Exemples . . . . .	61
3.5	Application numérique . . . . .	63
3.5.1	Orbite périodique stable de couple (1, 1) dans un billard carré . . . . .	63
3.5.2	Orbites périodiques stables dans un billard annulaire . . . . .	65
3.5.3	Orbites périodiques instables dans un stade de Bunimovich . . . . .	69
3.6	Conclusion . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Représentation des relations de dispersion</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction . . . . .	81
4.2	Formulation multimodale du problème . . . . .	82
4.3	Représentation des relations de dispersion par analyse locale . . . . .	83
4.3.1	Géométrie des guides . . . . .	83
4.4	Applications . . . . .	84
4.4.1	Principe de la transition adiabatique . . . . .	84
4.4.2	Modes couplés . . . . .	87
4.4.3	Modes piégés . . . . .	90
4.4.4	Augmentation de la perturbation de géométrie $h(x)$ . . . . .	95
4.4.5	Régime harmonique "haute fréquence" . . . . .	96

---

4.5 Conclusion . . . . .	98
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>103</b>





# Notations

Grandeurs	Dimension	Description
*		Désigne une quantité complexe
$\delta_{ij}$		Symbole de Kronecker : 1 si $i = j$ , 0 sinon
$\partial_n$		Dérivée normale à la paroi
$\lambda$	m	Longueur d'onde
$\omega$	s <sup>-1</sup>	Pulsation
$\rho_0$	kg.m <sup>-3</sup>	Masse volumique de l'air au repos
$c_0$	m.s <sup>-1</sup>	Célérité du son dans l'air
$M$		Nombre de Mach
$\sigma$		Ecart-type d'une distribution
$\ell$	m	Périmètre d'un billard
$\mathcal{S}$	m <sup>2</sup>	Surface d'un billard
$\mathbf{r} = (x, y)$		Vecteur des coordonnées spatiales
$\mathbf{k} = (k_x, k_y)$		Vecteur des coordonnées dans l'espace des nombres d'onde
$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$		Fonction de Green
$\psi(\mathbf{r})$		Fonction d'onde
$\rho^W(\mathbf{r}, \mathbf{k})$		Distribution de Wigner Ville
$\rho^H(\mathbf{r}, \mathbf{k})$		Distribution de Husimi
$\rho^C(\mathbf{r}, \mathbf{k})$		Distribution de la classe de Cohen
$\rho^{PWV}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$		Pseudo Wigner Ville distribution
$\rho^{SPWV}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$		Smooth Pseudo Wigner Ville distribution
$\rho^{MPWV}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$		Modified Pseudo Wigner Ville distribution
$TFCT(\mathbf{r}, \mathbf{k})$		Transformée de Fourier à Court Terme
$GWFT(\mathbf{r}, \mathbf{k})$		Gaussian Window Fourier Transform
$s$		Variable de Birkhoff spatiale
$k_s$		Variable de Birkhoff spectrale
$\hat{s}(s, k_s)$		Opérateur de réallocation spatiale
$\hat{k}_s(s, k_s)$		Opérateur de réallocation spectrale

Grandeurs	Dimension	Description
$Z$		Matrice impédance
$Z_c$		Matrice impédance caractéristique
$\Delta k_{mn}$		Désaccord de phase

Sigles	Description
LAUM	Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine
LMA	Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique
LEGI	Laboratoire des Ecoulements, Géophysique et Industriels
LCPC	Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
LEA	Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques
HD	Husimi Distribution
DH	Distribution de Husimi
WVD	Wigner Ville Distribution
DWV	Distribution de Wigner Ville
PWVD	Pseudo Wigner Ville Distribution
MWVD	Modified Wigner Ville Distribution
SPWVD	Smooth Pseudo Wigner Ville Distribution
GWFT	Gaussian Window Fourier Transform
SSFT	Short Space Fourier Transform
FFT	Fast Fourier Transform
TFR	Transformée de Fourier Rapide
LSD	Level Spacing Distribution
WG	Whisperring Gallery
GE	Galerie à échos

# Chapitre 1

## Généralités sur la représentation d'un champ d'ondes

L'objet de ce chapitre introductif consiste à présenter le cadre de l'étude qui suit, à savoir, pour un champ ondulatoire, les notions d'espace et de nombre d'onde, et l'intérêt de leur utilisation conjointe. Dans un premier temps, on souligne pourquoi des représentations purement spatiales (§1.1) ou spectrales (§1.2) s'avèrent insuffisantes dès lors que le champ présente des variations locales que l'analyse classique (spatiale ou spectrale) ne permet pas de révéler. Par la suite (§1.3), la nécessité d'une représentation conjointe est présentée à travers un regard historique, à l'intersection de plusieurs domaines de la physique (mécanique quantique, théorie du signal et physique des ondes). L'emprunt de techniques issues du traitement du signal pour l'analyse locale du champ étant au coeur des applications développées dans les chapitres 2 à 4, quelques rappels sur les représentations de la classe de Cohen sont présentés dans le paragraphe 1.4. Enfin, l'analogie "temps-fréquence"/"espace-nombre d'onde" est abordée au travers de l'exemple d'un guide 2D avec discontinuité. La problématique de la représentation des comportements locaux du champ est illustrée au travers des notions de spectre local et de l'analyse de Birkhoff.

### 1.1 Quelques solutions dans le domaine spatial

Dans ce paragraphe, quelques champs élémentaires, en domaine illimité ou limité, sont présentés selon leur évolution spatiale. Les équations sur lesquelles sont fondés les problèmes sont, en régime harmonique, les conditions aux limites et l'équation de Helmholtz dans un domaine  $\mathcal{D}$  limité par une surface  $\mathcal{S}$  éventuellement rejetée à l'infini. L'équation de Helmholtz homogène (sans terme source) appliquée à un potentiel scalaire  $\psi$  prend la forme

$$(\Delta + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{D}, \quad (1.1)$$

où  $k = \frac{\omega}{c_0}$  avec  $c_0$  la célérité du milieu de propagation. A titre d'exemples, ce problème s'applique en acoustique à la propagation des ondes sonores ou ultrasonores dans un fluide [1], en optique à

la propagation du champ électromagnétique [2], ou en mécanique quantique à la fonction d'onde de particules [3]. Dans le dernier cas, l'Eq. (1.1) se nomme l'équation de Schrödinger indépendante du temps. La présence de conditions aux frontières impose deux modèles de solutions. Ces derniers sont présentés dans les paragraphes qui suivent.

### 1.1.1 Solution en espace illimité

Une solution de l'équation de Helmholtz (Eq. 1.1) en espace illimité est l'onde plane harmonique et prend la forme

$$\psi(\mathbf{r}) = Ae^{-j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}. \quad (1.2)$$

L'onde représentée par cette fonction est une onde dont les surfaces équiphasées sont des plans perpendiculaires à l'axe  $\mathbf{k}_0$ , et qui se propage dans le sens des " $\mathbf{r}$ " croissants. Un exemple est présenté en Fig. 1.1 où les variations sinusoïdales du signal sont représentées en niveaux de gris. La direction de propagation de l'onde plane est donnée à l'aide d'un angle  $\theta$ . Les projections en abscisse et ordonnée de cette dernière se traduisent selon  $\theta$  par,

$$\begin{cases} \lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \theta}, \\ \lambda_y = \frac{\lambda}{\sin \theta}, \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde du régime harmonique considéré.

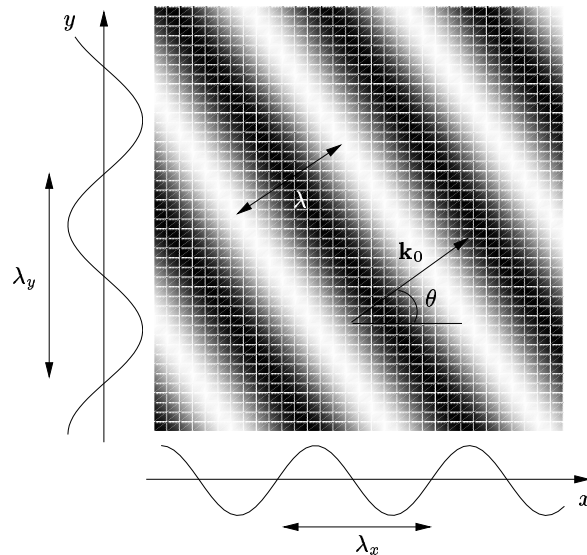


FIG. 1.1 – Partie réelle de la fonction d'onde donnée en Eq. (1.2) de longueur d'onde  $\lambda$  avec ses projections en  $x$  et en  $y$ .

### 1.1.2 Solution en espace limité

#### 1.1.2.1 Problèmes aux valeurs propres

Prenons l'exemple d'un guide droit. Considérons un milieu homogène délimité par deux conditions aux frontières de Neumann en  $y = 0$  et  $y = h$ . La propagation s'effectue suivant l'axe des abscisses avec des conditions de rayonnement en  $|x| \rightarrow \infty$ . Le problème posé est le suivant

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 0, & \forall \mathbf{r} \in \mathcal{D}, \\ \partial_n \psi(\mathbf{r}) = 0, & \forall x \text{ en } y = 0 \text{ et } y = h, \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale aux frontières.

Les solutions du problème prennent la forme particulière

$$\psi_m(y)e^{-jk_{xm}x}, \quad (1.5)$$

avec

$$\psi_m(y) = \cos(k_my), \quad (1.6)$$

et

$$\begin{cases} k_m = \frac{m\pi}{h}, \\ k_0^2 = k_m^2 + k_{xm}^2, \end{cases} \quad (1.7)$$

où le nombre quantique  $m$  est un entier ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). La solution générale pour une onde aller est obtenue en superposant toutes les solutions particulières de la manière suivante :

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{+\infty} A_m \cos(k_my)e^{-jk_{xm}x}. \quad (1.8)$$

Par ailleurs chaque terme de cette série, sous la condition d'être propagatif, peut prendre la forme

$$\psi_m(\mathbf{r}) = \frac{A_m}{2} \left\{ e^{j(k_my - k_{xm}x)} + e^{-j(k_my + k_{xm}x)} \right\}. \quad (1.9)$$

Il est à noter que le facteur  $e^{-jk_{xm}x}$  ne traduit pas obligatoirement la propagation de l'onde. En effet, dans la solution (1.8) seuls certains modes participent à la propagation, ceux dont les nombres quantiques sont les plus faibles. Les composantes  $k_m^2 \geq k^2$ , qui correspondent à des longueurs d'ondes plus petites que  $\lambda = \frac{c_0}{f}$ , où  $c_0$  est la célérité du milieu de propagation et  $f$  la fréquence de travail, ne peuvent pas se propager vers le champ lointain. Elles donnent naissance à des ondes évanescentes qui décroissent exponentiellement dans la direction  $x$  et qui constituent le champ proche des sources. Elles prennent la forme

$$\psi_m(\mathbf{r}) = \frac{A_m}{2} \left\{ e^{jk_my} + e^{-jk_my} \right\} e^{-k_{xm}x}. \quad (1.10)$$

L'Eq. (1.9) met en évidence le comportement de l'onde portée par le mode considéré (dans l'hypothèse où il est propagatif), sous forme de deux ondes planes propagatives obliques dont les directions de propagation sont données par la relation

$$\cos \theta_m = \pm \frac{m\pi}{k_0 h}. \quad (1.11)$$

Un exemple de représentation d'un tel mode propagatif ou évanescent est illustré en Fig. 1.2. La longueur d'onde  $\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = \frac{2h}{m}$  représente la composante transversale du régime harmonique imposé par  $\lambda$ . La hauteur du guide pour la simulation est de  $h = 3.492\lambda$ , imposant sept modes propagatifs. La Fig. 1.2(a) présente le quatrième mode propagatif d'indice modal  $m = 3$  et la Fig. 1.2(b) présente le premier mode évanescent d'indice modale  $m = 7$ .

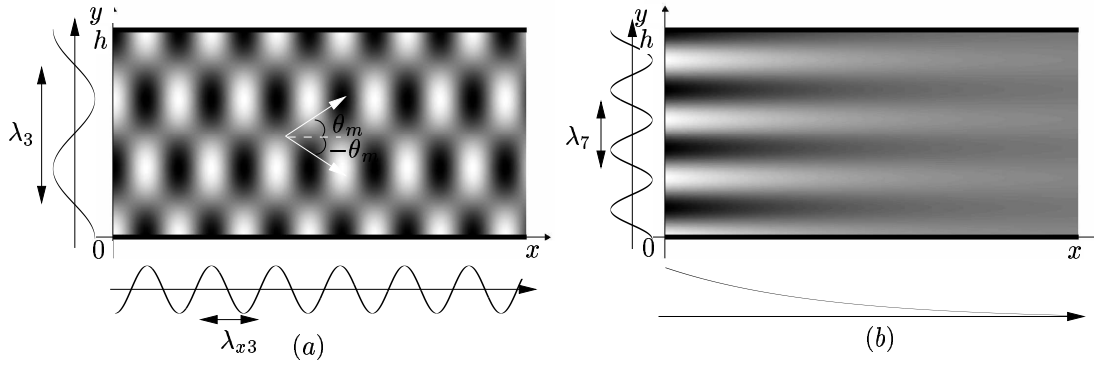


FIG. 1.2 – Propagation modale dans un guide droit de hauteur unitaire  $h$  où sept modes propagatifs sont à considérer. (a) : Partie réelle du mode propagatif d'indice  $m = 3$ . (b) : Partie réelle du mode évanescent d'indice  $m = 7$ .

### 1.1.2.2 Problème de Green

Le problème de Green appliqué au guide d'onde planaire présenté dans la section précédente devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\Delta + k^2)G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), & \forall \mathbf{r} \in \mathcal{D}, \\ \partial_n G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = 0, & \forall x \text{ en } y = 0 \text{ et } y = h, \\ \text{Condition onde sortante en } x \rightarrow \pm\infty, & \end{array} \right. \quad (1.12)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale aux frontières,  $\mathbf{r}$  le point observateur et  $\mathbf{r}_0$  l'emplacement d'une source ponctuelle. Cette dernière se localise pour la suite du chapitre sur l'axe des ordonnées ( $\mathbf{r}_0 = (0, y_0)$ ). La fonction de Green  $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ , solution du problème (1.12), en présence de parois rigides et en fluide homogène, peut être écrite sous la forme [1]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \sum_{m=0}^M G_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \sum_{m=M+1}^{+\infty} G_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad (1.13)$$

où, pour  $m \leq M$ , un mode propagatif est donné par

$$G_m(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = j \left( \frac{2 - \delta_{m0}}{2h} \right) \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{h}y_0\right)}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}} \cos\left(\frac{m\pi}{h}y\right) e^{-j\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}|x|}, \quad (1.14)$$

et, pour  $m > M$ , un mode évanescent par

$$G_m(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \left( \frac{2 - \delta_{m0}}{2h} \right) \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{h}y_0\right)}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 - k^2}} \cos\left(\frac{m\pi}{h}y\right) e^{-\sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 - k^2}|x|}, \quad (1.15)$$

où  $k$  est le nombre d'onde associé à la pulsation d'excitation du guide  $\omega_0$ ,  $h$  la hauteur du guide et  $\delta_{m0}$  le symbole de Kronecker. L'expression (1.13) nous informe que le champ de pression acoustique dans le guide résulte d'un champ stationnaire dans la direction (0y) et d'un champ progressif dans la direction (0x). L'amplitude d'un tel champ est représenté en Fig. 1.3. Cent modes sont pris en compte dans le calcul, dont sept sont propagatifs.

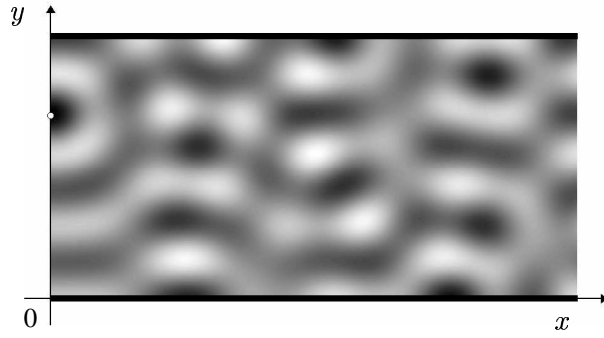


FIG. 1.3 – Partie réelle du champ acoustique pour le problème de Green considéré. Une source ponctuelle harmonique (o), placée au sein du guide planaire, émet une onde acoustique à une fréquence telle que sept modes sont propagatifs.

En régime haute fréquence, la densité modale est très importante et se traduit par une multitude d'interférences entre les modes propagatifs. Le cumul des rayons associés aux modes propagatifs du guide planaire tresse un tapis quantique ou boîte modale [4, 5].

## 1.2 Domaine de Fourier spatial

Une description spectrale est souvent à la base d'une meilleure lisibilité des phénomènes mis en jeu, en fournissant un complément indispensable à la seule description spatiale de la fonction d'onde comme vu précédemment. Cette évolution spectrale est obtenue à l'aide de la transformée de Fourier. Les transformées de Fourier spatiale et spatiale inverse prennent la forme

$$\psi(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\mathbf{r}) e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (1.16)$$

et

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\mathbf{k}) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (1.17)$$

L'équation de Helmholtz (1.1) donnant l'évolution du potentiel  $\psi(\mathbf{r})$  devient dans le domaine de Fourier

$$(k_0^2 - k_x^2 - k_y^2)\psi(\mathbf{k}) = 0, \quad \forall \mathbf{k}. \quad (1.18)$$

De cette équation découlent des solutions, conformes aux conditions limites du problème.

### 1.2.1 Analyse spectrale en espace illimité

La transformée de Fourier spatiale bidimensionnelle appliquée à la fonction d'onde définie en Eq.(1.2) devient, en omettant le facteur  $e^{j\omega_0 t}$ ,

$$\psi(\mathbf{k}) = A(2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0), \quad (1.19)$$

où  $\mathbf{k}_0 = k_{x0}\mathbf{i} + k_{y0}\mathbf{j}$ . La direction de propagation donnée par l'angle  $\theta$  présent en Fig. 1.1 impose les relations suivantes :

$$\begin{cases} k_{x0} = k_0 \cos \theta, \\ k_{y0} = k_0 \sin \theta, \end{cases} \quad (1.20)$$

avec la relation de dispersion  $k_0^2 = k_{x0}^2 + k_{y0}^2$ . La Fig. 1.4 propose une représentation de cette transformée de Fourier dans le domaine des nombres d'onde  $(k_x, k_y)$ . La composante spectrale représentant l'onde plane définie en Eq. (1.2) se trouve sur le cercle de rayonnement  $k_0^2 = k_{x0}^2 + k_{y0}^2$  [6].

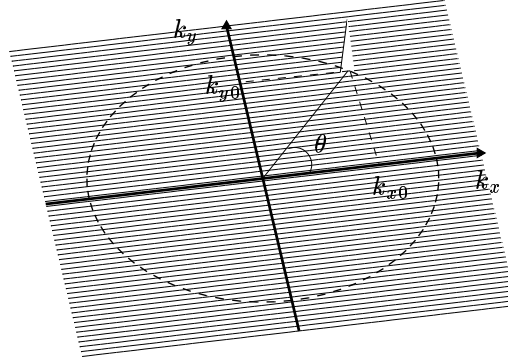


FIG. 1.4 – Composante spectrale d'une onde plane ayant pour direction de propagation l'angle  $\theta$ . Le symbole triangulaire blanc désigne un dirac.

### 1.2.2 Analyse spectrale en espace limité

#### 1.2.2.1 Représentation spectrale d'un mode propagatif ou évanescent

Les transformées de Fourier spatiales bidimensionnelles sont pour un mode propagatif (Eq. (1.9)) et un mode évanescent (Eq. (1.10)), respectivement,

$$\psi(\mathbf{k}) = \frac{A_m}{2} (2\pi)^2 \{ \delta(\mathbf{k} - \mathbf{K}_m^-) + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{K}_m^+) \}, \quad (1.21)$$



où les vecteurs d'onde  $\mathbf{K}_m^- = k_{xm}\mathbf{i} - k_m\mathbf{j}$  et  $\mathbf{K}_m^+ = k_{xm}\mathbf{i} + k_m\mathbf{j}$  sont les composantes spectrales des deux ondes planes obliques constituant un mode propagatif comme montré en Eq. (1.11), et

$$\psi(\mathbf{k}) = \frac{A_m}{2} (2\pi)^2 \{\delta(k_y + k_m) + \delta(k_y - k_m)\} \frac{1/k_{xm}}{1 + (k_x/k_{xm})^2}. \quad (1.22)$$

Les composantes d'un mode évanescent se situent en dehors du cercle de rayonnement, sur l'axe  $k_y$  espacées tous les  $\frac{m\pi}{h}$  avec une décroissance en  $\frac{1/k_{xm}}{1+(k_x/k_{xm})^2}$  selon l'axe des  $k_x$ . Une représentation dans le domaine des nombres d'onde  $(k_x, k_y)$  est donnée en Fig. 1.5. Sept modes propagatifs sont considérés et seul le mode d'indice modal  $m = 3$  est présenté. Le premier mode évanescent donné en Fig. 1.5 (b) a pour indice  $m = 7$ .

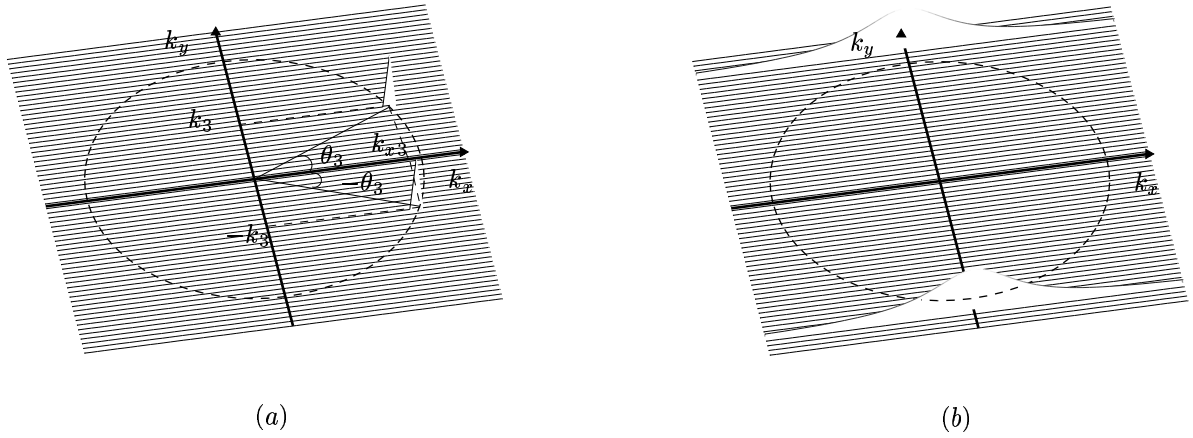


FIG. 1.5 – Représentation spectrale de modes propagatif et évanescent. Sept modes propagatifs sont considérés. (a) : mode propagatif d'indice  $m = 3$ . (b) : mode évanescent d'indice  $m = 7$ .

### 1.2.2.2 Représentation spectrale de la solution du problème de Green

La fonction de Green, solution du problème (1.12), a pour transformée de Fourier spatiale dans le domaine  $x > 0$ ,

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0) = \sum_{m=0}^M G_m(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0) + \sum_{m=M+1}^{+\infty} G_m(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0), \quad (1.23)$$

où, pour  $m \leq M$ , la transformée de Fourier d'un mode propagatif est donnée par

$$G_m(\mathbf{k}; \mathbf{r}_0) = j \frac{Q_{1m}}{2} (2\pi)^2 \{\delta(\mathbf{k} - \mathbf{K}_m^-) + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{K}_m^+)\}, \quad (1.24)$$

et, pour  $m > M$ , la transformée de Fourier d'un mode évanescent par

$$G_m(\mathbf{k}; \mathbf{r}_0) = \frac{Q_{2m}}{2} (2\pi)^2 \{\delta(k_y + k_m) + \delta(k_y - k_m)\} \frac{1/k_{xm}}{1 + (k_x/k_{xm})^2}, \quad (1.25)$$

avec

$$Q_{1m} = \left( \frac{2 - \delta_{m0}}{2h} \right) \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{h} y_0\right)}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}}, \quad (1.26)$$

et

$$Q_{2m} = \left( \frac{2 - \delta_{m0}}{2h} \right) \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{h} y_0\right)}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 - k^2}}. \quad (1.27)$$

La première somme discrète de l'Eq. (1.23) est bornée par  $M$  signifiant la présence de  $M + 1$  modes propagatifs. Sept modes propagatifs sont considérés et seuls les cinq premiers modes évanescents sont présents en Fig. 1.6. Les composantes se propageant dans la direction des  $x > 0$  se situent sur la face droite du cercle de rayonnement.

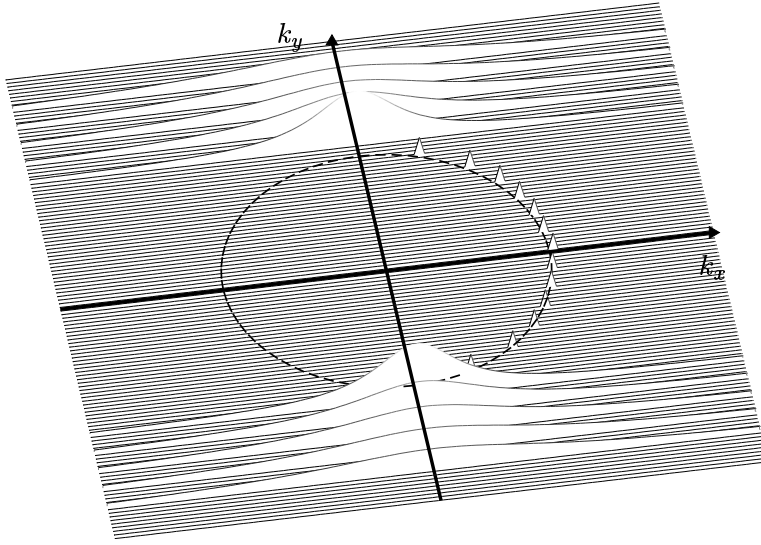


FIG. 1.6 – Module de la transformée de Fourier de la fonction de Green donnée par l'Eq. (1.23). Sept modes propagatifs et les cinq premiers modes évanescents sont pris en compte pour cette représentation.

### 1.2.3 Limitations

La transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse ont leur propre interprétation. Le calcul d'une valeur spectrale  $\psi(\mathbf{k})$  nécessite la connaissance de toute la dépendance spatiale du signal. De même, concernant la transformée de Fourier inverse, toute valeur du signal à un point donné de l'espace  $\mathbf{r}$  peut être vue comme une superposition infinie d'ondes planes, totalement délocalisées dans l'espace. En d'autres termes, une décomposition en fronts d'onde élémentaire, de forme  $e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  et d'amplitude  $\psi(\mathbf{k})$ , est effectuée sur le domaine des nombres d'onde  $(k_x, k_y)$ . Si ce point de vue mathématique peut dans certains cas révéler des propriétés effectives d'un signal, il peut également, dans d'autres cas, travestir la réalité physique. En effet, la description de la distribution d'énergie (ou de puissance) dans l'espace des nombres d'onde par la densité spectrale  $|\psi(\mathbf{k})|^2$  est adaptée aux situations stationnaires dans l'espace, telle une onde plane formant une base de solution pour les problèmes en domaines limité et illimité. Cette description occulte les variations locales des propriétés du signal étudié en fonction des variables spatiales, et n'illustre que ses propriétés permanentes dans l'espace des nombres d'onde.

## 1.3 Nécessité d'une représentation conjointe en espace et nombre d'onde

### 1.3.1 Distributions dans l'espace des phases : Etat de l'art

Comme vu précédemment, le cadre trop rigide d'une analyse de Fourier ne peut couvrir qu'une partie du signal à analyser et incite à rechercher des descriptions conjointes dans les deux domaines. Ce travail fut initialement engagé en mécanique quantique dans les années 1930 pour une description conjointe en "position-impulsion", puis repris en théorie du signal une dizaine d'années plus tard en "temps-fréquence". De nombreuses applications et développements de tels outils ont fait l'objet de travaux dans ces deux domaines de la physique. Les mêmes objets mathématiques apparaissent ainsi dans les deux domaines, même si interprétations et raisons d'être sont radicalement différentes. Par ailleurs, dans les années 1980, on a vu apparaître ces outils en physique classique des ondes, particulièrement en optique, afin de décrire une fonction d'onde conjointement en espace-nombre d'onde. Il est donc utile de dresser un état des lieux, en insistant sur les travaux fondateurs, tout en les replaçant dans leur contexte.

#### 1.3.1.1 Mécanique quantique

La mécanique quantique peut être vue comme la théorie fondamentale des phénomènes atomiques. Dans le monde microscopique, les événements sont décrits par une théorie probabiliste. Ainsi, le carré du module de la fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger  $|\psi(\mathbf{q})|^2$  représente la probabilité de trouver une particule à la position  $\mathbf{q}$  au temps  $t$ , alors que la probabilité de trouver une impulsion se traduit par le module au carré de la transformée de Fourier de cette même fonction d'onde  $|\psi(\mathbf{p})|^2$ . E. Wigner en 1932 [7], éclairé par les travaux de Boltzmann sur les distributions de probabilité dans l'espace des phases, propose une description conjointe en position-impulsion à l'aide d'une distribution qui porte aujourd'hui son nom

$$\rho_{\psi}^W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\mathbf{q} + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}) \psi^*(\mathbf{q} - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}) e^{-j\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha}} d\boldsymbol{\alpha}, \quad (1.28)$$

avec la constante de Planck  $\hbar = 1$ , et  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$  représentant respectivement les observables et les impulsions. Cette distribution est réelle, mais peut prendre une valeur négative dans certaines régions de l'espace des phases. Cette propriété interdit, dans ce contexte, d'interpréter la distribution de Wigner comme une description probabiliste. Le terme de pseudo-distribution est ainsi utilisé. Néanmoins elle respecte les lois marginales, à savoir les probabilité de présence de particule en position  $|\psi(\mathbf{q})|^2$  et impulsion  $|\psi(\mathbf{p})|^2$ . Un an plus tard en 1933, une nouvelle distribution est proposée par Kirkwood [8]. Cette dernière plus maniable par rapport à la distribution de Wigner, qui, avant l'avènement généralisé des calculateurs était difficile à mettre en oeuvre, prend la forme

$$\rho_{\psi}^K = \psi(\mathbf{q}) \psi^*(\mathbf{p}) e^{-j\mathbf{p}\mathbf{q}}. \quad (1.29)$$

C'est une "densité" d'énergie complexe au point  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Elle est définie comme l'énergie d'interaction entre la restriction de  $\psi$  à un intervalle infinitésimal centré en  $\mathbf{q}$  et le filtrage de  $\psi$  dans une bande

infinitésimale centrée en  $\mathbf{p}$ . Par ailleurs, afin de disposer d'une distribution réelle et positive au sens des probabilités, une nouvelle distribution est proposée en 1940 [9], appelée distribution de Husimi. Elle prend la forme

$$\rho_{\psi}^H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\mathbf{q}-\mathbf{q}')^2}{2\sigma^2}} \psi(\mathbf{q}') e^{-j\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}'} d\mathbf{q}' \right|^2, \tag{1.30}$$

où  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\mathbf{q}-\mathbf{q}')^2}{2\sigma^2}}$  est une fonction d'apodisation gaussienne d'écart-type  $\sigma$ . Dans les années qui suivent, d'autres distributions apparaissent, telles la P-distribution [10, 11] ou la Q-distribution [12], cette dernière n'étant autre que la distribution de Husimi dont la fonction d'apodisation a pour écart-type  $\sigma = \omega$ , la pulsation de la fonction d'onde  $\psi$ . Il a été prouvé [13] que la distribution de Husimi résulte d'un lissage en position et impulsion de la distribution de Wigner par un paquet d'onde gaussien dont le produit d'incertitude de Heisenberg vérifie  $\Delta\mathbf{q}\Delta\mathbf{p} \geq \frac{1}{2}$  pour  $\hbar = 1$ . En 1966, Cohen propose une forme générale englobant toutes les définitions mentionnées (Husimi, Wigner, Kirkwood, ...) et laissant le champ libre à d'autres propositions [14], moyennant la spécification d'une fonction de paramétrisation  $\phi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha})$ ,

$$\rho_{\psi}^C(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \phi) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{j\boldsymbol{\xi}(\tau-\mathbf{q})} \phi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}) \psi\left(\tau + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\right) \psi^*\left(\tau - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\right) e^{-j\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}} d\boldsymbol{\xi} d\tau d\boldsymbol{\alpha}. \tag{1.31}$$

C'est ce qu'on appelle "la classe de Cohen". A titre d'exemple, elle donne naissance aux distributions de Wigner et Kirkwood en prenant les fonctions de paramétrisations respectives  $\phi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}) = 1$  et  $\phi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}) = e^{j\frac{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\alpha}}{2}}$ . De nombreuses propriétés et applications des distributions appartenant à la classe de Cohen peuvent être trouvées dans [15]. Certaines sont commentées en §1.4 dans un contexte "temps-fréquence".

### 1.3.1.2 Théorie du signal

Afin de décrire conjointement en temps et en fréquence le comportement des signaux non-stationnaires, de nombreux travaux ont vu le jour à la fin des années 1940. Le premier travail original permettant de décrire conjointement en temps et fréquence un signal est proposé en 1946 par Gabor [16]. Un signal  $s(t)$  est considéré comme une superposition linéaire de signaux élémentaires que Gabor appelle "logons". Le plan temps-fréquence est discrétisé par un maillage dont les coordonnées sont  $t_i = nT$  et  $w_i = m\Omega$  avec  $n, m \in ]-\infty, +\infty[$  où  $T$  et  $\Omega$  sont les intervalles temporel et fréquentiel du maillage. L'expansion dite de Gabor prend la forme

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{n,m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-mT)^2}{2\sigma^2}} e^{jn\Omega t}, \tag{1.32}$$

où le terme  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-mT)^2}{2\sigma^2}} e^{jn\Omega t}$  est nommé logon par Gabor ou atome temps-fréquence. La représentation conjointe du signal  $s(t)$  est constituée de la collection des coefficients  $c_{n,m}$  au couple de points  $(n, m)$  du plan. Cette base "temps-fréquence" fournit également comme sous-produit une distribution de l'énergie de ce même signal dans le plan en élevant au carré tous les coefficients de la série  $c_{n,m}$ .

L'énergie du signal est obtenue en sommant la contribution de ces derniers selon

$$E_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_{n,m}|^2. \quad (1.33)$$

Cette même année, Koenig propose d'analyser un signal vocal à l'aide du spectrogramme [18], module au carré d'une transformée de Fourier à court terme (TFCT). Le spectrogramme prend la forme

$$\rho_s^S(t, \omega) = \left| \int_{\mathbb{R}} h(t-t') s(t') e^{j\omega t'} dt' \right|^2, \quad (1.34)$$

où  $h(t)$  est une fonction quelconque d'apodisation réalisant ainsi une analyse à court terme. La distribution de Husimi n'est donc autre que le spectrogramme pour une fenêtre d'analyse gaussienne. En 1948, Ville [17] ouvre la voie à une autre façon d'aborder le problème "temps-fréquence". Il utilise la distribution énergétique de Wigner donnée en équation (1.28), différente de la représentation de Gabor de par sa structure quadratique. D'autre part, il introduit la notion de signal analytique de la forme  $A(t)e^{j\varphi(t)}$ , où  $A(t)$  est l'enveloppe du signal  $s(t)$  et  $\varphi(t)$  sa phase instantanée<sup>1</sup>. La distribution dite de Wigner-Ville se concentre idéalement sur la loi de pulsation instantanée

$$\omega_i(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad (1.35)$$

pour une modulation de phase linéaire (un chirp linéaire) d'un signal à bande étroite. L'utilisation de cette distribution n'a été prolifique que bien des années plus tard. Pendant ce temps, Page en 1952 propose une autre distribution énergétique temps-fréquence [19]. Il introduit la notion de densité spectrale causale, calculée à tout instant sur le seul passé du signal. Cette distribution prend la forme

$$\rho_s^{P^-}(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_{-\infty}^t s(t') e^{j\omega t'} dt' \right|^2, \quad (1.36)$$

où la causalité du signal  $s(t)$  se traduit par

$$\tilde{s}(t') = \begin{cases} s(t'), & t' \leq t, \\ 0, & t' > t. \end{cases} \quad (1.37)$$

Cette même distribution peut prendre une autre forme plus explicite

$$\rho_s^{P^-}(t, \omega) = 2 \Re (s^*(t) s_t^-(\omega) e^{j\omega t}), \quad (1.38)$$

où  $s_t^-(\omega)$  est le spectre causal de  $s(t)$ . En 1955 [20] puis en 1967 [21], une version anticausale de la distribution de Page voit le jour sous la dénomination  $\rho_s^{P^+}(t, \omega)$ . Les auteurs [20] et [21] montrent que la demi-somme de ces deux distributions, causale et anticausale, s'identifient à la quantité

$$\rho_s^P(t, \omega) = \frac{1}{2} [\rho_s^{P^+}(t, \omega) + \rho_s^{P^-}(t, \omega)], \quad (1.39)$$

$$= \Re (s^*(t) s(\omega) e^{j\omega t}), \quad (1.40)$$

---

<sup>1</sup>Pour un signal analytique,  $A(t)$  code les variations basses fréquences du signal alors que  $e^{j\varphi(t)}$  code le comportement hautes fréquences du signal.

que l'on retrouve dans les travaux de Margenau-Hill en 1961 [22], et qui n'est autre que la partie réelle de la distribution de Kirkwood donnée en Eq. (1.29). Rihaczek en 1968, reprend cette dernière sans changement fondamental [23], et sans référence à [8]. A noter que toutes ces distributions appartiennent à la famille des "pseudo-distributions", en ce sens qu'elles peuvent prendre des valeurs négatives dans certains lieux du plan temps-fréquence. Par la suite, il est important de préciser que la "classe de Cohen", à l'origine destinée aux représentations conjointes "position-impulsion" de la mécanique quantique, puis reprise dans un contexte "temps-fréquence" [24], fournit un cadre théorique de référence dans lequel s'inscrivent la plupart des travaux des années 80. Enfin, les années 1990 ont vu de nombreuses distributions aux multiples propriétés [25, 26], dont certaines se révéleront d'une grande utilité dans la suite de ce document. Le paragraphe 1.4 présente à ce propos plus en détail l'origine et quelques propriétés de la classe de Cohen, ainsi que deux représentations appartenant à cette classe, le spectrogramme et la distribution de Wigner-Ville. Les ouvrages de référence dans le domaine de l'analyse conjointe en temps et en fréquence de signaux non-stationnaires sont ceux de L. Cohen [26] et de P. Flandrin [40].

### 1.3.1.3 Physique des ondes classiques

Contrairement à un signal temporel pour une analyse temps-fréquence, une analyse espace-nombre d'onde s'effectue sur une fonction issue d'un opérateur d'alembertien, tout comme en mécanique quantique, où la fonction d'onde est solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps. Dans ces conditions, les premiers travaux ont été développés dans les années 1970 en optique de Fourier. Bastiaans en 1978 [27] propose d'appliquer la distribution de Wigner sur des signaux optiques afin de mettre en évidence un comportement de la distribution de Wigner semblable au concept de rayons selon l'approche géométrique. Ce même auteur propose en 1981 d'utiliser d'autres distributions en espace-nombre d'onde [28]. Outre la distribution de Wigner, l'utilisation de l'expansion de Gabor [16], de la transformée de Fourier à court terme<sup>2</sup>, et celui du spectre physique de Mark<sup>3</sup> [29], sont abordés afin de définir la notion de spectre local. Il est important de souligner que parmi ces trois distributions, seul le spectre physique de Mark est quadratique. Les deux premières sont quant à elles linéaires. En 1991, Steinberg [30] applique la transformée de Fourier à court terme et la représentation discrète de l'expansion de Gabor à l'expérience du trou de diffraction. Un an plus tard, il transpose ces résultats à un problème de propagation acoustique d'une source ponctuelle dans un guide océanique [31]. D'autres travaux reprennent la description discrète de l'expansion de Gabor afin de représenter un champ d'onde dans l'espace des phases [33]. En complément, un catalogue non exhaustif de distributions "espace-nombre d'onde" est réalisé [32], où l'on retrouve les distributions précédemment citées, complétées par une analyse multi-résolution en ondelettes, ainsi que par des méthodes paramétriques. Ce n'est cependant qu'à la fin des années 1990, et au début des années 2000, que l'intérêt de l'analyse d'un champ d'onde classique (particulièrement en optique) dans l'espace des phases est admis [34, 35, 36]. Les distributions de Husimi et Wigner sont abordées sous la dénomination de distributions "angle-impact",

<sup>2</sup>Analyse à fenêtre glissante.

<sup>3</sup>Module au carré de la transformée de Fourier à court terme précédente.

en référence au comportement semblable à l'approche géométrique de ces dernières. Des propriétés fructueuses de la distribution de Wigner sont présentées. Par exemple, l'intensité du signal est liée à la loi marginale

$$I_\psi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\psi^W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (1.41)$$

$$= |\psi(\mathbf{r})|^2, \quad (1.42)$$

et le flux local [37] de la fonction d'onde est le moment d'ordre un de la distribution de Wigner

$$\mathbf{J}_\psi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{k} \rho_\psi^W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (1.43)$$

$$= \Im [\psi(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \psi^*(\mathbf{r})]. \quad (1.44)$$

De nombreux travaux ont ainsi vu le jour, même en régime impulsionnel [38], concernant différentes applications dans plusieurs domaines de la physique des ondes classiques. L'objet du travail présenté dans ce document est d'apporter une contribution au phénomène d'ondes guidées.

### 1.3.2 Parallèle et divergence entre communautés scientifiques

Il est bien évident qu'à la lecture chronologique des travaux sur les distributions dans l'espace des phases, la physique quantique est l'élément fondateur de ce principe d'analyse. Cependant un grand nombre de propriétés utiles ont été développées (en traitement du signal) et restent à être transposées dans la littérature de la physique théorique. Or peu de liens ont été établis entre les deux domaines. Comme vu précédemment, la distribution de Ville présentée en 1948, n'est autre que la distribution de Wigner publiée seize années auparavant. Aucune référence à Wigner n'est établie dans la publication de Ville. De la même manière, Wigner ne dit pratiquement rien de ce qui l'a conduit à la définition de la distribution qu'il propose. Une note de bas de page informe le lecteur qu'elle fut trouvée par L. Szillard et l'auteur, dans un autre contexte. Il en est de même pour les travaux de Kirkwood (1933) et Husimi (1940). Par ailleurs, en théorie du signal aucune référence à ces travaux n'est signalée, autant pour la mise en œuvre de la distribution de Rihaczek qui est fondamentalement la même distribution de Kirkwood, que pour les travaux, initiés par Husimi, mettant en œuvre le spectrogramme/sonagramme dans les années 1940. Le terme "spectrogramme de Gabor" est alors utilisé. Il est anecdotique de signaler qu'en optique des travaux sur la distribution de Rihaczek, en référence à la théorie du signal, ont été rebaptisés distribution de Kirkwood-Rihaczek en rappel des premiers travaux en mécanique quantique [39]. La communauté du traitement du signal et des images a développé, étudié en profondeur les potentialités et/ou limitations de certains des outils construits de façon à en guider l'utilisation, et à en faciliter l'interprétation. Fort de cette expérience, le monde de la physique des ondes classiques est à même de mettre en œuvre ces outils pour différentes configurations possibles en propagation champ libre ou limité.

## 1.4 Représentation conjointe "temps-fréquence"

Le domaine d'étude détaillé dans ce paragraphe est résolument celui de l'analyse "temps-fréquence" développée en traitement du signal. Depuis le début des années 80, de nombreux développements tant théoriques qu'en vue d'applications ont été apportés par le traitement du signal dans ce domaine [26, 40]. Même si l'objet du travail présenté dans ce document n'est pas d'utiliser directement ces outils "temps-fréquence", il est néanmoins indispensable d'exposer quelques-unes de ses propriétés essentielles, afin de faciliter la lecture des représentations "espace-nombre d'onde" abordées dans les chapitres 2 à 4.

Plusieurs voies sont envisageables pour associer à un signal temporel une fonction conjointe du temps et de la fréquence. La première consiste en une superposition linéaire de signaux élémentaires, ou atomes "temps-fréquence", jouant le rôle d'une base de décomposition [40] (p. 70-99). C'est le principe même de la transformée de Fourier à court terme (TFCT) ou de la transformée en ondelettes. La seconde représentation consiste à représenter l'énergie d'un signal conjointement en temps et en fréquence. On parle alors de distribution d'énergie. C'est ce type de représentation énergétique qui est développée succinctement dans la suite de ce document.

### 1.4.1 Construction de la classe de Cohen

Les distributions temps-fréquence permettent d'observer les variations en fonction du temps du contenu spectral d'un signal  $z(t)$ . Ces représentations sont des fonctions des variables duales temps et fréquence, et sont notées  $\rho_z(t, f)$  dans le cas général. Elles permettent de localiser l'énergie d'un signal dans un plan à deux dimensions  $(t, f)$ , et donc de représenter d'une façon directement interprétable un signal non-stationnaire. Pour une étude approfondie, on peut se reporter aux ouvrages de L. Cohen [26] et P. Flandrin [40], qui sont dédiés à la théorie et l'application de l'analyse "temps-fréquence".

Il existe une grande variété de représentations "temps-fréquence", regroupées en classes selon leur mode de construction (classe de Cohen, classe affine, classe hyperbolique, *power class*) [41]. La classe de distributions dite *classe de Cohen* [14] est ainsi associée à toutes les distributions bilinéaires covariantes par translation de temps et de fréquence. Elle s'écrit sous la formulation générale

$$\rho_z^C(t, f; \phi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-j(\theta t + \tau 2\pi f - \theta u)} \phi(\theta, \tau) z(u + \frac{\tau}{2}) z^*(u - \frac{\tau}{2}) du d\tau d\theta, \quad (1.45)$$

où la fonction de paramétrisation  $\phi(\theta, \tau)$  (ou noyau de la distribution) fixe les propriétés de la distribution, et permet d'imposer alors les caractéristiques de la répartition de l'énergie du signal  $z(t)$  dans le plan "temps-fréquence", en fonction de l'application visée. On détaille par la suite quelques-unes des propriétés des distributions appartenant à la classe de Cohen, et on rappelle que ces propriétés imposent des contraintes sur le noyau  $\phi(\theta, \tau)$  (Eq. 1.45).

### 1.4.2 Quelques propriétés

Quelques propriétés de la classe de Cohen sont présentées ici, avant d'analyser en §1.4.3 deux distributions de cette classe : le spectrogramme et la distribution de Wigner-Ville.



### 1.4.2.1 Conservation de l'énergie

L'objet d'une représentation énergétique conjointe est de localiser l'énergie du signal sur les variables duales temps et fréquence. L'énergie (supposée finie) du signal  $z(t)$  vaut alors

$$E_z = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \rho_z^C(t, f; \phi) dt df. \quad (1.46)$$

Pour la classe de Cohen, ceci se traduit par la condition [40]

$$\phi(0, 0) = 1. \quad (1.47)$$

### 1.4.2.2 Principe de covariance

Considérons l'opérateur de translations en temps et en fréquence dont l'action est définie par

$$z(t) \rightarrow z_{t'f'}(t) = z(t - t') e^{j2\pi f't}. \quad (1.48)$$

Imposer la covariance par rapport à cet opérateur revient à imposer à une représentation temps-fréquence de suivre le signal dans ses translations dans le plan. Ainsi, une distribution bilinéaire est covariante par translations de temps et de fréquence si

$$\rho_{z_{t'f'}}^C(t, f) = \rho_z^C(t - t', f - f'). \quad (1.49)$$

Bien entendu, toutes les distributions de la classe de Cohen vérifient cette propriété.

### 1.4.2.3 Marginales

Les distributions d'énergie "monovariante" (densité spectrale d'énergie et puissance instantanée) s'obtiennent par projection de  $\rho_z^C(t, f; \phi)$  sur les variables duales, à savoir

$$|Z(f)|^2 = \int_{\mathbb{R}} \rho_z^C(t, f; \phi) dt, \quad (1.50)$$

et

$$|z(t)|^2 = \int_{\mathbb{R}} \rho_z^C(t, f; \phi) df. \quad (1.51)$$

Pour la classe de Cohen, la préservation des marginales se traduit par [40]

$$\phi(0, \tau) = 1 \quad (1.52)$$

et

$$\phi(\theta, 0) = 1 \quad (1.53)$$

### 1.4.2.4 Supports

Une représentation conjointe doit pouvoir conserver les supports temporel et fréquentiel d'un signal. Selon la nature du support que l'on considère, la conservation de support au sens large exige que

$$\begin{cases} x(t) = 0, |t| > T & \rightarrow \rho_z^C(t, f; \phi) = 0, |t| > T, \\ X(f) = 0, |f| > B & \rightarrow \rho_z^C(t, f; \phi) = 0, |f| > B. \end{cases} \quad (1.54)$$

### 1.4.2.5 Autres propriétés

Il existe d'autres propriétés détaillées dans [26, 40, 41] comme la *positivité*, la *fréquence instantanée*, le *retard de groupe*... On montre par ailleurs qu'une distribution appartenant à la classe de Cohen ne peut vérifier simultanément l'ensemble des propriétés citées ci dessus. Certaines propriétés sont ainsi incompatibles entre elles. L'exemple le plus frappant est celui de la positivité : imposer à une distribution de la classe de Cohen d'être partout positive<sup>4</sup> (permettant une interprétation en termes de densité locale d'énergie) est exclusif de la quasi-totalité des autres propriétés souhaitables (comme l'obtention de distributions marginales correctes, la conservation des supports...). A l'inverse, tolérer qu'une distribution puisse prendre des valeurs négatives peut préserver un nombre considérable de propriétés recherchées. C'est en particulier le cas de la distribution de Wigner-Ville.

### 1.4.3 Exemples de distributions de la classe de Cohen

Afin d'illustrer quelques-uns des points abordés au préalable, et en vue de faciliter la lecture des chapitre 2 à 4 (représentations "espace-nombre d'onde" appliquées à des problèmes de propagation dans des guides), les exemples du spectrogramme et de la distribution de Wigner-Ville sont brièvement abordés.

#### 1.4.3.1 Le spectrogramme

Le spectrogramme, membre de la classe de Cohen, a un noyau de la forme [26] (p. 138)

$$\phi(\theta, \tau) = \int_{\mathbb{R}} w(u + \frac{\tau}{2}) w^*(u - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi\theta u} du, \quad (1.55)$$

et peut s'écrire selon la forme

$$\rho_z^H(t, f) = \left| \int_{\mathbb{R}} z(s) w^*(s - t) e^{-j2\pi f s} ds \right|^2, \quad (1.56)$$

où  $z(t)$  est le signal à analyser et  $w(t)$  la fenêtre d'analyse. Son calcul correspond au séquençement d'une opération linéaire (la transformation de Fourier du signal pondéré) et d'une opération quadratique (le module carré). C'est une distribution purement réelle et positive, qui ne préserve ni les marginales, ni les supports.

#### 1.4.3.2 La distribution de Wigner-Ville

La distribution de Wigner-Ville, également membre de la classe de Cohen, a un noyau  $\phi(\theta, \tau)$  unitaire ( $\forall \theta, \tau$ ). Elle prend la forme suivante

$$\rho_z^W(t, f) = \int_{\mathbb{R}} z(t + \frac{\alpha}{2}) z^*(t - \frac{\alpha}{2}) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha. \quad (1.57)$$

---

<sup>4</sup>Ce qui est le cas du spectrogramme.

A la différence du spectrogramme, le calcul de la distribution de Wigner-Ville met en jeu d'abord une opération quadratique (multiplication du signal  $z(t)$  par le conjugué de son image en miroir, relativement à l'instant d'évaluation), puis une transformation linéaire (de Fourier). A noter que la distribution de Wigner-Ville ne nécessite pas l'introduction d'une fenêtre arbitraire. Cette distribution possède un grand nombre des propriétés souhaitables pour une représentation "temps-fréquence". En particulier, c'est une fonction réelle, préservant les marginales, conservant les supports temporel et fréquentiel du signal et localisant idéalement un chirp linéaire [26, 40]. En contrepartie, elle possède des propriétés rendant son interprétation délicate. Elle peut prendre des valeurs négatives, ce qui interdit de l'interpréter localement comme une densité énergétique, et sa structure bilinéaire crée dans le plan temps-fréquence des termes d'interaction appelés interférences<sup>5</sup>. Des versions de la distribution de Wigner-Ville, sur un horizon temporel fini (pseudo distribution de Wigner-Ville), et lissée conjointement en temps et en fréquence (pseudo distribution de Wigner-Ville lissée) ont été proposées [40] afin de s'affranchir partiellement de ce problème d'interférences, hélas au détriment de la localisation de l'énergie dans le plan temps-fréquence.

### 1.4.3.3 Illustration des interférences

Afin d'illustrer l'effet des interférences dans le plan temps-fréquence, un signal analytique est généré, composé de quatre atomes "temps-fréquence" [40]. La figure 1.7 présente en (a) le spectrogramme du signal et en (b) sa distribution de Wigner-Ville.

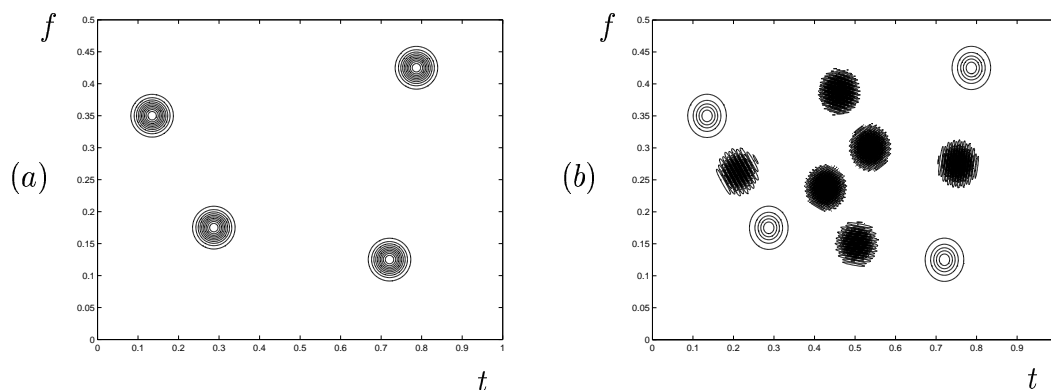


FIG. 1.7 – Représentation dans le plan "temps-fréquence" de quatre atomes. (a) : Spectrogramme. (b) : Distribution de Wigner-Ville.

Comme attendu, la distribution de Wigner-Ville génère des interférences qui perturbent la lecture du plan temps-fréquence, alors qu'elles sont négligeables dans le cas du spectrogramme. A contrario, la localisation des atomes est meilleure en termes de résolution dans le cas de la distribution de Wigner-Ville. Enfin, pour chaque paire d'atomes "temps-fréquence", les termes interférentiels sont localisés au

<sup>5</sup>Ces interférences existent en fait pour toutes les distributions de la classe de Cohen de par la structure bilinéaire de cette classe. Leur importance est plus ou moins sensible selon le choix de la distribution.

milieu géométrique de la droite qui joint les centres "temps-fréquence" des atomes considérés [40] (p. 240) et possèdent une structure oscillante (qui peut être réduite par lissage).

## 1.5 Représentation conjointe espace-nombre d'onde

Afin d'appréhender l'analogie "temps-fréquence"/"espace-nombre d'onde", l'exemple d'un champ acoustique dans une chambre d'expansion brusque à deux dimensions est présenté ici à dessein d'illustration (cet exemple sera approfondi dans le chapitre 2). L'objet de ce paragraphe est de s'interroger sur la notion de représentation des propriétés locales d'un tel champ. Deux représentations sont ainsi proposées. La première, nommée spectre local [28], permet de visualiser le champ dans l'espace des phases  $(x, y, k_x, k_y)$ . La seconde consiste à analyser le champ à l'aide des variables de Birkhoff [42].

### 1.5.1 Spectre local

La notion de spectre local a été introduite par M.J. Bastiaans [28]. L'analogie avec le "temps-fréquence" permet de transposer les distributions de la classe de Cohen dans le domaine "espace-nombre d'onde". Dans le cas de l'analyse d'objets à deux dimensions (guides, images), représenter de telles distributions dans l'espace des phases à quatre dimensions  $(x, y, k_x, k_y)$  est délicat. Un moyen d'y parvenir est de fixer une zone d'analyse autour d'un point  $(x_0, y_0)$  dans le domaine spatial et de visualiser le contenu de la distribution dans le domaine spectral  $(k_x, k_y)$ . C'est cette dernière représentation que l'on nomme spectre local. Afin d'illustrer le principe de cette représentation, l'exemple d'une chambre d'expansion brusque à deux dimensions (détaillé dans le chapitre 2) est abordé ici.

Un guide d'onde, présenté en Fig. 1.8 (a), est excité par un mode unique (supposé propagatif), modélisé par deux ondes planes propagatives obliques. Les directions de propagation sont données en Eq. (1.11). Dans le guide droit de gauche (en amont de la discontinuité), 50 modes propagatifs peuvent se propager. Dans le guide droit de droite (en aval de la discontinuité), 70 modes propagatifs sont susceptibles d'être présents. Dans l'exemple présenté ici, seul le mode d'indice  $m = 19$  (Cf. §1.1.2.1) est présent dans le guide de gauche. Le changement de section implique la génération d'un champ de structure complexe dans la partie droite du guide. Dans cette partie du guide, les régions de l'espace peuvent être associées à des phénomènes physiques différents, confortant ainsi l'idée d'une analyse spatiale locale. Trois de ces zones sont présentées ici, notées de  $A1$  à  $A3$  (Fig. 1.8 (a)). Les spectres locaux sont estimés par un spectrogramme (ou distribution de Husimi) en Fig. 1.8 (b), et par une pseudo distribution de Wigner-Ville<sup>6</sup> en Fig. 1.8 (c).

L'observation des spectres locaux (Fig. 1.8 (b)) obtenus par le spectrogramme suggère les commentaires suivants. Au point  $A1$ , l'une des composantes du mode  $m = 19$  incident se diffracte sur l'angle formé par le changement de section du guide. Ce point se comporte alors comme une source

<sup>6</sup>Pour ces deux distributions, le choix de la fenêtre d'analyse locale est précisé dans le chapitre 2.

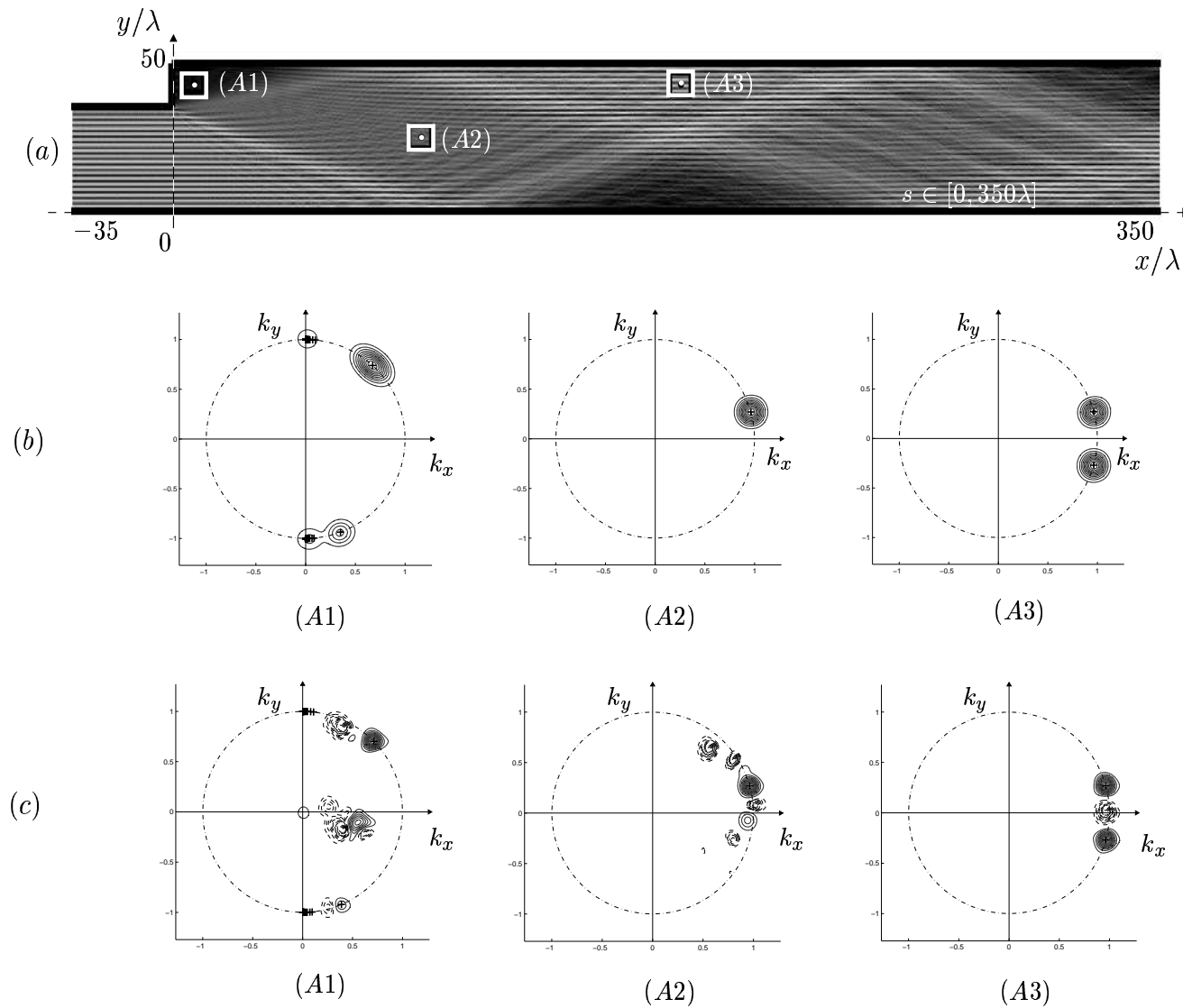


FIG. 1.8 – (a) : Module de la pression dans un guide à changement brusque de section avec un mode incident (venant de la gauche) d'indice  $m = 19$ . Différentes régions dans le demi-guide de droite sont analysées. (b) : Distribution de Husimi pour les points (A1) $= (8\lambda, 44\lambda)$ , (A2) $= (88\lambda, 25\lambda)$ , (A3) $= (180\lambda, 43\lambda)$ . (c) : Pseudo distribution de Wigner-Ville en ces mêmes points.

omnidirectionnelle. Chaque rayon émanant de ce nouveau point source est représenté par des croix sur le cercle de rayonnement. Le résultat visualisé en Fig. 1.8 (b) s'accorde alors avec l'interprétation géométrique du problème. De même, au point *A2*, seule une composante du mode principal transmis est localisée. Enfin, au point *A3*, les deux composantes des deux ondes planes propagatives obliques du mode transmis sont également bien localisées. Lorsque le champ est localement analysé par la pseudo distribution de Wigner-Ville (Fig. 1.8 (c)), on observe que la présence des structures interférentielles perturbe clairement la lecture de l'espace des phases, même si la localisation des composantes est meilleure.

### 1.5.2 Analyse de Birkhoff

Lorsqu'on souhaite analyser le champ à proximité des parois du guide, il est tentant de s'affranchir des inconvénients du spectre local (on ne dispose alors qu'une trop faible partie du champ à analyser) en utilisant les variables de Birkhoff ( $s, \sin \theta$ ). Selon l'interprétation rayon, cela consiste à ne retenir pour l'analyse sur les bords du guide, que les positions des impacts et les angles des rebonds successifs des rayons. En effet, l'abscisse curviligne  $s$  le long du bord du guide et la coordonnée  $\sin \theta$  liée à l'angle d'impact par rapport à la normale sont les deux variables dites de Birkhoff. Ce principe d'analyse, bien connu en mécanique quantique [42], a été appliqué à l'étude des billards quantiques bidimensionnels. Ce sont des cavités soit fermées (espace clos), soit ouvertes (via une connection à deux guides externes au système).

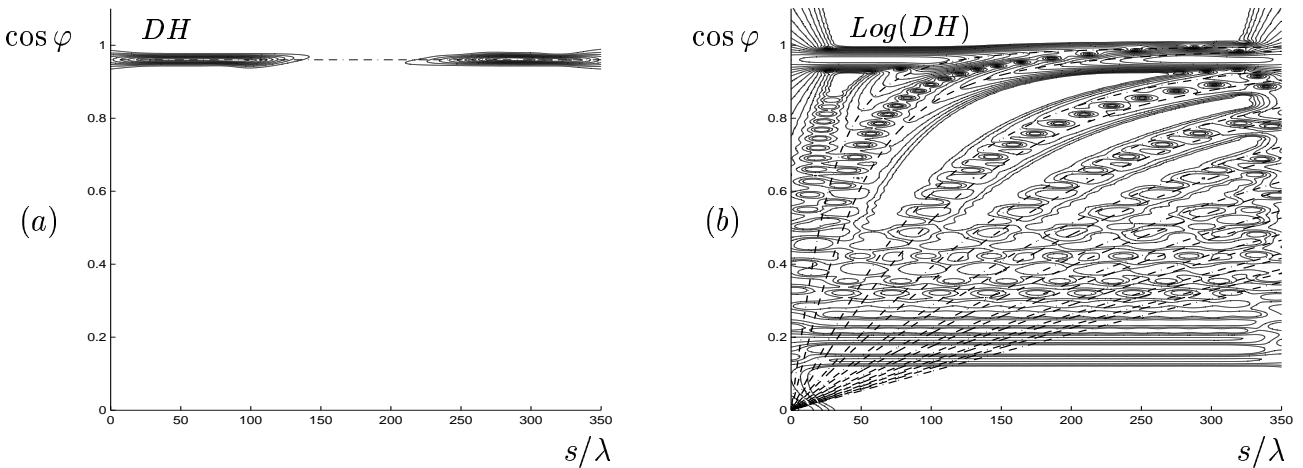


FIG. 1.9 – Analyses de Birkhoff sur le bord inférieur du guide de la Fig. 1.8. L'angle  $\varphi$  est l'angle complémentaire de l'angle  $\theta$  ( $\cos \varphi = \sin \theta$ ). (a) : Distribution de Husimi. (b) : Logarithme de la distribution de Husimi.

L'exemple du champ présenté en Fig. 1.8 (a) est repris ici et l'analyse de Birkhoff est effectuée le long du bord inférieur du guide. Seule l'analyse par le spectrogramme (Fig. 1.9 (a)) est présentée

ici, la pseudo distribution de Wigner-Ville générant des interférences trop nombreuses pour permettre l'interprétation du comportement local du champ. La Fig. 1.9 (a) présente le spectrogramme dans le plan  $(s, \sin \theta)$ . Comme attendu, dans le cadre de l'analyse géométrique, les rayons qui se réfléchissent sur le bord inférieur du guide (hypothèse de réflexion spéculaire) possèdent le même angle d'impact, et la représentation en  $(s, \sin \theta)$  est donc une droite. A noter que cette droite révèle une zone d'ombre comprise entre  $s/\lambda \in [150, 200]$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la source. Enfin, il est possible de révéler les informations plus précises en observant (Fig. 1.9 (b)) le logarithme du spectrogramme (représentation dite stellaire [43]). Les lignes en pointillés représentent l'évolution spatiale dans le plan de Birkhoff des différents rayons émanant de l'angle de diffraction du guide. On observe ainsi que la zone d'ombre est dominée par la contribution de la diffraction du mode incident.

Les figures 1.8 et 1.9 montrent la difficulté d'une part de l'analyse locale d'un champ bidimensionnel, et d'autre part du choix de la représentation conjointe *ad hoc*. La structure d'un même champ, selon qu'il est représenté par un spectre local ou via une analyse de Birkhoff, révèle des informations différentes et complémentaires.

## 1.6 Présentation du document

Le travail présenté dans ce document illustre l'intérêt des représentations conjointes "espace-nombre d'onde" pour l'analyse locale dans des guides. Plusieurs géométries de guide sont étudiées : le guide droit ouvert-ouvert (avec ou sans changement brusque de section), des guides fermés ou billards, des billards connectés à des guides ouverts, et des guides à section variable. L'objet des chapitres 2 à 4 est double : montrer l'intérêt d'une analyse locale d'une part, et illustrer d'autre part l'importance du choix de la représentation.

Ainsi, dans le chapitre 2, la propagation dans un guide droit ouvert-ouvert, ainsi que dans une chambre d'expansion brusque et dans un billard ouvert est étudiée. Si des travaux théoriques et numériques ont été réalisés pour de telles géométries afin de calculer analytiquement le champ dans de tels guides d'ondes, et pour différentes excitations (point source, faisceau gaussien, ...), l'approche d'analyse locale du champ dans le domaine "espace-nombre d'onde" constitue l'originalité de ce chapitre. A travers ces trois exemples de guides, on montre comment les deux types de représentations, spectre local et analyse de Birkhoff, peuvent être complémentaires pour l'analyse locale des champs acoustiques étudiés.

Le chapitre 3 décrit une méthode numérique permettant d'améliorer la localisation de la distribution de Husimi dans le cadre de l'étude de différents guides fermés nommés billards. L'accent est mis sur l'étude des fonctions propres du problème de Helmholtz pour de telles cavités. Si les principales caractéristiques d'une fonction propre ont été mises en évidence théoriquement, les conclusions apportées par ces travaux sont parfois confuses (localisation de cicatrices par exemple [44]). Les techniques empruntées à la communauté du traitement du signal (comme la réallocation) permettent dans certains cas une meilleure lecture des cartes de Birkhoff.

Enfin, le chapitre 4 aborde l'analyse multimodale de faible densité dans différents guides ouverts-ouverts de section variable. La méthode de réallocation permet de visualiser la loi d'évolution du nombre d'onde longitudinal pour chacun des modes présents dans l'étude, et informe sur les couplages de modes existant tout le long du guide.



# Bibliographie

- [1] P. Morse & H. Feshbach, "Method of theoretical physics," Mc Graw-Hill (1953).
- [2] C. Vassalo, "Theorie des guides d'ondes electromagnetiques," Eyrolles (1985).
- [3] C. Cohen-Tannoudji, F. Laloe & B. Diu, "Mecanique Quantique,"
- [4] O.M. Friesch, I. Marzoli & W.P. Schleich, "Quantum carpets woven by Wigner functions," New Journal of Physics **2**, 4.1-4.11 (2000).
- [5] A.E. Kaplan, P. Stifter, K.A.H. Van Leeuwen, W.F. Lamb & W.P. Schleich, "Intermode traces - Fundamental interference phenomenon in quantum and wave physics," Physica Scripta **T76**, 93-97 (1998).
- [6] E.G. Williams, "Fourier acoustics," Academic Press (1999).
- [7] E. Wigner, "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium," Phys. Rev. **40**, 749-759 (1932).
- [8] J.G. Kirkwood, "Quantum statistics of almost classical assemblies," Phys. Rev. **44**, 31-37 (1933).
- [9] K. Husimi, "Some formal properties of the density matrix," Proc. Phys. Math. Soc. Jpn. **22**, 264 (1940).
- [10] R.J. Glauber, "Photon correlations," Phys. Rev. Lett. **10**(3), 84-86 (1962).
- [11] E.C.G. Sudarshan, "Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams," Phys. Rev. Lett. **10**(7), 277-279 (1963).
- [12] R.J. Glauber, "Quantum optics in electronics," edité par C. DeWitt, A. Blandin & C. Cohen-Tannoudji, Gordon and Breach, New York, (1965).
- [13] N.D. Cartwright, "A non-negative Wigner-type distribution," Physica **83**(A), 210-212 (1975).
- [14] L. Cohen, "Generalized phase space distribution functions," J. Math. Phys **7**(5), 781-786 (1966).
- [15] H.W. Lee, "Theory and application of the quantum phase space distribution functions," Phys. Rep. **259**, 147-211 (1995).
- [16] D. Gabor, "Theory of communication," J. IEE (London) **93**, 429-457 (1946).
- [17] J. Ville, "Théorie et applications de la notion de signal analytique," J. Opt. Soc. Am **17**(7), 1256-1264 (1948).
- [18] R. Koenig, H.K. Dunn & L.Y. Lacy, "The sound spectrograph," J. Acoust. Soc. Am. **18**, 19-49 (1946).

- [19] C.H. Page, "Instantaneous power spectra," *J. Appl. Phys.* **23**, 103-106 (1952).
- [20] A. Blanc-Lapierre & B. Pincibono, "Remarque sur la notion de spectre instantané de puissance," *Pub. Sci. Univ. d'Alger s. B1*, 2-32 (1955).
- [21] M.J. Levin, "Instantaneous spectra and ambiguity functions," *IEEE Trans. Informat. Theory* **IT-13**, 95-97 (1967).
- [22] H. Margenau & R.N. Hill, "Correlation between measurements in quantum theory," *Prog. Theor. Phys.* **26**, 722-738 (1961).
- [23] A.W. Rihaczek, "Signal energy distribution in time and frequency," *IEEE Trans. Informat. Theory* **IT-14**(3), 369-374 (1968).
- [24] T. A. C. M. Claasen & W. F. G. Mecklenbrauker "The Wigner distribution - a tool for time-frequency signal analysis; part III : relations with other time-frequency signal transformations," *Philips J. Res.* **35**, 372-389 (1980).
- [25] F. Hlawatsch & G.F. Boudreaux-Bartels , "Linear and quadratic time-frequency signal representations," *IEEE Sig. Proc. Magazine* , 21-67 (1992).
- [26] L. Cohen , "Time-frequency distributions. A review," *Proceedings of the IEEE* **77**(7), 941-981 (1989).
- [27] M.J. Bastiaans "The Wigner distribution function applied to optical signals and systems," *Optics Communications* **25**(1), 26-30 (1978).
- [28] M.J Bastiaans, "Signal description of a local frequency spectrum," *SPIE* **373**(2), 49 (1981).
- [29] W.D. Mark, "Spectral analysis of the convolution and filtering of non-stationnary stochastic processes," *J. Sound Vib.* **11**, 19-63 (1970).
- [30] B.Z. Steinberg, E. Heyman & L.B. Felsen "Phase-space beam summation for time-harmonic radiation from large aperture," *J. Opt. Soc. Am.* **8**(1), 41-59 (1991).
- [31] B.Z. Steinberg & J.J. McCoy "Marching acoustic fields in a phase space," *J. Acous. Soc. Am* **93**(1), 188-204 (1993).
- [32] L. Carin & L.B. Felsen "Wave-Oriented data processing for frequency and time domain scattering by nonuniform truncated arrays," *IEEE Antennas and Propagation Magazine* **36**(3), 29-43 (1994).
- [33] J.M. Arnold "Phase-space localization and discrete representations of wave fields," *J. Opt. Soc. Am.* **12**(1), 111-123 (1995).
- [34] M.A. Alonso, "Measurement of Helmholtz wave fields," *J. Opt. Soc. Am* **17**(7), 1256-1264 (2000).
- [35] M.A. Alonso & G.W. Forbes "Phase space distributions for high-frequency fields," *J. Opt. Soc. Am.* **17**(12), 2288-2300 (2000).
- [36] K.B. Wolf, M.A. Alonso & G.W. Forbes "Wigner functions for Helmholtz wave fields," *J. Opt. Soc. Am.* **16**(10), 2476-2487 (1999).
- [37] A. Walther "Radiometry and coherence," *J. Opt. Soc. Am.* **58**(9), 1256-1259 (1968).

- 
- [38] T. Melamed "Phase space beam summation : A local spectrum analysis of time-dependent radiation," *J. Elec. Way. Appl.* **11**, 739-773 (1997).
- [39] L. Praxmeyer & K. Wodkiewicz, "Quantum interference in the Kirkwood-Rihaczek representation," *Optics Communications* **223**, 349-365 (2003).
- [40] P. Flandrin, "Temps-fréquence," Hermès (1993).
- [41] G.F. Boudreaux-Bartels, "Mixed time-frequency signal transformations", in "The transforms and applications handbook," Editor A.D. Poularikas, CRC Press & IEEE Press, 887-962 (1996).
- [42] B. Crespi, G. Perez & S.-J. Chang, "Quantum Poincaré sections for two-dimensional billiards," *Phys. Rev. E* **47**(2), 986-991 (1993).
- [43] J.M Tualle & A. Voros, "Normal modes of billiards portrayed in the stellar (or nodal) representation," *Chaos, Solitons and Fractals* **5**(7), 1085-1102 (1995).
- [44] E.J. Heller "Bound state eigenfunctions of classically chaotic Hamiltonian systems : scars of periodic orbits," *Physic Review Letters* **53**, 1515-1518 (1984).



## Chapitre 2

# Champ acoustique dans l'espace des phases. Application aux guides d'onde.

Dans ce chapitre<sup>1</sup>, le principe de représentation d'un champ acoustique dans le domaine "espace-nombre d'onde" est présenté. A un champ acoustique de coordonnées spatiales  $(x, y)$ , est associée une fonction définie dans l'espace des phases  $(x, y, k_x, k_y)$ . Il est difficile de représenter une telle fonction et deux méthodes sont proposées dans ce chapitre. La première consiste à associer à chaque point de l'espace  $(x, y)$  du champ acoustique un spectre de nombres d'onde à deux dimensions  $(k_x, k_y)$ , nommé spectre local. La seconde analyse le champ dans une direction arbitraire selon des coordonnées, dites variables de Birkhoff  $(s, \cos \varphi)$ , introduites en mécanique quantique afin d'étudier la dynamique classique de billards quantiques. L'ensemble de ces représentations est issu de distributions quadratiques évoluant dans l'espace des phases considéré. Des exemples de validations sont présentés sur un guide d'onde droit selon deux excitations (faisceau gaussien et point source), puis sur deux guides d'onde à section non-uniforme dont un guide droit à changement brusque de section et un billard ouvert pour un seul mode incident à l'entrée de chacun d'entre eux. Dans ces problèmes, le spectre local et l'analyse de Birkhoff sont utilisés afin d'identifier les structures cachées des champs étudiés. Les résultats impliquent la contribution d'un ou de plusieurs vecteurs d'onde qui participent à la valeur du champ acoustique au point d'analyse, ou le long des conditions limites, et montrent des structures complexes de champs, comme des "galeries d'écho" ou la présence d'ondes diffractées.

---

<sup>1</sup>Ce chapitre est présenté sous la forme d'une révision d'un article soumis à J. Acous. Soc. Am : "Phase space analysis for acoustic fields and its application to waveguide", B. Teyssandier, V. Pagneux, L. Simon et C. Depollier, 2004.

## 2.1 Introduction

In the present study, we propose methods for local analysis of time harmonic acoustic wave field in a two dimensional space. It is usual to describe a space varying signal with complex amplitude  $G(\mathbf{r})$  in the wavenumber domain by means of its wavenumber spectrum  $G(\mathbf{k})$  (Fourier transform of  $G(\mathbf{r})$ ), which may be interpreted as the distribution of the energy of the wave field as a function of the wave number. Nevertheless, it does not give any information about the *local* distribution of the energy as a function of both the space and the wave number. This justifies the introduction of *local* spectrum and the use of phase space  $(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ .

The representation of a wave field in the phase space is an old idea which has recently received much attention [1]. This representation implies that the distribution of the energy of the wave field is analyzed simultaneously in both the space and the wave number domains, as a distribution called local spectrum [2]. Phase space diagrams are well known in quantum mechanics where both the position and the momentum describe the behavior of a particle [3, 4]. The use of phase space diagrams in radiation problems was first proposed in optics [2, 5, 6] and more recently in acoustics [7, 8] where the link between phase space distribution and ray concept was made.

For propagation in cartesian coordinates, the wave field in 2D may be described as a function of the four variables  $(x, y, k_x, k_y)$ , called phase space distribution [4]. To represent this distribution, the choice proposed in Ref. 4 is to choose an observation point  $(x, y)$  and to represent the result as a function of  $(k_x, k_y)$ . For instance, in a waveguide, Fig. 2.1(b) shows the ideal local spectrum for an observation point  $O$  according to the configuration of Fig. 2.1(a), where three rays ( $A$ ,  $B$  and  $C$ ) are supposed to meet at point  $O$ .

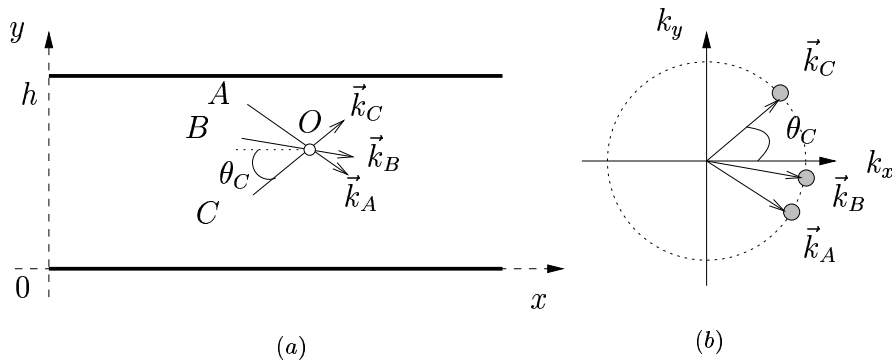


FIG. 2.1 – (a) : Spatial behavior in a planar waveguide of three rays named  $A$ ,  $B$  and  $C$ , which cross at an analysis point  $O$ . (b) : Ideal local spectrum in  $O$  showing, in the wave number domain, the contribution of those three rays.

Another point of view was proposed to represente such a function in acoustics, in the framework of underwater acoustics [7, 9] to study the propagation in an 2D oceanic waveguide. In these studies, the results are presented as a function of the variables  $(y, k_y)$  for a given  $x$ .

In addition, a method proposed in quantum mechanics [10, 11] (with Dirichlet boundary conditions) consists in taking all the information of a wave field in its normal derivatives estimated on the boundary. Phase space distributions used on such a signal is provided by the so-called Birkhoff variables  $(s, \cos \varphi)$ , where  $s$  is the coordinate along the boundary, and  $\frac{k_{//}}{k} = \cos \varphi$  its conjugate normalized  $k$  wavenumber parallel to the wall.

The paper is organized as follows. In the following section, we review the most common methods for space wavenumber representations. This way of representing the wave field is then applied to three problems in acoustics. Firstly the well known problem of 2D planar waveguide is revisited in section III in a new point of view. Secondly, a sudden area expansion is analyzed by this way in section IV. We then consider in section V, an open billiard [25] that have been discussed recently. Conclusions are lastly presented in section VI.

## 2.2 Phase space distributions

In the following, we are concerned with the acoustic field  $G(\mathbf{r})$  (a time dependence  $e^{-j\omega t}$  is assumed and suppressed in the following). The notations in a Cartesian coordinate frame are for the space coordinates the vector  $\mathbf{r} = (x, y)$ , and for the wavenumber coordinates the vector  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ . Expressions such as  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  means the scalar product  $(k_x x + k_y y)$ . Lastly, expressions like  $\int \cdots d\mathbf{r}$  represent  $\int \int \cdots dx dy$ , and all integrations extend from  $-\infty$  to  $+\infty$  if not specified.

### 2.2.1 Husimi distribution (HD)

The Husimi distribution introduced in quantum mechanics [14] (noted in the following HD) is the most widely used tool to analyse the local spectrum of a signal. It is easily shown that the HD is the squared modulus of a Gaussian windowed Fourier transform (denoted in the following GWFT) applied in optics [5, 6] and acoustics [7, 8] or short space Fourier transform (denoted in the following SSFT) in signal processing [12, 13]. The HD of a space domain harmonic function  $G(\mathbf{r})$  expresses as

$$\begin{aligned} HD_G(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= |GWFT_G(\mathbf{r}, \mathbf{k})|^2, \\ &= \left| \int G(\mathbf{r}') w^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \right|^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

where  $GWFT_G$  denotes the Gaussian windowed Fourier transform of the function  $G(\mathbf{r})$ , and  $\mathbf{r}$  is the position of the center of the space window  $w(\mathbf{r})$ , which is supposed to be a Gaussian window. It is a real and positive phase space distribution.

### 2.2.2 Pseudo Wigner Ville distribution (PWVD)

The Pseudo Wigner Ville distribution (PWVD) of the function  $G(\mathbf{r})$  is defined [12, 13] by

$$PWVD_G(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int \left| w\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\right) \right|^2 G\left(\mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\right) G^*\left(\mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\right) e^{-j\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha}} d\boldsymbol{\alpha}, \quad (2.2)$$

where  $w(\mathbf{r})$  is an even function (called window) which introduces bounds of integration in contrast to the Wigner Ville distribution (WVD) [2, 5, 13, 15]. The PWVD has several significant properties : it is real and not everywhere positive. Moreover, this distribution is quadratic as the HD, rather than linear as the GWFT [6, 7, 8]. But in contrast to HD (except for neighboring terms), it generates large cross terms located midway between components.

### 2.2.3 Modified Wigner Ville Distribution (MWVD)

The Modified Wigner Ville Distribution (MWVD) has been introduced by Stankovic [16] *et al* in the signal processing framework. It is defined according to

$$MWVD_G(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{\pi^2} \int M(\boldsymbol{\theta}) SSFT_G(\mathbf{r}, \mathbf{k} + \boldsymbol{\theta}) SSFT_G^*(\mathbf{r}, \mathbf{k} - \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}, \quad (2.3)$$

where  $SSFT$  is the short space Fourier transform and  $M(\boldsymbol{\theta})$  is a window. Some useful properties may be considered which can be gained by an appropriate choice of the window  $M(\boldsymbol{\theta})$ . Two cases are :

If  $M(\boldsymbol{\theta}) = \pi^2 \delta(\boldsymbol{\theta})$ , where  $\delta$  is the Dirac  $\delta$  function, Eq. (2.3) leads to  $MWVD(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = HD(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ .

If  $M(\boldsymbol{\theta}) \equiv 1$ , for all  $\boldsymbol{\theta}$ , Eq. (2.3) leads to  $MWVD(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = PWVD(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ .

This distribution may consequently be seen “between” the HD and the PWVD and it combines the properties of both. It can produce the desired representation of a multicomponent signal such that the distribution of each component  $F_q(\mathbf{r})$  is its PWVD, avoiding cross-terms between components.

### 2.2.4 Smoothed Pseudo Wigner Ville Distribution (SPWVD)

It has been shown that smoothing the WVD reduces the importance of amplitude cross-terms [12], but at the expense of smearing the auto-component concentration as for the PWVD. The SPWVD uses two independent smoothing windows : a spatial averaging window  $h(\boldsymbol{\beta})$  and a wave number averaging window  $w(\boldsymbol{\alpha})$ . This double smoothing operation produces an improvement of the representation by reducing the cross-terms. The SPWVD can be defined as

$$SPWVD_G(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int \left| w\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\right) \right|^2 \left[ \int h(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{r}) G\left(\boldsymbol{\beta} + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\right) G^*\left(\boldsymbol{\beta} - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\right) d\boldsymbol{\beta} \right] e^{-j\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}} d\boldsymbol{\alpha}. \quad (2.4)$$

The independent smoothing in space and wave number domain yields significant practical advantages, resulting in a great flexibility in the choice of smoothing window, application and efficient computation [12].

### 2.2.5 Birkhoff variables

Another phase space analysis exists according to new coordinates. In quantum mechanics, a natural way of reducing the quantum problem from two to one dimension is to study the properties of a wave function on the wall which qualifies the field on boundaries. Neumann boundary conditions are required for acoustic problems and phase space distribution representation of a wall wave function, also called quantum Poincaré section [11], is given by phase space coordinates  $(s, \cos \varphi)$ . The variables linked to



the surface are  $s$ , an arc length along boundary, and its conjugate normalized wavenumber  $\cos \varphi = \frac{k_{//}}{k}$ , which is the normalized component of wavenumber parallel to the wall, where  $\varphi$  is the angle of incidence as shown by Fig. 2.2. Instead of vectors  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{k}$ , the space and wavenumber coordinates are respectively  $s$  and  $k_s = k \cos \varphi$ . Thus, expression of the scalar product  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  means the product  $k \cos \varphi \times s$ .

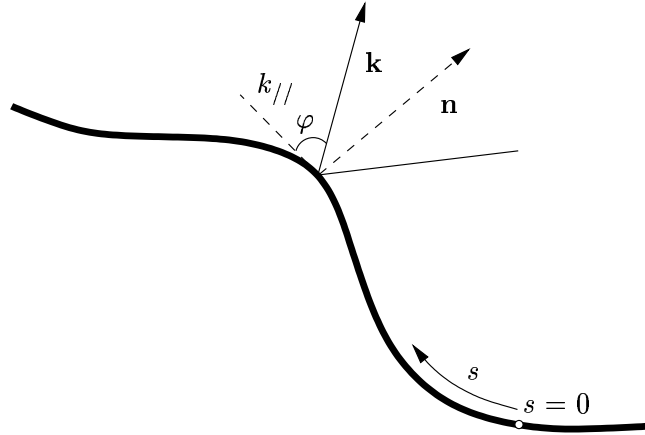


FIG. 2.2 – Birkhoff variables are fixed by specifying the arc length along the boundary parametrized by  $s$  and normalized component of wavenumber parallel to the wall  $\cos \varphi = \frac{k_{//}}{k}$ .

## 2.3 2D waveguide problem

In this section we propose phase space distributions in various settings. The concepts and the qualitative observations discussed in the introduction and in section II are applied to a 2D planar waveguide with Gaussian beam or a point source excitations [17, 18, 19]. The purpose of choosing a Gaussian beam or a point source is to provide a convenient test case to compare numerical results. The phase space distribution for a Gaussian beam or a point source excitation in a planar waveguide is formally obtained by substituting the entire or a part of the modal Green's function, which is taken as a reference solution, into the definitions of the HD, the PWVD, the MWVD and the SPWVD.

### 2.3.1 Gaussian beam excitation of a 2D waveguide

Because of the Neumann boundary conditions at  $y = 0$  and  $y = h$  of the Fig. 2.4 (a), the mode are discrete with a vertical wave number  $k_m = \frac{m\pi}{h}$  with  $m$  the mode index and  $h$  the height of the planar waveguide. A propagating mode can thus be regarded as two interfering sets of rays at angles,  $\varphi_m = \arcsin\left(\frac{k_m}{k}\right)$ , and this interpretation has been widely used [20]. Cluster of modes is known to produce an interference maximum along a trajectory (emanating from the source) equivalent to the path of the “modal ray”  $\varphi_m$  for the central mode in the group [17, 19]. The field of a modal Gaussian beam may be expressed as

$$\sum_{m=M_1}^{M_2} e^{-\frac{(m-m_0)^2}{2\sigma^2}} G_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad (2.5)$$

where  $e^{-\frac{(m-m_0)^2}{2\sigma^2}}$  is a Gaussian window with  $m_0$  the index of the central mode of the mode bundle,  $M_1$  and  $M_2$  the mode indexes which determine bounds of the mode bundle and  $G_m$  the modal Green function with mode index  $m$ , given by

$$G_m(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \left( \frac{2 - \delta_{m0}}{2h} \right) j \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{h} y_0\right)}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}} \cos\left(\frac{m\pi}{h} y\right) e^{j\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2} |x - x_0|}, \quad (2.6)$$

with  $\delta_{m0}$  the Kronecker tensor and  $k = \frac{\omega}{c_0}$ . Note that the Green function is  $G = \sum_{m=0}^{\infty} G_m$ .

### 2.3.1.1 Phase space of four variables

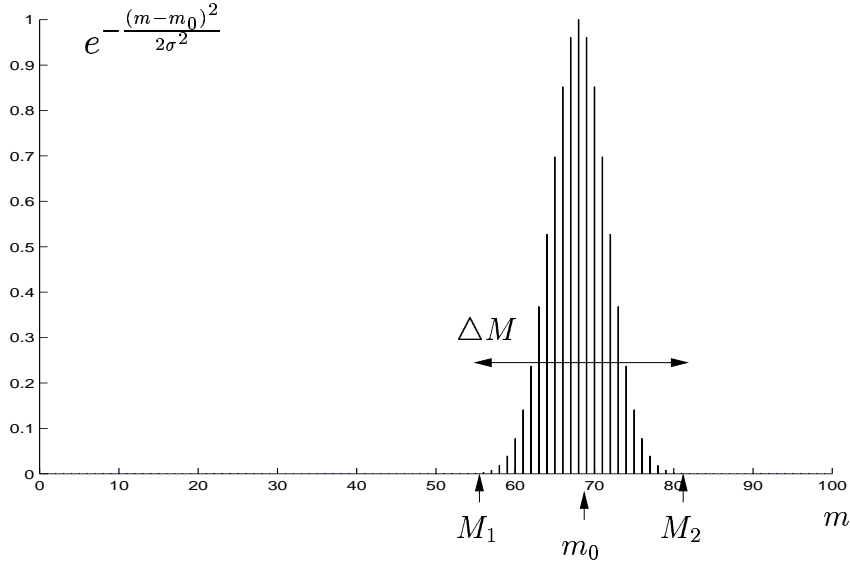


FIG. 2.3 – Plot of the envelope of the incident gaussian beam with the locations of the various modes (vertical lines). Only those modes are excited appreciably.

For a 2D waveguide, the parameters used for the computations are the height  $h = 49.97\lambda$  which allows 100 propagative modes where  $\lambda$  is the wavelength of the source, the wave velocity is  $c_0 = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  and the density is  $\rho_0 = 1.2 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . The waist of the Gaussian beam has been arbitrary located at  $x_0 = 0$  and  $y_0 = h$ , and the choice of the central mode in the group is  $m_0 = 69$ . We denote the mode bundle width as follows  $\Delta M$  and take the value  $\Delta M = 25$ . It is weighted by a Gaussian window [21] with a beam-width parameter as  $\alpha = 0.04$ . Phase space distributions are computed at the point  $(x, y) = (75\lambda, 20\lambda)$ . Here and in the sequel, simulations were realized with 512 points FFT algorithm using zero padding (Spatial window  $w(\mathbf{r})$  which is used in both the HD and the PWVD, is such that its width along  $x$  and  $y$  axes are  $W_x = W_y = 8\lambda$ ).

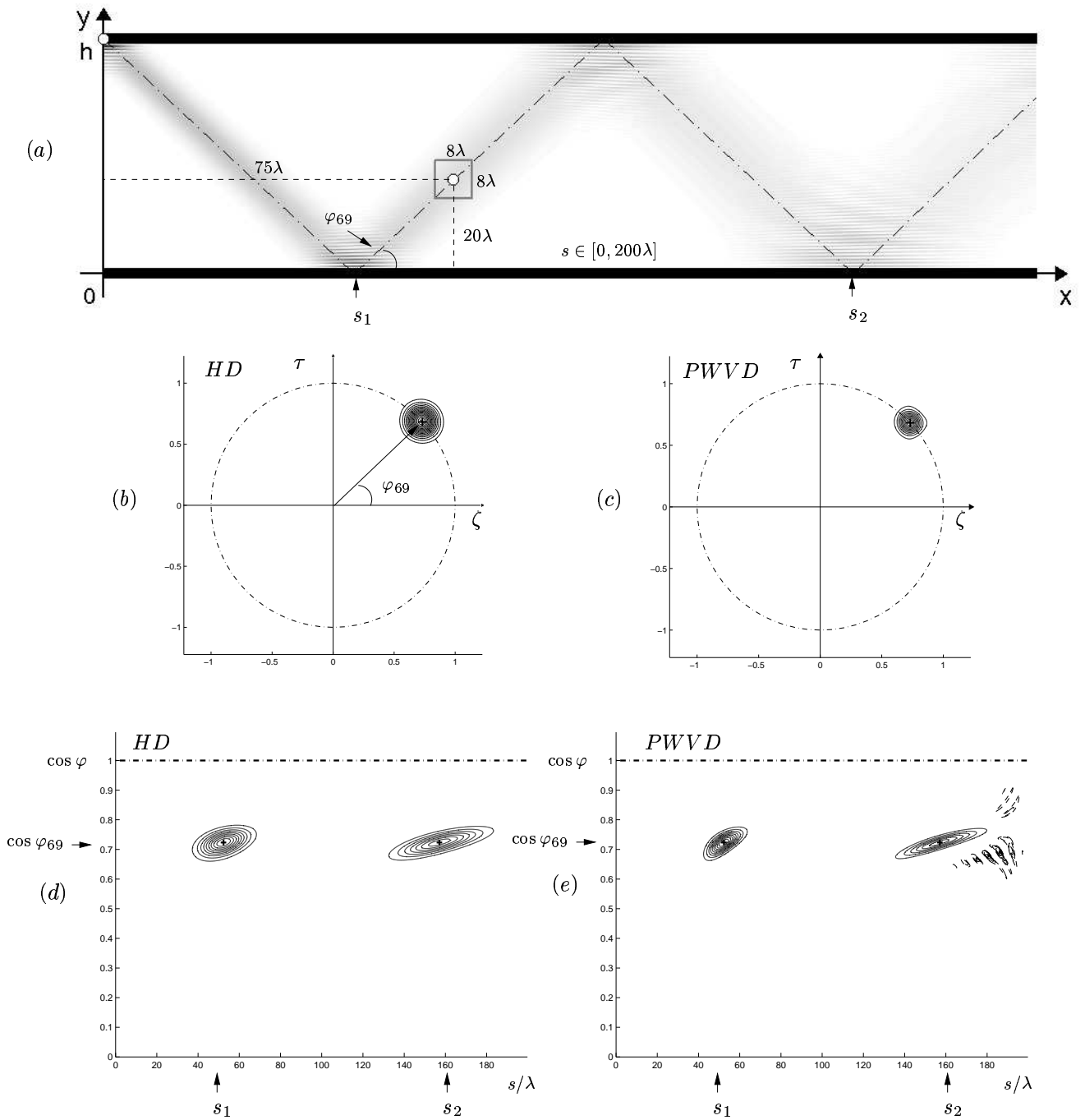


FIG. 2.4 – (a) : Magnitude of the Gaussian beam in the 2D waveguide. Local spectrum ( $\zeta = \cos \varphi$ ,  $\tau = \sin \varphi$ ) normalized by the wavenumber  $k$  for the HD (b) and the PWVD (c) at the observer point with Cartesian coordinates  $(x, y) = (75\lambda, 20\lambda)$  for a gaussian beam excitation at the upper interface with departure angle corresponding to  $\varphi_{69}$ . Dashed circle (–) represents the normalized radiation circle, which is the trigonometric circle. Birkhoff map : HD (d) and PWVD (e). Skeletal points are represented by crosses.

Results given in Fig. 2.4 (b) and Fig. 2.4 (c) show respectively the HD and the PWVD at the observer point. The cross, which is located on the radiation circle, describes a geometric ray emanating from the point source, which reaches the observer point with one reflection at the lower boundary. Phase space distributions are, at sufficiently high frequency, highly localized in phase space around the “skeletal point” [7, 8] with an exponential decay (Gaussian in fact, due to spatial window  $w(\mathbf{r})$ ). Considering simulation shown in Fig. 2.4 (b) and Fig. 2.4 (c) the PWVD offers higher resolution than the HD for a mono-component signal. Simply stated, the PWVD uses finite bounds of integration in contrast with the WVD. This results in a function which, relative to the true WVD, is smoothed with respect to the frequency domain only, whereas the HD is the result of the true WVD smoothed in both frequency and space domain [5, 12, 13]. The large positive values, named “islands” [11] which are located on the radiation circle, are well suited according to the departure angle of the Gaussian beam  $\varphi_{69}$ . Indeed, as discussed in earlier sections, the HD is equivalent to a blurred PWVD.

### 2.3.1.2 Birkhoff analysis

The horizontal axis of the Birkhoff map  $s$ , which describes the position along the boundary, varies from 0 to  $200\lambda$  with  $\lambda$  the wavelength of the source (Fig. 2.4 (a)). Only one variable (noted  $x$ ) is necessary for such a representation in the phase space. The coordinate  $y$  is arbitrarily chosen such that  $y = 0$ . The Gaussian beam hits the lower boundary along the parameter  $s$  of the 2D waveguide, at two different fixed points, noted  $s = s_1$  and  $s = s_2$ , and bounces off with the same angle  $\alpha$  as shown in Fig. 2.4 (a). Simulations were performed, here and in the sequel, with 2048 points FFT algorithm. Spatial window  $w(\mathbf{r})$  used in the HD (Fig. 2.4 (d)), and in the PWVD (Fig. 2.4 (e)), is applied such as its width along  $s$  axis is  $W_s = 51\lambda$ . Figure 2.4 shows the behavior of a gaussian beam in a 2D waveguide according to the Birkhoff map with the help of the HD (Fig. 2.4 (d)) and the PWVD (Fig. 2.4 (e)). Islands are centered on the coordinates of the ray path of the central group of mode, which is represented by skeletal points (crosses). Those skeletal points describe the first and second impact on the lower interface. Fig. 2.4 (e) shows that the PWVD provides increased resolution relative to the HD, but it generates interference terms.

### 2.3.2 Line source excitation of a 2D waveguide

With a line source excitation at  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ , the solution is the 2D Green function given by

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad (2.7)$$

where  $G_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  has been defined in Eq.(2.6).

#### 2.3.2.1 Phase space of four variables

As for the Gaussian beam solution, the duct height is  $h = 49.97\lambda$  which allows 100 propagative modes. The point source is on the upper boundary at  $(x_0 = 0, y_0 = h)$ .

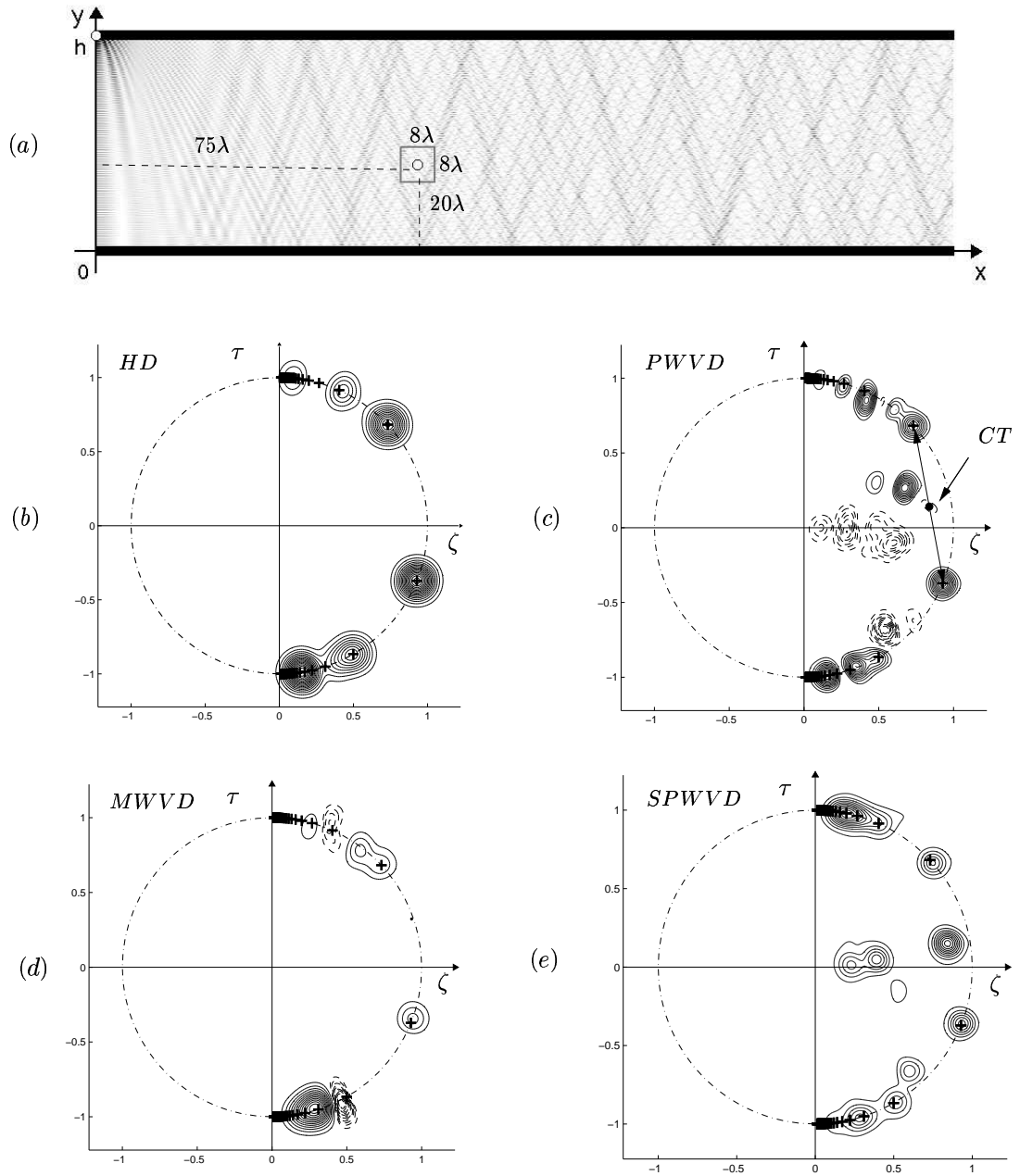


FIG. 2.5 – (a) : Magnitude of the pressure field in the 2D waveguide. Local spectrum ( $\zeta = \cos \varphi, \tau = \sin \varphi$ ) normalized by the wavenumber  $k$  for the HD (b), the PWVD (c), the MWVD (d) and the SPWVD (e) at the observer point with Cartesian coordinates  $(x, y) = (75\lambda, 20\lambda)$  with a point source at the upper interface  $(x_0, y_0) = (0, h)$ . Positive and negative contour plot are respectively represented by solid line and dashed line. Dashed circle (—) represents the normalized radiation circle, which is the trigonometric circle.

The guided mode series in Eq. (2.7) is truncated at the order  $m = 150$ , which means that there are 50 evanescent modes. We now consider multi-component signal (several islands) with cross-terms which correspond to interference between islands. The cross-terms may have a peak value higher than the auto components [12]. In this section, we investigate the space-wavenumber resolution of representations in a 2D waveguide given by the HD, the PWVD and the two other distributions which have qualities in cross-terms reduction, the MWVD and the SPWVD. Phase space distributions are computed at the point  $(x, y) = (75\lambda, 20\lambda)$ . Results given in Fig. 2.5 show the four phase space distributions at the observer point. Crosses which are located on the radiation circle, describe geometric rays emanating from the point source, which reach the observer point and represent, respectively, the direct and reflected ray families. A better accuracy is obtained to localize local wavenumber with the PWVD (Fig. 2.5 (c)) than the other phase space distributions. Nevertheless, it is very difficult to interpret the PWVD because of some interference terms [16] and negative values [22]. Islands are concentrated on the radiation circle, while interferences are centered between the corresponding islands [16]. The resulting interference forms a type of noise that may obscure weaker, nearby component. An example is presented in Fig. 2.5 (c) by the letters *CT*. In contrast, the HD (Fig. 2.5 (b)) does not tend to have the ghost structures mentioned above for the PWVD, except for neighboring terms [13]. One desirable property of the HD is that  $HD(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \geq 0$  and the interpretation of features in the HD tends to be easier; on the other hand the features tend to show rather poor wavenumber resolution. Many other distributions have been developed with the purpose of the cross-terms reduction. In contrast to the PWVD, the MWVD (Fig. 2.5 (d)) is equal to the sum of the PWVD of the individual components, only if auto-terms are far away from each other. It confirms the absence of ghost terms inside the radiation circle compared to the PWVD. A substantial reduction of the PWVD cross-terms can be obtained by spatial and wave number smoothing. The SPWVD (Fig. 2.5 (e)) realizes this filtering and gives islands with good resolution. Some cross-terms are still present but less than the MWVD and the PWVD. It is clear, therefore, that the HD (Fig. 2.5 (b)) and the SPWVD (Fig. 2.2 (e)) exhibit all essential structures necessary to obtain meaningful information, whereas the PWVD (Fig. 2.5 (c)) and the MWVD (Fig. 2.5 (d)) contain extremely complex patterns. A post-treatment could nevertheless be considered to find auto terms with the help of cross-terms. In the sequel of the paper, the HD will be used for next  $(x, y, k_x, k_y)$  representation.

### 2.3.2.2 Birkhoff analysis

Let us take the same properties as in the above section. The problem of surface wave field in a 2D waveguide is essentially that of finding beam fields created by a point source located on the upper wall  $(x_0 = 0, y_0 = h)$  into the  $x > 0$  half plane, for  $y = 0$ . In the Birkhoff map, the information is centered around skeletal lines that coincide with the location of the geometrical rays emanating from the  $x_0 = 0$  plane at  $y_0 = h$ , and passing through observer point along the lower interface of the 2D waveguide  $s \in [0, 200\lambda]$  with  $\lambda$  the wavelength of the source (Fig. 2.6 (a)). The skeleton which corresponds to the direct and reflected rays, represented by dashed line, and the phase space distribution are shown in Fig. 2.6. All the windows used in simulations are Gaussian.

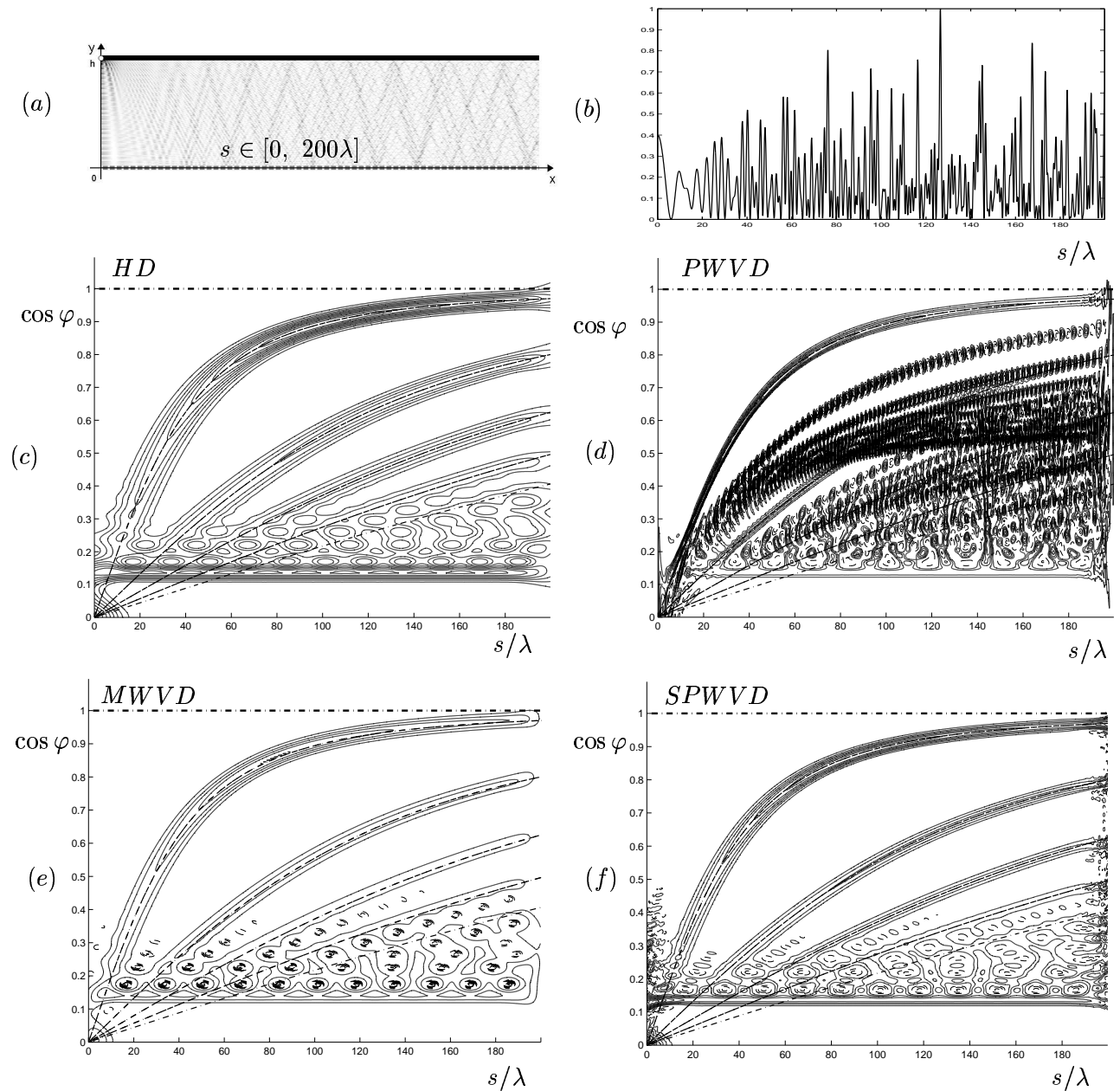


FIG. 2.6 – Phase space analysis according to Birkhoff variables  $(s, \cos \varphi)$ . The duct height is  $h = 49.97\lambda$  and a point source is located at the Cartesian coordinates  $(x_0, y_0) = (0, h)$  (a). (b) Normalized magnitude of the pressure field on the lower interface. (c) the HD, (d) the PWVD, (e) the MWVD and in (f) the SPWVD. Skeletal lines are represented by dashed line.

The HD (Fig. 2.6 (c)) and the PWVD (Fig. 2.6 (d)) give results in good agreement with the multi-branch skeleton. In accordance with previous conclusions about the PWVD, we obtain a better resolution than the HD, but a lot of undesirable cross-terms which clearly prevents any straightforward reading. Excepted for the direct ray which may be easily identified, the skeletal lines become closer and interfere strongly for high order reflected ray and can no longer be separated. Distributions as the MWVD (Fig. 2.6 (e)) and the SPWVD (Fig. 2.6 (f)) have been developed to reduce the cross-terms components. Concerning the SPWVD, the use of a double smoothing operation will produce a further improvement in the cross-term reduction. We can observe that SPWVD performs better than the other three distributions according to an increased computational effort. Then for easier use and interpretation of results, the HD will be used for next Birkhoff map in the sequel.

### 2.3.2.3 Inverse problem

In direct radiation problems, the source term, the radiative properties of medium, and the boundary conditions are given. The acoustic field are to be determined with those data. On the other hand, in inverse radiation problems, either the radiative properties, or the source terms, or the boundary conditions are to be determined from the knowledge of the measured radiation data. In this inverse analysis,  $\Delta x = (x - x_0)$  the propagation distance between the observer point and the source point placed on the upper interface, and  $h$  the height of the 2D waveguide are regarded as unknown, but other quantities are known as the measured incident radiation field on the lower boundary according to conditions given in §2.3.2.1. Simulation given in Fig. 2.6 (d) shows, with the help of the PWVD, the best image resolution for the direct radiation. This one is described by a skeletal line given by the simultaneous solution of

$$\begin{cases} \Delta x \tan \varphi = \pm h, \\ k_x = k \cos \varphi, \end{cases} \quad (2.8)$$

with  $h$  the unknown height of the 2D waveguide when the straight ray trajectory leaves the unknown initial plane  $x_0$  at the upper interface and  $\varphi$  the incident angle, corresponding to the direct ray. It is easy to find  $\Delta x$  and  $h$  in fixing a value of the wave number parallel to the wall  $k_x = k \cos \varphi$ . The direct ray skeletal line given by the PWVD which corresponds to the chosen  $k_x$ , gives the position  $x = s$  according to the Birkhoff map. Then the couple of equations given by Eq. (2.8) can furnish the value of  $h$ . Different works in inverse radiation problems could be investigated with the help of those tools.

## 2.4 Sudden area expansion problem

The general duct system to be analyzed in this section consists in two semi-infinite pipes (numbered with indexes  $q = 1, 2$ ) of heights  $h_1$  and  $h_2$  respectively, which are joined together at  $x = 0$  (Fig. 2.7 (a)). Note that rigid duct wall boundary conditions have been assumed. An incident mode, which can be expressed as two interfering plane waves, propagates from left to right towards the expansion, where it is partly reflected and partly transmitted into the larger channel. The method to calculate the behavior of an incident mode as it propagates past a single discontinuity has been outlined previously and is



briefly discussed here. The acoustic pressure, which is the homogeneous problem (without sources) inside a sudden area expansion, can be expressed using infinite series,

$$p(\mathbf{r}) = \sum_n \psi_n(y) P_n(x), \quad (2.9)$$

where  $\psi_n$  are the eigenfunctions and have expression as

$$\psi_{qn}(y) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{n0}}{h_q}} \cos\left(\frac{n\pi}{h_q} y\right) \quad \text{with } q = 1, 2. \quad (2.10)$$

They are the classical transverse modes in a straight duct.

$$p_1(\mathbf{r}) = p^{(i)}(\mathbf{r}) + p^{(r)}(\mathbf{r}), \quad (2.11)$$

represents the acoustic field in the smaller channel. The incident and the reflected pressure field are respectively denoted by  $p^{(i)}$  and  $p^{(r)}$ .

$$p_2(\mathbf{r}) = p^{(t)}(\mathbf{r}), \quad (2.12)$$

is the transmitted pressure field in the larger channel. Boundary conditions at  $x = 0$ , for pressure and volume velocity, leads to expressions as

$$p_1(\mathbf{r}) = p_2(\mathbf{r}), \quad \text{with } x = 0 \text{ and } \forall y \in [0, h_1], \quad (2.13)$$

and

$$\begin{cases} a \partial_x p_1(\mathbf{r}) = \partial_x p_2(\mathbf{r}), & \text{with } x = 0 \text{ and } \forall y \in [0, h_1], \\ \partial_x p_2(\mathbf{r}) = 0, & \text{with } x = 0 \text{ and } \forall y \in ]h_1, h_2], \end{cases} \quad (2.14)$$

where  $a = \frac{h_1}{h_2}$ . The reflection and transmission coefficients are calculated by the modal decomposition approach [23] and are given, in Appendix A. The problem is investigated by local phase space analysis in different areas of such a waveguide.

### 2.4.1 Phase space of four variables

Consider the channel system illustrated in Fig. 2.7. Two semi-infinite channels, of height  $h_1 = 35.33\lambda$  and  $h_2 = 49.62\lambda$  with  $\lambda$  the wavelength of the frequency regime, join together at  $x = 0$ . In this case, we consider frequencies that allow 70 and 100 propagating modes respectively for the smaller and the larger channels. The present example illustrates the behavior of an incoming mode with index  $n = 19$ . After truncating a sufficient number of modes ( $N = 150$ ), the reflected and transmitted pressure fields are obtained with the modal decomposition method. We can then obtain a distribution of outgoing modes for each incoming mode. Fig. 2.7 (a) shows the spatial behavior of the acoustic pressure field in such a waveguide for the incoming mode 19. We can distinguish different areas in the larger channel, when a local analysis may be carried out. Local spectrum are estimated by HD at points (A1), (A2), (A3), (A4), (A5) and (A6). The widths of the spatial window  $w(\mathbf{r})$  are  $W_x = W_y = 8\lambda$ . The first point (A1) shows the contribution of incoming mode number 19.

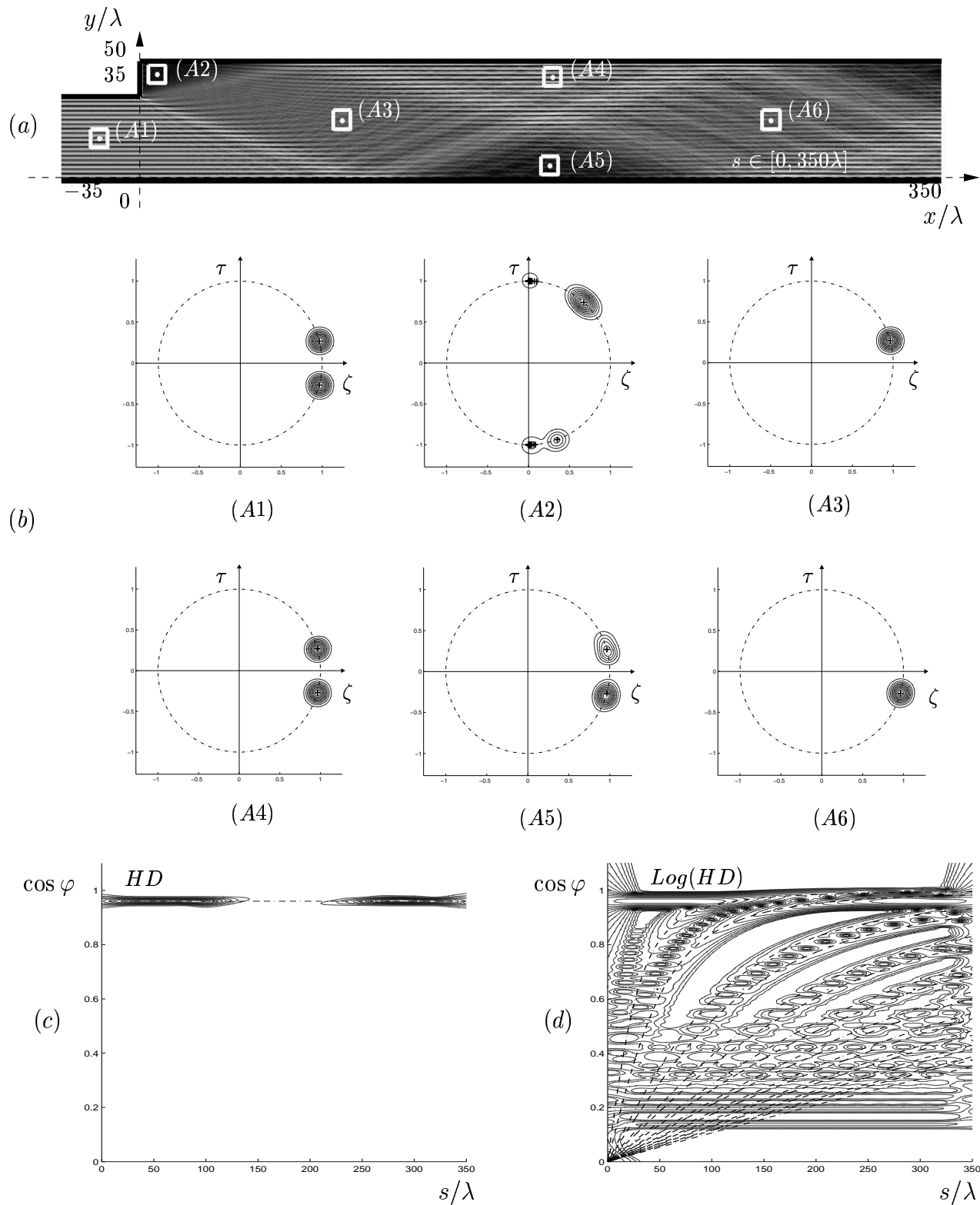


FIG. 2.7 – (a) : Amplitude of the pressure field in a sudden area expansion with an incoming mode (from the left) number 19. Different points are plotted where local spectrum are realized. (b) : Phase space analysis with the help of the HD for points (A1) $=(-18\lambda, -18\lambda)$ , (A2) $=(8\lambda, 44\lambda)$ , (A3) $=(88\lambda, 25\lambda)$ , (A4) $=(180\lambda, 43\lambda)$ , (A5) $=(179\lambda, 6\lambda)$  and (A6) $=(276\lambda, 25\lambda)$ . (c) and (d) the HD and the  $\text{Log}(HD)$  with Birkhoff variables respectively. Skeletal lines are represented by dashed line.

This incoming mode is uniformly distributed as two plane waves in opposite directions which are translated in the local spectrum by two maxima on the right-hand side of the radiation circle (i.e.,  $\zeta > 0$ , corresponding to propagation from left to right). This figure confirms that incoming mode number 19 is practically not reflected because no island is presented in the left side of the radiation circle. Points labelled (A3), (A4) and (A6) show the predominance of outgoing mode number 27 in the larger channel, which is the predominantly transmitted outgoing mode. First, local spectrum (A3) illustrates, as for (A1), the contribution of mode number 27 on the radiation circle. This is furthermore proved by the location of skeletal points of mode 27 represented by crosses, which are in accordance with positions of islands of mode number 27. Moreover, interesting features are local spectra (A3) and (A6), which illustrate respectively upward and downward mode components. Then for the shadow area, (A2) clearly presents diffracted waves created by the corner at position  $(0, h_1)$ . Such diffractive points can be considered as new wave sources whose strength is proportional with the strength of the incident wave. Skeletal points are in accordance with islands given by the HD. They describe geometric rays emanating from the corner which reach the analysis point (A2) and represent, respectively, the direct and reflected ray families as seen before. Lastly, for the point (A5), any definite conclusion may be given at least. Birkhoff analysis, as presented in next section, gives more information about area around this point, in order to know if it corresponds to a mode behavior or to a geometrical behavior.

### 2.4.2 Birkhoff analysis

In order to describe the behavior of the wave field around the point (A5),  $s$  is arbitrarily chosen along the lower interface, such that  $y = 0$  and  $x$  varies from 0 to  $350\lambda$ . Fig. 2.7 (c) shows the result of Birkhoff analysis according to the HD. First of all, two islands located at the beginning and the end of segment  $s$ , illustrate the contribution of transmitted mode number 27. Note that a skeletal horizontal line representing the longitudinal wavenumber component of mode number 27, is in accordance with position of these two islands. Between both islands, a shadow area in the Birkhoff map seems to prove that around the point (A5) the behavior of the wave field is not a mode one. The stellar representation [24] is displayed in Fig. 2.7 (d). This simple representation consists in plotting the HD with a logarithmic (instead of linear) scale. Both representations (HD and  $\text{Log}(\text{HD})$ ) provide complementary viewpoints. The last one encodes the fully wave function and shows the contribution of diffracted waves created by the corner at position  $(0, h_1)$ , in addition to the predominance of mode number 27. Skeletal lines describe geometric rays emanating from that point and represent the direct and reflected ray families as seen in §2.3.2.2. In conclusion, the shadow area around the point (A5) is generated by diffracted waves from the corner of the sudden area chamber, and such an interpretation is provided by the help of the stellar representation.

## 2.5 Open billiard problem

In this section we analyse the behavior of a wave field in a waveguide composed by a resonator, coupled to two ducts [25] as shown in Fig. 2.8 (a). The resonator we consider here, has the shape of half

an annular billiard [26]. It consists of a small disk of radius  $R2$  located inside a larger disk of radius  $R1$  with a displacement  $\delta$  of the disk centers. In order to numerically solve the wave problem by using a finite elements method, incoming and outgoing wave functions at the entrance of the two ducts, say left (L) and right (R) ducts, are given by

$$p_L(x, y) = e^{jky} + R e^{-jky}, \quad (2.15)$$

and

$$p_R(x, y) = T e^{-jky}, \quad (2.16)$$

where the notations  $R$  and  $T$  correspond respectively to the reflection and transmitted coefficients, and where  $k$  is the wavenumber of the propagating planewave in  $y$  direction. Neumann boundary conditions are furthermore required on the walls.

### 2.5.1 Numerical results

The left and right ducts of the billiard of Fig. 2.8 (a) have identical width  $h_L = h_R = 6.05\lambda$  with  $\lambda$  the wavelength of the frequency regime. The upper part of the waveguide is made up of the larger disk with radius  $R1 = 18.14\lambda$  and the small disk with radius  $R2 = 3.02\lambda$ . The displacement of the disk centers is about  $\delta = 9.07\lambda$ . We consider frequency that allow 13 propagating modes in the left and right ducts. With the help of the finite element method, the acoustic pressure field in spatial domain is obtained and shown in Fig. 2.8 (a). Local spectra are then estimated by HD at points  $B1$  and  $B2$  with spatial window of widths  $W_x = W_y = 6\lambda$ . In the same time, we choose two Birkhoff analyses along curvilinear coordinates  $s1$  and  $s2$  as shown in Fig. 2.8 (a). The first Birkhoff analysis along  $s1$  is presented in Fig. 2.8 (c). Trajectories close to the convex boundary of the waveguide is defined as a Whispering Gallery (WG). These trajectories take up the major part of the Birkhoff map, as seen in Fig.2.8 (b). Two kinds of WG may be distinguished, with respectively order  $q = 2$  and  $q = 4$  corresponding to the number of rebonds on the  $s1$  segment. In order to supplement these results, we consider the ray tracing inside the same waveguide. Boundaries act as mirrors for rays in accordance with the laws of geometrical acoustics. We can see in inset of Fig.2.8 (b), ray tracing of WG of order 2 and 4, respectively noted  $WG2$  and  $WG4$ . In Fig. 2.8 (d), the second Birkhoff analysis give information in shadow area, where non-WG trajectories are trapped inside the cavity due to creeping and diffracted waves. Moreover the upper part of Fig. 2.8 (d) (i.e  $\cos \varphi > 0$ ) corresponds to the forward propagation while its lower part (i.e  $\cos \varphi < 0$ ) corresponds to the backward propagation. A predominant island on the upper left part of the Birkhoff map illustrates the presence of creeping waves labeled in Fig. 2.8 (b) by  $CW$ . Fig. 2.8 (b) shows ray tracing of that kind of creeping rays. Moreover, a backward creeping waves contribution is shown with a little part of diffracted waves from the corner placed at points  $(12.09\lambda, 0)$ , in the lower right part of Fig. 2.8 (d). Concerning local spectra in  $(B1)$  and  $(B2)$ , we confirm the presence of creeping waves in the shadow area represented by two large islands noted  $CW$  in Fig. 2.8 (e), and is confirmed by ray tracing of a pencil of creeping waves shown in inset of Fig. 2.8 (e). Lastly, small islands, noted  $DW$ , are located on the left part of radiation circle.

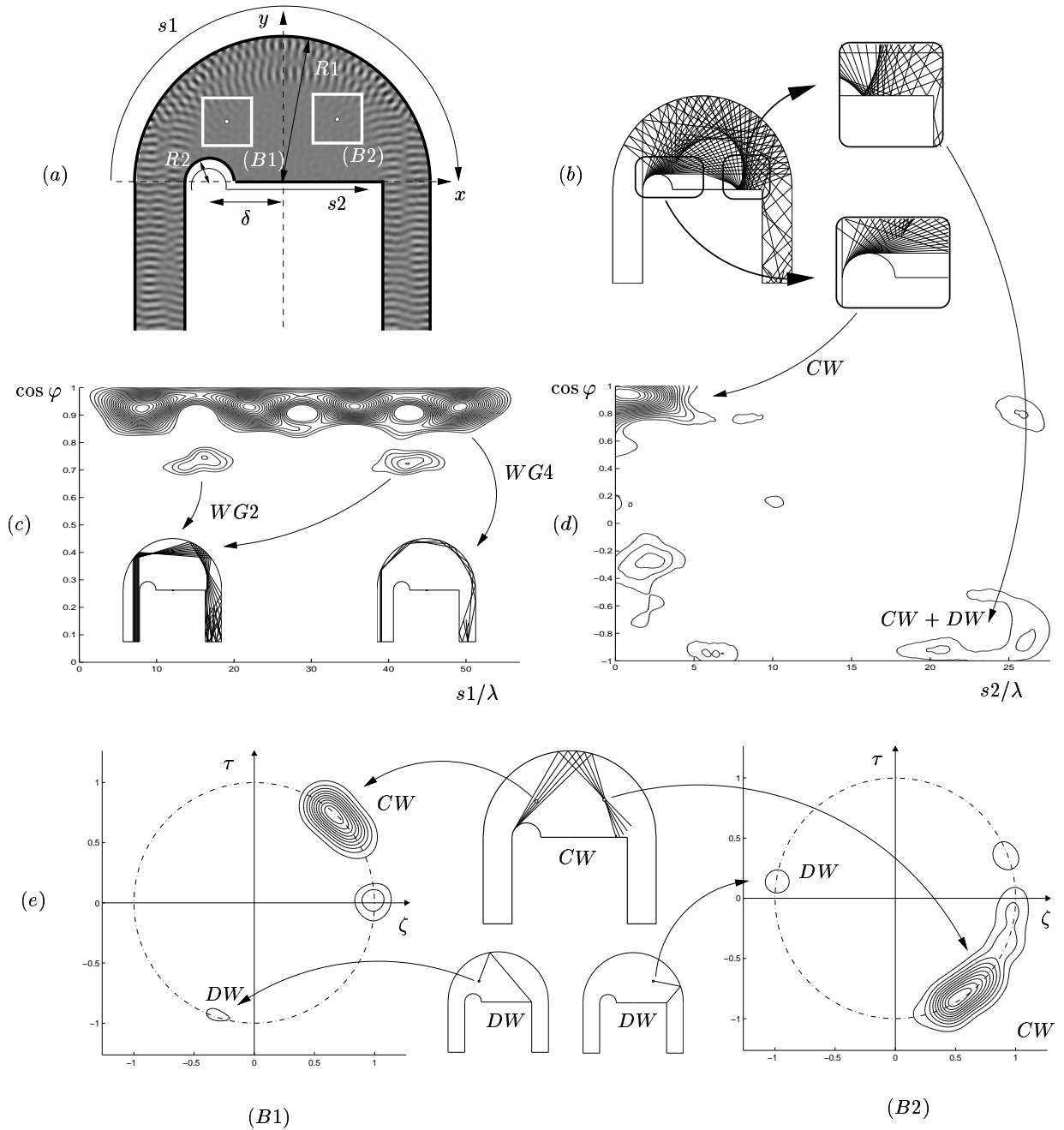


FIG. 2.8 – (a) : Amplitude of the pressure field in the space domain. (b) : Typical creeping rays. (c) : Birkhoff map with the HD along the curvilinear segment  $s_1$ . (d) : Birkhoff map with the HD along the curvilinear segment  $s_2$ . (e) Local spectrum with the HD for points  $(B1)=(-6.95\lambda, 7.56\lambda)$  and  $(B2)=(7.25\lambda, 7.86\lambda)$ .

They show the role of diffracted waves in the shadow area, leaving the diffractive point in the wedge of the waveguide at  $(12.09\lambda, 0)$  as shown in inset of Fig. 2.8 (e). Nevertheless, there is additional structure in the HD at point (B1) and (B2) which has no simple explanation.

## 2.6 Conclusion

In this paper, the importance of phase space to investigate wave phenomena has been presented with some applications in waveguide. Included are different phase space distributions as the HD, the PWVD, the MWVD and the SPWVD. Two kinds of phase space analysis are presented with the Birkhoff map and the four-variable phase space domain. Information about the structure of the propagating field can be gained by examining its phase space distribution. This distribution is centered around areas, in the Birkhoff map or in the local spectrum, that provide the local preferred radiation direction of the field. The localization properties have been schematized in terms of regions surrounding geometric radiation or diffracted radiation in the case of the sudden area expansion chamber or by creeping waves and whispering gallery behavior in the last section.

## Appendix A

In this appendix we give the expressions for the reflection and transmitted coefficient presented in §2.4. According to matricial terminology, Eq. (??) takes the form of  $p = {}^t\boldsymbol{\psi}\mathbf{P}$  where  $\mathbf{P} = (P_n)_{n \geq 0}$  and  $\boldsymbol{\psi} = (\psi_n)_{n \geq 0}$  are column vectors with scalar coefficients  $P_n$  and  $\psi_n$  respectively. The modal decomposition [23] transforms Eqs. (2.13) and (2.14), with the help of Eqs. (2.11) and (2.12), and can be expressed on  $x = 0$  and  $\forall y \in [0, h_1]$  as,

$$\begin{cases} F\mathbf{P}^{(t)} - \mathbf{P}^{(r)} = \mathbf{P}^{(i)}, \\ K_2\mathbf{P}^{(t)} + a {}^tFK_1\mathbf{P}^{(r)} = a {}^tFK_1\mathbf{P}^{(i)}, \end{cases} \quad (A1)$$

where  $K_i$  and  $F$  are matrices given by

$$K_{imn} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\alpha_n^{(i)})^2}, & \text{for propagative mode} \\ -j\sqrt{(\alpha_n^{(i)})^2 - k^2}, & \text{for evanescent mode} \end{cases} \quad (A2)$$

where the associated eigenvalues are  $\alpha_n^{(i)} = \frac{n\pi}{h_i}$ , which obey to the eigenproblem  $\Delta_{\perp}\psi_n = -\alpha_n^2\psi_n$  with  $\psi_n$  eigenfunctions.

The matrix  $F$  is calculated via,

$$F_{mn} = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \psi_{1m}(y)\psi_{2n}(y)dy, \quad (A3)$$

and takes the form of

$$F_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{if } m = n = 0, \\ 0, & \text{if } n = 0 \text{ and } m > 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{\pi na} \sin(n\pi \frac{h_1}{h_2}), & \text{if } m = 0 \text{ and } n > 0, \\ \frac{1}{2\pi na} (-1)^m \sin(n\pi \frac{h_1}{h_2}), & \text{if } m = na, \\ \frac{2}{\pi na} (-1)^m \left( \frac{(na)^2}{(na)^2 - m^2} \right) \sin(n\pi \frac{h_1}{h_2}), & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (A4)$$

with  $a = \frac{h_1}{h_2}$ .

For an incident mode of order  $N$ , the pressure column vector is

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{(i)} = e^{j\sqrt{k^2 + (\frac{n\pi}{h_1})^2} x}, & \text{for } n = N, \\ \mathbf{P}^{(i)} = 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (A5)$$

With this condition, the resolution of system (A1) gives the expression of the reflected and transmitted column vector pressure field  $\mathbf{P}^{(r)} = R\mathbf{P}^{(i)}$  and  $\mathbf{P}^{(t)} = T\mathbf{P}^{(i)}$  with the reflection and transmitted coefficient matrices given by

$$\begin{cases} R = -({}^tFK_1)^{-1}(K_2 - a {}^tFK_1F)(K_2 + a {}^tFK_1F)^{-1} {}^tFK_1, \\ T = 2a(K_2 + a {}^tFK_1F)^{-1} {}^tFK_1. \end{cases} \quad (A6)$$





# Bibliographie

- [1] See the special issue. *J.Opt.Soc.Am*, **17**(12), 2274-2542 (2000).
- [2] M.J Bastiaans, "Signal description of a local frequency spectrum," *SPIE* **373**(2), 49 (1981).
- [3] S.W. McDonald, "Phase-space eikonal method for treating wave equations," *Physical Review Letters* **54**(12), 1211-1214 (1985).
- [4] H.U. Baranger, D.P. DiVincenzo, R.A. Jalabert & D. Stone, "Classical and quantum ballistic-transport anomalies in microjunctions," *Physical Review B* **44**(19), 10637-10675 (1991).
- [5] M.A. Alonso & G.W. Forbes, "Phase-space distributions for high-frequency fields," *J.Opt.Soc.Am* **17**(12), 2288-2300 (2000).
- [6] B.Z. Steinberg, E. Heyman & L.B. Felsen, "Phase space beam summation for time harmonic radiation from large apertures," *J.Opt.Soc.Am* **8**(1), 41-59 (1991).
- [7] B.Z. Steinberg & J.J. Mc Coy, "Marching acoustic fields in a phase space," *J.Acoust.Soc.Am* **93**(1), 188-204 (1993).
- [8] B.Z. Steinberg & R. Birman, "Phase space marching algorithm in the presence of a planar wave velocity discontinuity. A qualitative study," *J.Acoust.Soc.Am* **98**(1), 484-494 (1995).
- [9] P.B. Wilkinson, T.M. Fromhold, R.P. Taylor & A.P. Micolich, "Electromagnetic wave chaos in gradient refractive index optical cavities," *Physical Review Letters* **86**(24), 5466-5469 (2001).
- [10] P. Bellomo & T. Uzer, "Quantum scars and classical ghosts," *Phys. Rev. A* **51**(2), 1669-1672 (1995).
- [11] B. Crespi, G. Perez & S.-J. Chang, "Quantum Poincaré sections for two-dimensional billiards," *Phys. Rev. E* **47**(2), 986-991 (1993).
- [12] F. Hlawatsch & G.F. Boudreaux-Bartels, "Linear and quadratic time-frequency signal representations," *IEEE Sig. Proc. Magazine*, 21-67 (1992).
- [13] L. Cohen, "Time Frequency Analysis," Prentice Hall PTR (1995).
- [14] K. Husimi, "Some formal properties of the density matrix," *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.* **22**, 264 (1940).
- [15] E. Wigner, "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium," *Phys. Rev.* **40**, 749-759 (1932).

- 
- [16] S. Stanković, L. Stanković & Z. Uskoković, "On the local frequency group shift and cross terms in some multidimensional time-frequency analysis," *IEEE Transactions on Signal Processing* **43**(7), 1719-1724 (1995).
- [17] K.M. Guthrie & C.T. Tindle, "Ray effects in the normal mode approach to underwater acoustics," *J. Sound Vib.* **47**(3), 292-295 (1976).
- [18] A. Kamel & L.B. Felsen, "On the ray equivalent of a group of modes," *J. Acoust. Soc. Am.* **71**(6), 1445-1452 (1982).
- [19] A. Kamel & L.B. Felsen, "Hybrid ray-mode formulation of parallel plane waveguide Green's functions," *Transactions on Antennas and Propagation* **AP-29**(4), 637-649 (1981).
- [20] P. Morse & K. Ingard, "Theoretical acoustics," Princeton University Press (1986).
- [21] I.T. Lu & L.B. Felsen, "Observables due to beam-to-mode conversion of a high-frequency Gaussian P-wave input in a aluminum plate vacuum," *J. Acoust. Soc. Am.* **87**(1), 42-53 (1990).
- [22] D. Dragoman, "The origin of negative values of the Wigner distribution function," *Optik* **111**(4), 179-183 (2000).
- [23] V. Pagneux, N. Amir & J. Kergomard, "A study of wave propagation in varying cross section waveguides by modal decomposition," *J. Acoust. Soc. Am.* **100**, 2034-2048 (1996).
- [24] J.M. Tualle & A. Voros, "Normal modes of billiards portrayed in the stellar (or nodal) representation," *Chaos, Solitons and Fractals* **5**(7), 1085-1102 (1995).
- [25] R.G. Nazmitdinov, K.N. Pichugin, I. Rotter & P. Šeba, "Whispering gallery modes in open quantum billiards," *Phys. Rev. E* **64**, 056214 (2001).
- [26] S.D. Frischat & E. Doron, "Dynamical tunneling in mixed systems," *Phys. Rev. E* **57**(2), 1421-1443 (1998).

## Chapitre 3

# Méthode de réallocation pour l'étude de billards

### 3.1 Introduction

Le problème fondamental de la limite de la théorie ondulatoire vers la limite asymptotique géométrique ( $k \rightarrow \infty$ ) suscite depuis de nombreuses années un intérêt croissant [1, 2]. Le régime dans lequel ces deux théories se recouvrent permet à comparer les dynamiques ondes et rayons. Il en va ainsi en mécanique quantique (équation de Helmholtz en régime stationnaire) pour le régime semi-classique, où les dynamiques quantiques et classiques sont confrontées. Lorsque les nombres quantiques sont de l'ordre de plusieurs dizaines, il est alors possible d'observer des particules qui sont presque sur des trajectoires classiques [3, 4].

Le chaos quantique désigne pour sa part, l'étude de systèmes ondulatoires (quantiques) dont le comportement rayon (classique) est chaotique. L'étude des billards quantiques bidimensionnels est une thématique de recherche se développant ces dernières années, qui ne s'arrête pas au domaine de la mécanique quantique. Des études similaires ont en effet été réalisées en optique [5, 6], en vibrations [7, 8], ainsi qu'en acoustique avec, à la différence des domaines précédents, des conditions de frontière de Neumann [9].

Des travaux ont permis d'identifier la nature chaotique ou intégrable<sup>1</sup> de tels systèmes [3, 10, 11, 12]. Pour nombre de billards quantiques, tels le stade, le billard de Sinaï, le billard circulaire tronqué (Fig 3.1), c'est la présence conjointe de parois courbes et droites qui est responsable de l'apparition d'une dynamique rayon chaotique. Ceci est mis en évidence par la carte de Birkhoff [13], ou section de Poincaré [14], qui consiste à n'observer que les positions et les angles des rebonds successifs du rayon sur les bords du billard. Une cartographie du degré de chaoticité du billard peut être ainsi réalisée. D'un point de vue ondulatoire, ou quantique, la présence de chaos quantique est soulignée par l'étude statistique de distance entre valeurs propres voisines du problème de Helmholtz, et porte le nom de "Level Spacing Distribution" (LSD) [15].

---

<sup>1</sup>En référence à l'hamiltonien du problème.

Par la suite, de nouveaux travaux ont permis de comparer les fonctions propres aux densités rayons (classiques), ce en les représentant par des fonctions dans l'espace des phases, afin de mesurer leur concentration dans cet espace. Deux types de distributions dites "semi-classique" [16] sont communément utilisés, à savoir la distribution de Wigner-Ville (DWV) et la distribution de Husimi (DH) (cf. section 2.2) [17, 18, 19, 20, 21]. La DH est par ailleurs beaucoup plus utilisée que la DWV pour une meilleure lisibilité de la carte de Birkhoff [17, 19, 20]. De nombreux calculs numériques semblent indiquer dans certains cas la présence de fortes concentrations de la densité semi-classique le long d'orbites classiques qui sont isolées et instables [22]. Ce phénomène, découvert dans le cas du stade de Bunimovich [23], porte le nom de cicatrice. Les cicatrices introduisent un lien direct entre fonctions propres et orbites périodiques classiques, entre ondes et rayons.

Dans ce chapitre, la présence de cicatrices (sans chercher à les expliquer en régime semi-rayon) est abordée, en particulier au travers de la représentation de Husimi. Cette approche est validée à l'aide du billard carré et du billard annulaire pour l'étude des orbites stables, et du stade de Bunimovich pour l'étude des orbites instables. L'originalité de ce chapitre porte sur l'utilisation de la méthode de réallocation, qui est une méthode améliorant les qualités de localisation de la distribution de Husimi. Initialement présentée en 1974 [24], cette méthode a été reformulée il y a une dizaine d'années afin d'en montrer sa pertinence et son efficacité [25, 26, 27]. Son apport dans le contexte de l'étude de billards est discuté tout au long de ce chapitre.

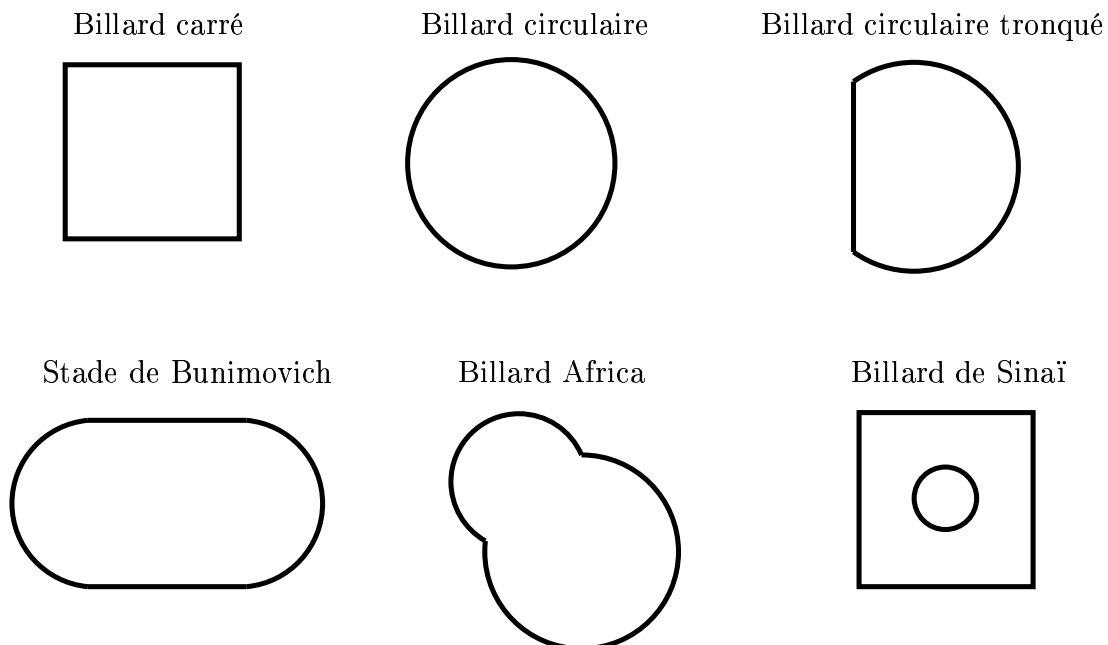


FIG. 3.1 – Exemples de billards quantiques fermés.

## 3.2 Rappel sur la dynamique des billards

Les méthodes permettant de souligner un comportement régulier ou chaotique d'un billard sont respectivement, selon un point de vue ondulatoire ou rayon, la LSD (Level Spacing Distribution) et la carte de Birkhoff. Une présentation succincte de ces dernières permet de se familiariser avec la dynamique de tels systèmes.

### 3.2.1 Level Spacing Distribution (LSD)

Du point de vue de la théorie ondulatoire, la LSD est l'outil le plus utilisé afin de détecter de possibles signatures chaotiques des billards. Pour comprendre l'impact du chaos quantique dans l'étude des billards, il est important d'observer les solutions d'un problème aux valeurs propres pour un système fermé. Le problème de Helmholtz prend la forme

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 0, & \forall \mathbf{r} \in \mathcal{D}, \\ \partial_n \psi = 0, & \forall \mathbf{r} \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\mathcal{D}$  représente le domaine intérieur du billard,  $\mathcal{S}$  sa frontière,  $k = \frac{\omega}{c_0}$  et  $\partial_n$  la dérivée normale par rapport à la paroi. En milieu infini, les spectres, c'est-à-dire les valeurs de  $k$ , sont continus. Pour un milieu clos, les conditions limites  $\partial_n \psi = 0$  sur les parois réfléchissantes du guide imposent des valeurs discrètes de  $k$ . Ainsi, pour un régime harmonique donné, il est possible de se poser la question : quelle est la distribution, en termes de pulsation spatiale propre, des distances entre deux valeurs propres voisines ? Il est présumé que cette distribution est différente pour un système intégrable ou chaotique [23, 28]. Pour une dynamique des rayons dite régulière, la LSD correspondante est décrite par une distribution de Poisson

$$P(S) = e^{-S}, \quad (3.2)$$

alors que pour un régime des rayons chaotiques, la distribution est celle de Wigner

$$P(S) = \frac{\pi}{2} S e^{-\frac{\pi}{4} S^2}. \quad (3.3)$$

La variable de séparation  $S$  entre valeurs propres se discrétise sous la forme

$$S_m = \frac{(k_{m+1} - k_m)}{\mu}, \quad (3.4)$$

avec

$$\mu = \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} (k_{m+1} - k_m), \quad (3.5)$$

un facteur de normalisation. L'allure de ces deux distributions est donnée en Fig. 3.2. Le régime chaotique se traduit par un niveau de répulsion, indiqué en Fig. 3.2 pour  $S \simeq 0$ , signifiant une absence de valeurs propres proches les unes des autres, contrairement au cas régulier où bon nombre de dégénérescences de modes ont lieu.

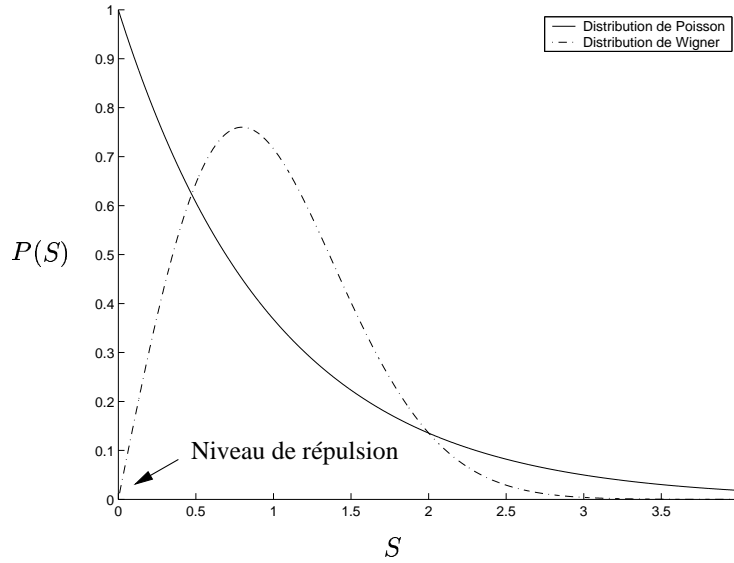


FIG. 3.2 – Distributions de Poisson et de Wigner.

### 3.2.2 La carte de Birkhoff

Le fluide au sein duquel évolue le mouvement acoustique est supposé homogène et initialement au repos. La célérité adiabatique  $c_0$  et la masse volumique de l'air  $\rho_0$  sont indépendantes du milieu de propagation. La vitesse de propagation le long de la trajectoire du rayon est constante et prend la forme,  $\mathbf{c}_r = c_0 \frac{\mathbf{k}}{k}$ , où  $\frac{\mathbf{k}}{k}$  est le vecteur d'onde unitaire perpendiculaire aux courbes isophases. Le rayon ainsi défini est caractérisé par une ligne droite et subit en paroi des réflexions spéculaires. Ainsi, en appelant  $s$  l'abscisse curviligne le long du bord du billard, et  $\sin \theta$  la coordonnée donnant l'angle de choc par rapport à la normale<sup>2</sup>, l'application résultante capture le caractère non trivial du mouvement et se visualise sur la carte de Birkhoff [13] ou section de Poincaré [14]. Pour un système chaotique, la carte de Birkhoff est composée de trajectoires qui couvrent de façon dense tout l'espace des phases, parfois nommé "mer chaotique" [6]. Pour un système intégrable, il y a invariance dans la composante en  $\sin \theta$  qui se traduit sur la carte de Birkhoff par des segments de droites horizontaux. La Fig. 3.3 illustre ces propos pour un billard carré et pour un stade de Bunimovich. Ce dernier est constitué de deux demi-cercles de rayon unitaire, séparé par une portion droite de longueur  $\epsilon$ . Lorsque  $\epsilon = 0$  (billard circulaire), les trajectoires de rayons sont régulières. Dès que  $\epsilon$  est non nul, les trajectoires sont chaotiques. Les conditions initiales, spatiales et angulaires, du tir du rayon sont indiquées par la présence d'un triangle noir sur le pourtour des billards, avec  $\phi$  l'angle de tir par rapport à la normale en paroi. L'abscisse curviligne  $s$  prend naissance à une extrémité gauche du billard comme indiqué en Fig. 3.3 et suit le sens inverse des aiguilles d'une montre.

<sup>2</sup> $(s, \sin \theta)$  sont les coordonnées de Birkhoff [3, 14].

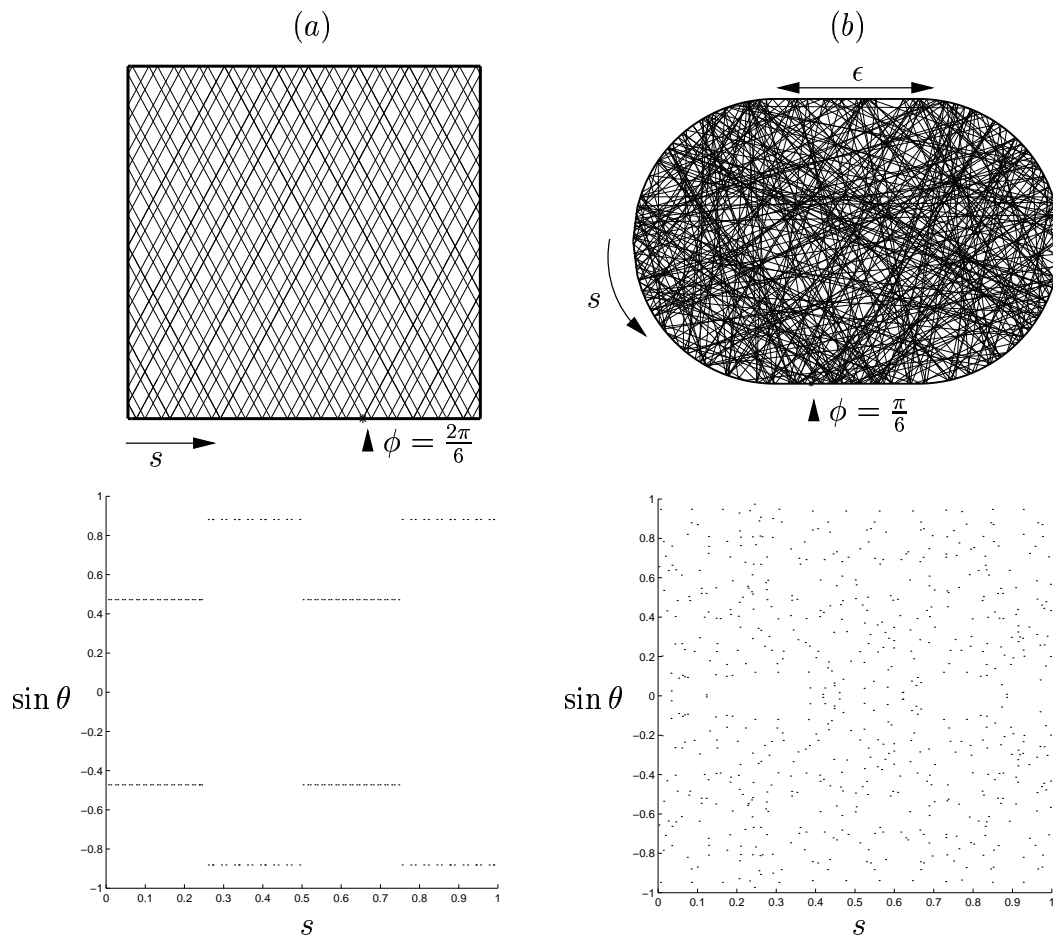


FIG. 3.3 – Dynamique d’un rayon au sein de billards intégrables et chaotiques, avec leur carte de Birkhoff correspondante. (a) Billard carré. (b) Stade de Bunimovich.

### 3.3 Etude de billards 2D

L’approche semi-rayon ( $k \rightarrow \infty$ ) en physique ondulatoire établit un lien entre l’approche rayon et les phénomènes d’interférences ondulatoires. Trois billards à dynamique régulière, mixte et chaotique sont étudiés ici.

#### 3.3.1 Le billard carré

Une orbite périodique dans un billard carré est quantifiée par un couple de nombres entiers, à savoir  $\gamma = (m_1, m_2)$ , avec  $m_1$  et  $m_2$  correspondant respectivement aux nombres d’impacts de l’orbite sur la frontière horizontale et verticale du billard carré [29], comme présenté en Fig. 3.4. Inspirée par les travaux de Chen [30], la suite du chapitre n’aborde que l’orbite de couple  $(1, 1)$ , impliquant une réflexion sur chaque segment du billard carré.

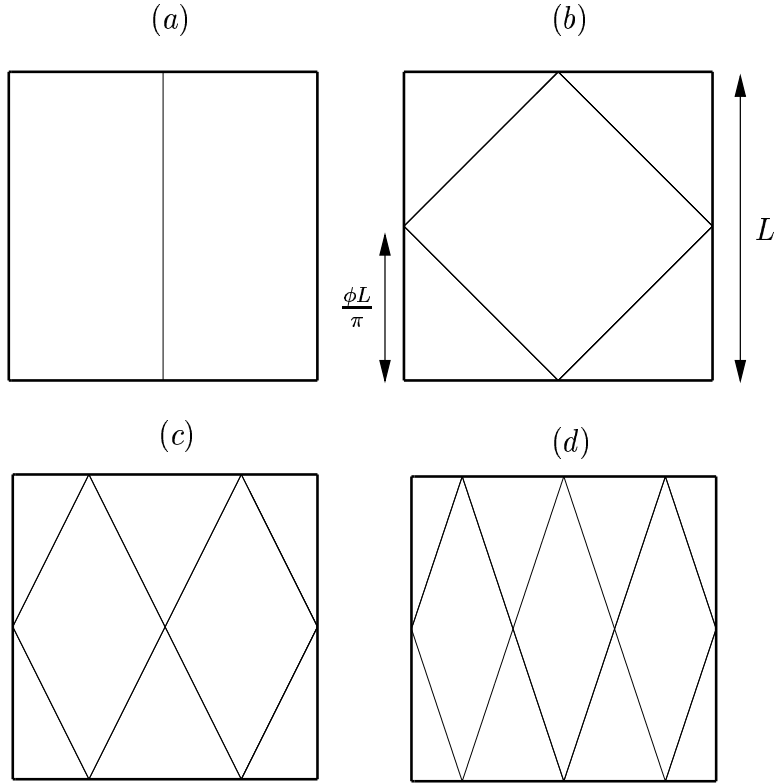


FIG. 3.4 – Orbite périodique primitive du billard carré, labélisée par un couple d'entiers  $\gamma = (m_1, m_2)$ , correspondant respectivement aux nombres d'impacts de l'orbite sur la frontière horizontale et verticale du billard carré. (a) : (1,0), (b) : (1,1), (c) : (2,1), et (d) : (3,1).

Cependant, il est important de noter que chaque fonction propre du problème de Helmholtz définie par le couple d'Eq. (3.1) ne présente pas d'évolution de la fonction d'onde au voisinage des orbites présentées en Fig. 3.4, et ce même pour des nombres quantiques tendant vers l'infini. Ainsi, afin de pouvoir obtenir par interférence constructive une fonction d'onde dont l'énergie se concentre sur la trajectoire d'une orbite périodique, il suffit à quelques modifications près, de réaliser une superposition d'états propres résonants dits "pseudo-dégénérés" [30]. En effet, la solution du problème de Helmholtz pour un billard carré, d'arête  $L$ , en condition limite de Neumann en parois, s'écrit :

$$\psi_{mn}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2 - \delta_{m0}}{L}} \sqrt{\frac{2 - \delta_{n0}}{L}} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right), \quad (3.6)$$

où  $m$  et  $n$  sont les indices quantiques du développement modal,  $k_m = \frac{m\pi}{L}$  et  $k_n = \frac{n\pi}{L}$  les nombres d'onde quantiques transversaux et horizontaux, et  $\delta_{m0}$  et  $\delta_{n0}$  des symboles de Kronecker. Une superposition de modes résonants permet de construire analytiquement une fonction d'onde en relation avec l'orbite périodique de couple (1, 1). Elle traduit une somme partielle du développement modal donné par l'Eq.



(3.6) et prend la forme [30]

$$\Psi_{N,M}(\mathbf{r}) = \left(\frac{2}{L}\right) \sum_{K=q}^{N-q} e^{-\frac{(\kappa - (\frac{N}{2}))^2}{2\sigma^2}} e^{iK\phi} \cos\left(\frac{(N-K+1)\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{(K+1)\pi}{L}y\right), \quad (3.7)$$

où  $N$  et  $q$  sont des constantes entières,  $M = N - 2q + 1$  un indice représentant le nombre d'états propres considérés dans la fonction d'onde,  $\phi$  un paramètre d'orientation de l'orbite périodique (1, 1) comme présenté en Fig. 3.4 (b). L'expression  $e^{-\frac{(\kappa - (\frac{N}{2}))^2}{2\sigma^2}}$  traduit une pondération gaussienne appliquée au groupe modal.

### 3.3.2 Le billard annulaire

Le billard annulaire a été proposé par Bohigas [31]. C'est un billard quantique sur une surface comprise entre deux cercles non-concentriques, de rayons respectifs  $R$  et  $a < R$ . Ces derniers sont centrés dans un repère cartésien aux points  $O = (0, 0)$  et  $O' = (\delta, 0)$  comme le montre la Fig. 3.5.

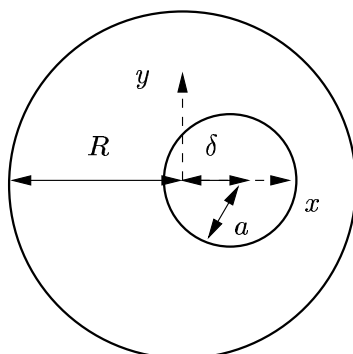


FIG. 3.5 – Géométrie du billard annulaire.

Le cas considéré par la suite est soumis aux contraintes  $\delta < a$  et  $R = 1$ . Afin de se familiariser avec la dynamique des rayons, sa carte de Birkhoff est proposée en Fig. 3.6 pour les paramètres  $a = 0.5$  et  $\delta = 0.2$ . Cette cartographie du régime dynamique des rayons présente plusieurs zones de régimes, à savoir deux plages [32], une mer chaotique [6] et un chapelet d'îles stables [32]. Lorsque  $|\sin \theta| > a + \delta$ , les rayons n'interagissent pas avec le cercle intérieur. La trajectoire des rayons tend à épouser la paroi extérieure concave du billard annulaire, pouvant être assimilé dans ces conditions à un billard circulaire. Ce phénomène, nommé "Whispering Gallery" (WG) ou en français "galerie à échos" (GE), se traduit sur la carte de Birkhoff par des droites horizontales (dans le cadre de GE d'ordre élevé) qui symbolisent l'invariance en  $\sin \theta$ . En contre-partie, lorsque  $|\sin \theta| < a + \delta$ , les rayons entrent en interaction avec le cercle intérieur et génèrent une mer chaotique et un chapelet d'îles stables.

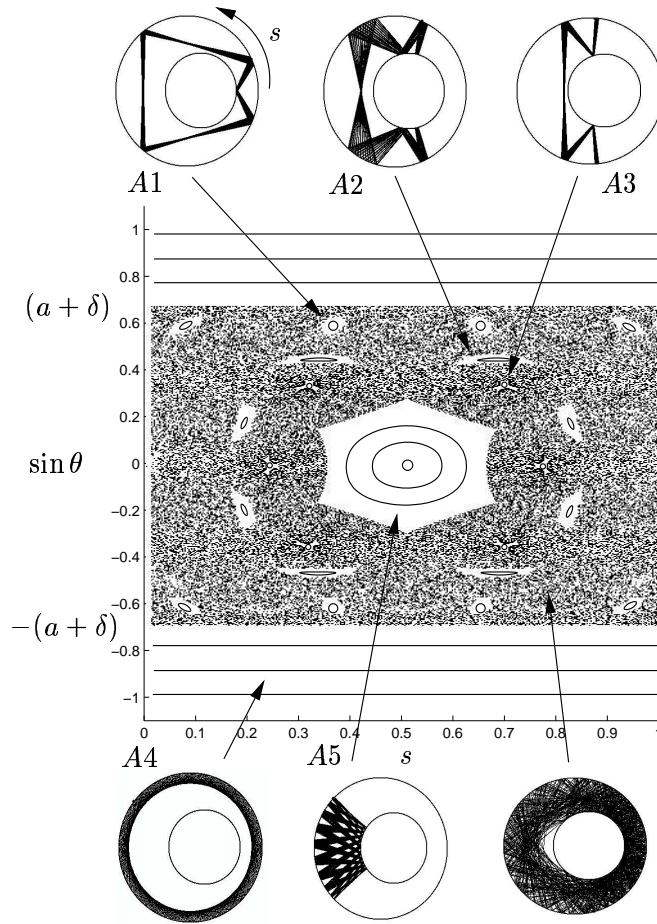


FIG. 3.6 – Carte de Birkhoff pour un billard annulaire de paramètres  $a = 0.5$  et  $\delta = 0.2$ . Les orbites stables portent les notations de  $A1$  à  $A5$ .

Il existe pour ce billard une orbite périodique instable, ayant pour variable de Birkhoff  $(s, \sin \theta) = (0, 0)$ , en prenant comme point de départ de la variable  $s$ , l'extrémité droite du billard annulaire, ce dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Cette diversité de régimes dynamiques au sein du billard annulaire permet de qualifier ce dernier de billard mixte.

### 3.3.3 Le stade de Bunimovich

Les frontières d'un stade de Bunimovich sont délimitées par deux demi-cercles de rayon unitaire et séparées par une portion droite de longueur  $\epsilon$ . Le stade ainsi défini possède un périmètre  $\ell = (2\pi + 2\epsilon)$  et une aire  $\mathcal{S} = (\pi + 4\epsilon)$ . Les conditions en frontière sont celles de Neumann. Nombre de travaux sur l'obtention des fonctions propres d'un tel billard ont donné lieu à de fructueux résultats en particulier selon la méthode de décomposition en ondes planes [33], par éléments finis [34] ou bien par éléments de frontières [36, 35]. A l'image de la première méthode, les fonctions propres d'un tel billard se comportent localement comme une superposition d'ondes planes, dont les vecteurs d'onde ont même

module, mais dont l'orientation est aléatoire [37]. Les résultats présentés dans ce chapitre sont issus d'une résolution du problème de Helmholtz donné en Eq. (3.1) par un calcul numérique utilisant la méthode par éléments finis. En outre, des travaux récents ont permis d'observer le renforcement de fonctions d'onde le long d'orbites périodiques isolées et instables. Selon la terminologie utilisée [23, 38], la fonction propre est alors soulignée par une "cicatrice". Des exemples de cicatrices, selon l'approche asymptotique d'un rayon, sont présentés en Fig. 3.7.

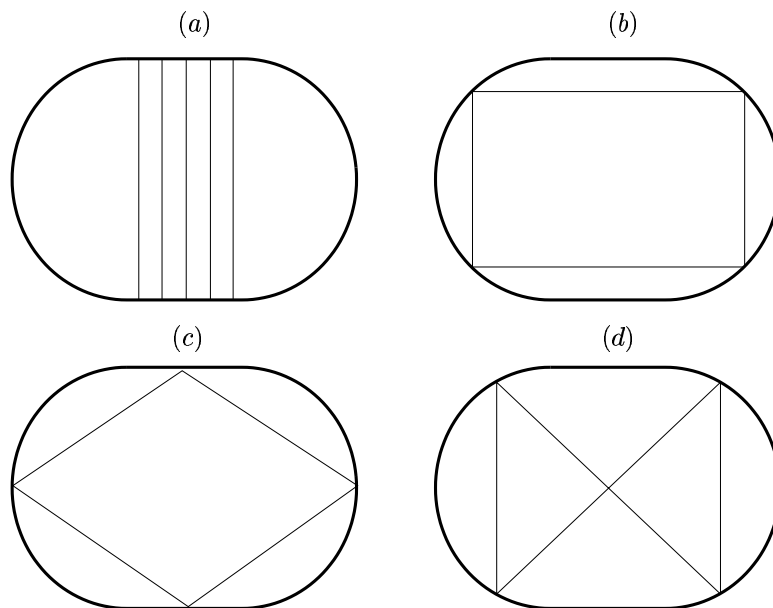


FIG. 3.7 – Exemples de cicatrices dans un stade de Bunimovich. Il est à noter que dans certain cas, plus d'une orbite est présente et que toutes obéissent aux lois de réflexions spéculaires. (a) : mode "balle rebondissante", (b) : mode "rectangle", (c) : mode "diamant", (d) : mode "papillon".

Dans le cas des applications ondulatoires étudiées par la suite, nous tenterons de définir quantitativement la présence d'une cicatrice, en particulier au niveau de la représentation de Husimi.

### 3.3.3.1 Invariance par translation

La structure géométrique du stade de Bunimovich permet une réduction des variables de Birkhoff  $(s, \sin \theta)$  en agissant sur l'invariance par la translation donnée par l'opérateur suivant

$$\mathcal{E} : (s, \sin \theta) \rightarrow (s - \frac{\ell}{2}, \sin \theta), \quad (3.8)$$

où  $\ell$  est le périmètre du stade. L'étude peut donc se réduire à la moitié du domaine qualifié sous le terme de demi-stade, comme présenté en Fig. 3.8. Ainsi, une trajectoire qui passe par le point  $(x, y) = (0, y_0)$  continue d'émerger par le point  $(0, -y_0)$  et de sens opposé. La carte de Birkhoff peut être ainsi réduite selon  $\{s, \sin \theta \mid 0 \leq s < \frac{\ell}{2}, -1 \leq \sin \theta \leq 1\}$ .

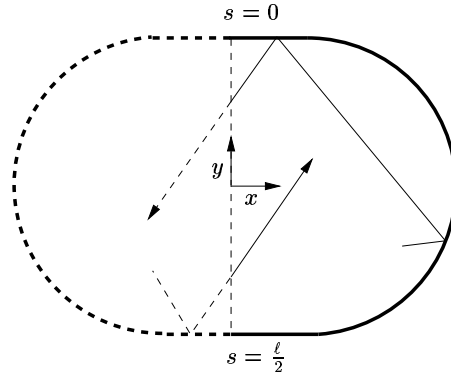


FIG. 3.8 – Trajectoire d'un rayon dans le demi-stade de Bunimovich.

### 3.3.3.2 Symétrie par renversement du temps

Une autre propriété importante est que le changement de signe du temps n'a aucune incidence sur l'évolution des équations qui gèrent l'évolution d'un rayon au sein du stade. Le système est ainsi conservatif et possède une dynamique réversible. Le stade de Bunimovich possède un opérateur de réversibilité et prend la forme

$$\mathcal{F} : (s, \sin \theta) \rightarrow \left(\frac{\ell}{2} - s, \sin \theta\right). \quad (3.9)$$

Il est commun, dans l'étude du stade, de réduire son domaine d'étude selon cette symétrie, pour obtenir un quart de stade. Ainsi, les orbites périodiques instables qui sont invariantes sous l'opérateur  $\mathcal{F}$  sont nommées des cicatrices symétriques. Quelques exemples sont donnés en Fig. 3.9.

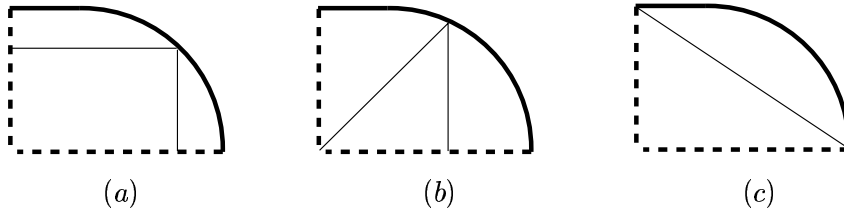


FIG. 3.9 – Exemples d'orbites périodiques instables au sein d'un quart de stade. (a) : mode "rectangle", (b) : mode "bow-tie", (d) : mode "diamond".

## 3.4 Densité de mesure semi-classique

Ce type de mesures a été introduit pour tenter de détecter des traces de dynamiques classiques au niveau quantique (et réciproquement rayon au niveau ondulatoire), c'est-à-dire sur les fonctions propres. Nous tâcherons de préciser de quelle manière la distribution de Husimi (DH) se rapproche de cette

limite rayon. La méthode de réallocation de la DH [25, 26] qui permet une meilleure localisation dans l'espace des phases, tout en préservant la conservation d'énergie d'une telle distribution est présentée dans ce paragraphe.

### 3.4.1 Méthode de réallocation

La méthode de réallocation a été introduite dans les années 70 [24]. Les idées apportées par la méthode de réallocation n'ont pas profité immédiatement de ce résultat fort, qui rassemble dans un même cadre théorique toutes les distributions d'énergie espace-nombre d'ondes bilinéaires. Ce n'est que récemment qu'une reformulation des idées de la réallocation a été réalisée [26], dans le cadre de cette théorie et a montré la pertinence de la méthode de réallocation en tant qu'outil complémentaire pour l'analyse de champs dans l'espace de phases. L'étude se focalise uniquement sur la réallocation de la DH.

#### 3.4.1.1 Réallocation de la distribution de Husimi

Afin de comprendre cette technique, le plus simple est de partir de la définition de la DH. Sous sa forme standard, celle-ci n'est autre que le module au carré d'une transformée de Fourier à court terme (TFCT), et s'écrit

$$\begin{aligned}\rho_{\psi}^H(s, k_s) &= |TFCT_{\psi}(s, k_s)|^2, \\ &= \left| \int \psi(s') w^*(s - s') e^{-jk_s \cdot s'} ds' \right|^2,\end{aligned}\quad (3.10)$$

avec  $(s, k_s)$  les variables de Birkhoff et  $w(s)$  la fenêtre d'analyse supposée gaussienne. La DH est, par sa structure, une distribution quadratique covariante pour les translations en espace et en nombre d'onde, et appartient à la classe de Cohen [39]. Elle peut donc s'exprimer en fonction de la DWV du champ à analyser  $\psi(s)$ , conduisant à une deuxième expression

$$\rho_{\psi}^H(s, k_s) = \int \int \rho_{\psi}^W(\eta, \xi) \rho_w^W(\eta - s, \xi - k_s) \frac{d\eta d\xi}{2\pi}, \quad (3.11)$$

avec  $\rho_{\psi}^W$  et  $\rho_w^W$  les distributions de Wigner-Ville respectives du champ à analyser  $\psi(s)$  et de la fenêtre d'analyse supposée gaussienne  $w(s)$ . Cette seconde expression met explicitement l'accent sur le fait que la DH résulte d'un double lissage de la DWV. Dans cette interprétation, le lissage sous-jacent au calcul de la DH présente l'avantage de réduire l'influence des termes interférentiels oscillants, susceptibles d'être présents dans la DWV. Le lissage présente par ailleurs l'inconvénient d'étaler dans le plan de Birkhoff les composantes éventuellement bien localisées. Une façon de concilier les avantages des deux représentations (faible niveau d'interférences de la DH et bonne localisation de la DWV) est alors de recourir au principe de réallocation. Son principe est de refocaliser la DH sur la répartition d'énergie du plan de Birkhoff donnée par la DWV. Cela consiste à déplacer ou réallouer les valeurs de la DH de leur point de calcul vers une nouvelle position, nommée centre local de gravité, obtenu de façon

efficace selon [26]

$$\hat{s}(s, k_s) = s + \Re \left\{ \frac{TFCT_\psi^{\mathcal{T}w}}{TFCT_\psi^{(w)}} \right\} (s, k_s), \quad (3.12)$$

et

$$\hat{k}_s(s, k_s) = k_s - \Im \left\{ \frac{TFCT_\psi^{\mathcal{D}w}}{TFCT_\psi^{(w)}} \right\} (s, k_s), \quad (3.13)$$

où les opérateurs  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{D}$  sont définis respectivement par  $(\mathcal{T}w)(s) = sw(s)$  et  $(\mathcal{D}w)(s) = \frac{dw}{ds}$ . Ainsi, la DH réallouée s'obtient en réagénçant les valeurs de cette dernière dans la carte de Birkhoff<sup>3</sup> selon

$$\hat{\rho}_\psi^H(s, k_s) = \int \int \rho_\psi^H(\eta, \xi) \delta \left( s - \hat{s}(\eta, \xi), k_s - \hat{k}_s(\eta, \xi) \right) \frac{d\eta d\xi}{2\pi}. \quad (3.14)$$

Conceptuellement, la réallocation peut se voir comme le séquençement de deux opérations : la première est un lissage, qui a pour effet de gommer les oscillations interférentielles, mais l'inconvénient de délocaliser les composantes utiles ; la seconde agit à la manière d'un post-traitement qui reconcentre les contributions (délocalisées) ayant survécu à la première opération.

### 3.4.2 Autres interprétations

#### 3.4.2.1 Relation avec la phase de la TFCT, interprétation en tant que nombre d'onde local et retard de groupe

Il importe cependant de noter que la réallocation de la DH se prête à une interprétation particulièrement intéressante. En effet, on peut montrer que les opérateurs de réallocation définis en Eq. (3.12) et Eq. (3.13) admettent, à l'aide de dérivées partielles de la phase de la TFCT, les formes équivalentes :

$$\hat{s}(s, k_s) = \frac{s}{2} - \frac{\partial}{\partial k_s} \arg \left\{ TFCT_\psi^{(w)}(s, k_s) \right\}, \quad (3.15)$$

et

$$\hat{k}_s(s, k_s) = \frac{k_s}{2} - \frac{\partial}{\partial s} \arg \left\{ TFCT_\psi^{(w)}(s, k_s) \right\}. \quad (3.16)$$

Ceci montre que les centres locaux de gravité vers lesquels les valeurs moyennées sont réallouées ne sont en fait rien d'autres que les retards de groupe et nombres d'onde locaux du champ "vu" au travers d'une fenêtre espace-nombre d'onde locale. Ainsi, les opérateurs de réallocation intègrent l'information de phase de la TFCT, dont on n'a pas tenu compte pour le calcul de la DH, puisque celle-ci n'agit que sur le module.

#### 3.4.2.2 Réallocation différentielle

La méthode de réallocation ne fait que déplacer chaque valeur de la DH d'une quantité finie, éventuellement grande, sans tenir compte des régions de la carte de Birkhoff qu'elle traverse. Une

<sup>3</sup>Éventuellement en en faisant la somme si deux quantités arrivent au même endroit.

autre interprétation peut être vue comme un post traitement des images de la DH, et porte le nom de réallocation différentielle [27]. Cette dernière apporte une nuance à la méthode originale. L'idée est d'assimiler chaque point du plan à une particule avec une position et une vitesse, analogue au vecteur de réallocation correspondant. Chaque valeur de la DH est alors déplacée par sauts infinitésimaux et de façon continue jusqu'à convergence vers un équilibre. Dans le cas d'une fenêtre d'analyse gaussienne à variance unité, le champ de vecteurs de réallocation peut être obtenu par le gradient du logarithme du module de la TFCT de la fonction d'onde pariétale, parfois nommé représentation stellaire [44],

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} &= \nabla \log |TFCT_{\psi}|, \\ &\sim \nabla \log \rho_{\psi}^H.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Il est évident que les vecteurs de réallocation pointent tous dans la direction des maxima de la DH. Les travaux de Chassande-Mottin [27] montrent qu'il y a identité entre le lieu des points fixes par la réallocation différentielle (points où s'annule le gradient de  $\log \rho_{\psi}^H$ ), et celui des extrema de la DH, ce même dans le cas d'une fenêtre d'analyse gaussienne de variance autre que unitaire. Dans ces conditions, la méthode de réallocation dans le cadre d'une analyse de Birkhoff est optimale pour des droites, des ellipses ou des points isolés.

### 3.4.2.3 Limites de la réallocation

La DH réallouée résout un compromis, en ayant à la fois peu d'interférences et de bonnes propriétés de localisation. Cette dernière ne fait pas partie de la classe des distributions quadratiques. Sa forte non linéarité fait qu'elle est moins robuste au bruit [27], et qu'elle devient plus difficile à manier mathématiquement. Ajoutons que quelques propriétés des distributions de la classe de Cohen réallouées sont intrinsèquement liées à la méthode de réallocation, comme la conservation de l'énergie et la covariance par translations en espace et nombre d'onde. Or elles ne possèdent pas, entre autre, la conservation des marginales.

### 3.4.3 Exemples

Afin d'illustrer l'apport de la réallocation sur la DH, quelques exemples simples ont été mis en œuvre dans le plan "espace-fréquence spatiale" en Fig. 3.10. Les signaux simulés sont composés dans un premier temps d'une simple modulation linéaire de fréquence spatiale d'amplitude gaussienne, et d'un logon. Alors que la DH ((a) et (c)), de par la taille finie du noyau de lissage sur la DWV, conduit à un étalement des composantes du signal et donc à une perte en localisation, la DH réallouée ((b) et (d)) refocalise l'énergie donnée à la base par la DWV. La DH réallouée montre ainsi des résultats satisfaisants en termes de lisibilité et de facilité d'interprétation, s'approchant sensiblement de la représentation idéale (approche classique ou géométrique).

Afin d'étudier le comportement de la DH réallouée en présence de termes d'interférences, deux modulations linéaires de fréquence spatiale d'amplitude gaussienne, et deux logons sont traités, et ce dans les conditions de présence de termes interférentiels.

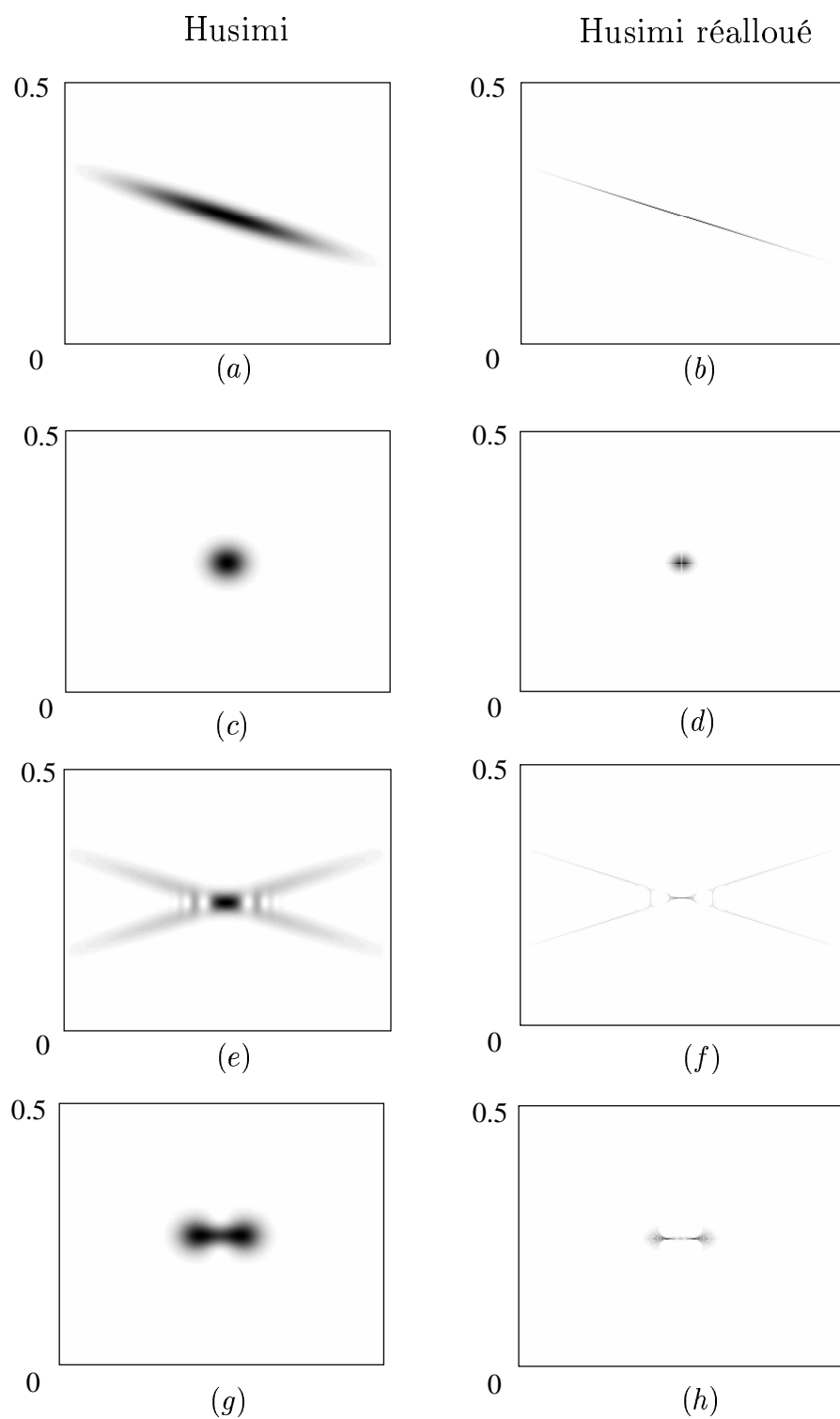


FIG. 3.10 – Mise en oeuvre de la réallocation de la distribution de Husimi.



La DH ((*e*) et (*g*)) possède encore une bonne localisation le long de la ligne de fréquence locale (qui provient de la DWV) et peu d'interférences (héritage de DH). Une perte en localisation apparaît cependant au voisinage de la zone d'interférences en Fig 3.10 (*f*) et (*h*).

## 3.5 Application numérique

### 3.5.1 Orbite périodique stable de couple (1, 1) dans un billard carré

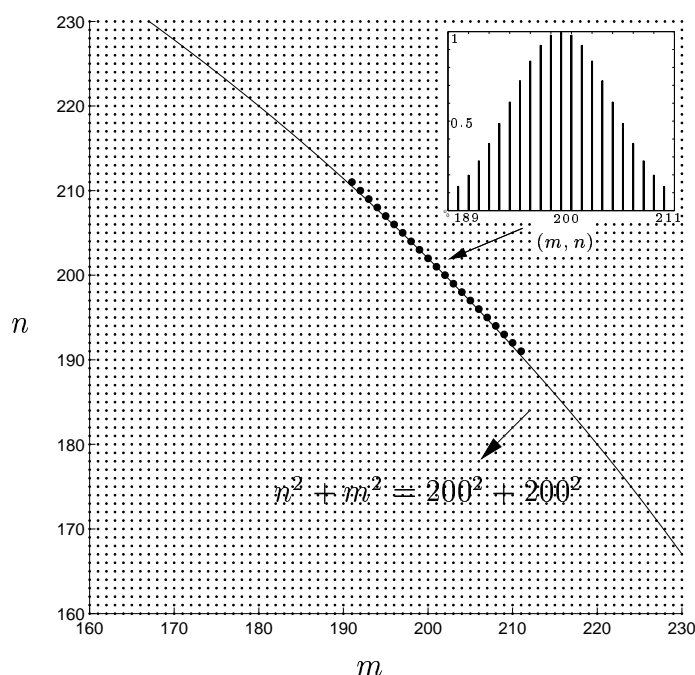


FIG. 3.11 – Diagramme illustrant le spectre d'état propre du billard carré. Chaque point gris représente une valeur propre du problème de Helmholtz; la ligne continue indique le tracé d'un cercle d'équation  $n^2 + m^2 = 200^2 + 200^2$ ; les valeurs propres noircies sont celles requises pour la fonction d'onde présentée en Fig. 3.12 (a).

La résolution du problème de Helmholtz donné en Eq. (3.1) pour un billard carré donne une infinité de valeurs propres discrètes. Ces dernières sont symbolisées en Fig. 3.11 par un ensemble de points gris. La première étape consiste à se donner un régime harmonique solution de l'équation de Helmholtz. On fixe pour cela arbitrairement les deux nombres quantiques  $m$  et  $n$  à 200. Ce régime harmonique est symbolisé en Fig. 3.11 par un cercle (ligne continue) de rayon  $R_{200} = \sqrt{200^2 + 200^2}$ . Les simulations numériques sont réalisées à l'aide d'une superposition de quelques états propres quasi-dégénérés. Cela consiste en une somme partielle de modes ayant pour mode central  $\psi_{200,200}$ , et regroupant au total un ensemble de  $M = 21$  modes propres résonants, par rapport au cercle de rayon  $R_{200}$ . Ce groupe modal est symbolisé, à l'image de l'Eq. (3.7), par la fonction d'onde  $\Psi_{398,21}$ . Chacun de ces modes

composant cette dernière est pondéré par une gaussienne d'écart-type  $\sigma = 5$ . Le poids de chaque mode est représenté en médaillon sur la Fig. 3.11 par des lignes verticales, dont la hauteur indique l'amplitude de chaque mode. La simulation présentée en Fig. 3.12 (a) confirme que le couple modal ainsi défini, construit par interférences constructives un renforcement de la fonction d'onde suivant la trajectoire donnée par l'orbite périodique de couple (1, 1), de paramètre d'orientation  $\phi = \frac{2\pi}{3}$ .

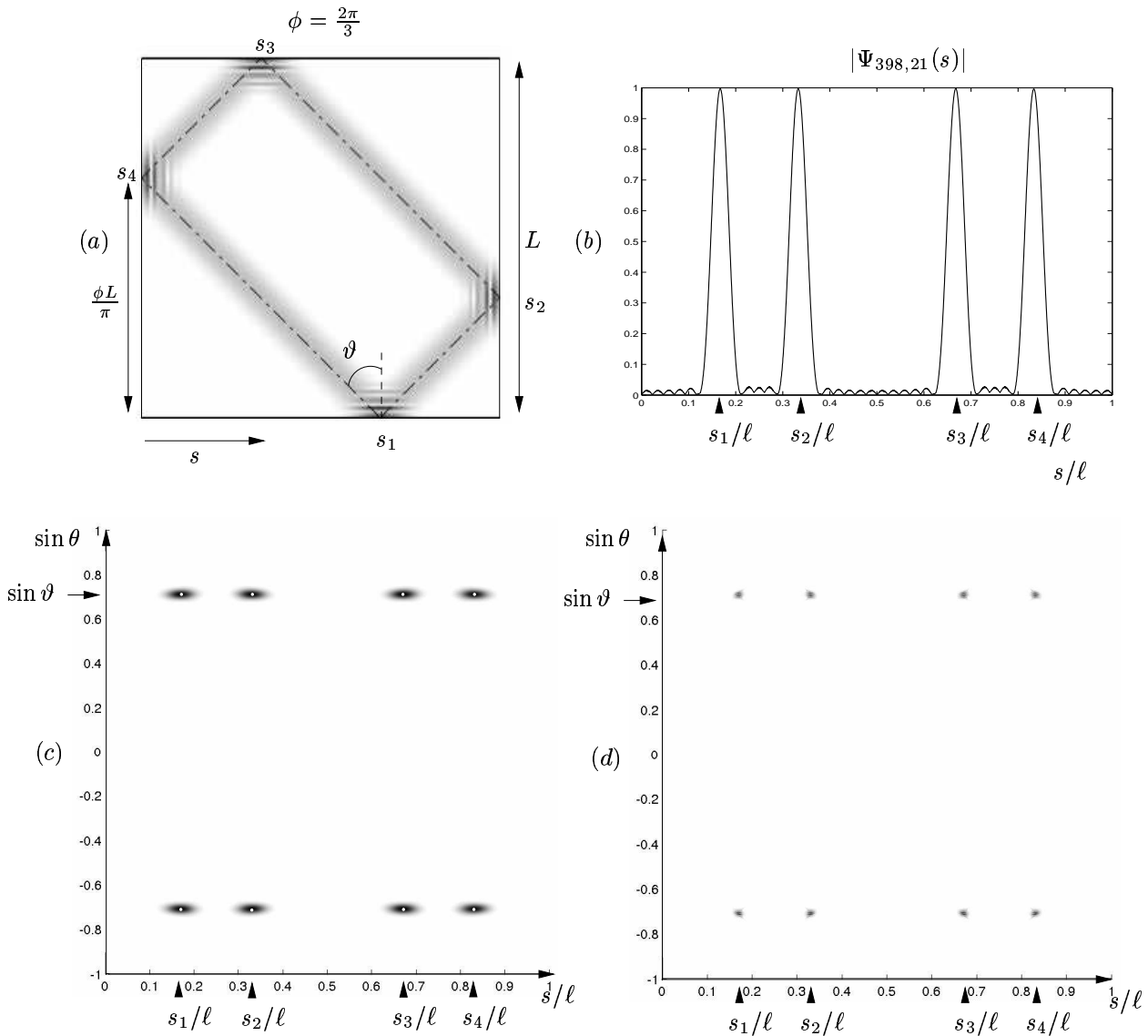


FIG. 3.12 – (a) : Module de la fonction d'onde  $\Psi_{398,21}(\mathbf{r})$  simulant l'orbite de couple (1, 1) dans un billard carré. (b) : Module de la fonction d'onde pariétale  $\Psi_{398,21}(s)$ . (c) : Visualisation dans la carte de Birkhoff de la DH de la fonction d'onde pariétale  $\Psi_{398,21}(s)$ . (d) : Visualisation dans la carte de Birkhoff de la DH réallocationnée de la fonction d'onde pariétale  $\Psi_{398,21}(s)$ . L'amplitude est représentée par niveaux de gris allant du blanc pour le niveau de seuil au noir pour les amplitudes maximales.

La cicatrice ainsi formée frappe les frontières du billard carré par quatre fois. La variable de Birkhoff  $s \in [0, 4L]$  prend naissance au coin inférieur gauche du billard carré et effectue une révolution de ce dernier dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les rebonds situés en  $s = s_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$  et  $4$ , ont le même angle d'incidence  $\vartheta$  par rapport à la normale en paroi comme montré en Fig. 3.12 (a). L'évolution de la fonction d'onde pariétale  $\Psi_{398,21}(s)$  ainsi formée, est visualisée dans la carte de Birkhoff à l'aide de la DH (Fig. 3.12 (c)) et de la DH réallouée (Fig. 3.12 (d)). Les quatre atomes espace-nombre d'onde transcrivent sur la carte de Birkhoff les quatre impacts en paroi de la fonction d'onde  $\Psi_{398,21}$  aux points  $s_1, s_2, s_3$  et  $s_4$ . La réallocation fait subir aux paquets gaussiens, synonyme de rebonds en paroi sur le billard carré, une homothétie de centre  $(s_i, \pm \sin(\vartheta))$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $4$ . Cette contraction des paquets gaussiens tend vers la représentation asymptotique du rayon qui est représentée par des points blancs.

### 3.5.2 Orbites périodiques stables dans un billard annulaire

L'étude porte sur un billard annulaire de paramètres  $R = 1$ ,  $a = 0.5$  et  $\delta = 0.2$ . La recherche de solutions du problème de Helmholtz (Eq. 3.1) aux conditions de Neumann en frontière est réalisée à l'aide d'une résolution par élément finis [40]. Ce billard possède la particularité d'avoir une dynamique mixte, c'est-à-dire possédant des orbites stables, instables et une dynamique chaotique. Deux orbites stables sont abordées par la suite afin de valider la méthode de réallocation sur la DH.

#### 3.5.2.1 Orbite A5

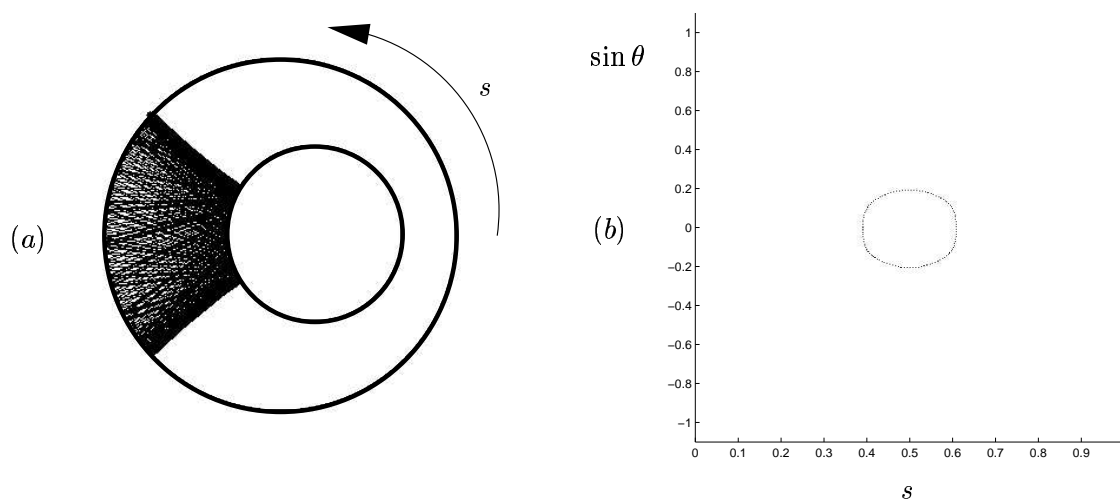


FIG. 3.13 – Orbite A5 dans le domaine spatial (a) et dans la carte de Birkhoff (b).

L'orbite A5 appartient à une famille d'orbites stables évoluant au voisinage d'un point fixe de variables de Birkhoff  $(0.5, 0)$ . La Fig. 3.13(a) montre l'évolution d'un rayon pour les conditions initiales de Birkhoff  $(0.38, 0.013)$ . La dynamique des rayons pour cette orbite est donnée sur la carte de Birkhoff

en Fig. 3.13(b). L'approche ondulatoire de cette orbite est obtenue pour un mode propre de valeur propre correspondante  $k^2 = 10445.7781$  et est représentée en Fig. 3.14 (a). La correspondance entre le régime ondulatoire et la limite asymptotique géométrique est clairement visible en comparant les figures Fig. 3.14 (a) et Fig. 3.13 (a). La fonction d'onde pariétale est obtenue par un maillage irrégulier puis ré-échantillonnée régulièrement sur 1024 points et visualisée en Fig. 3.14 (b).

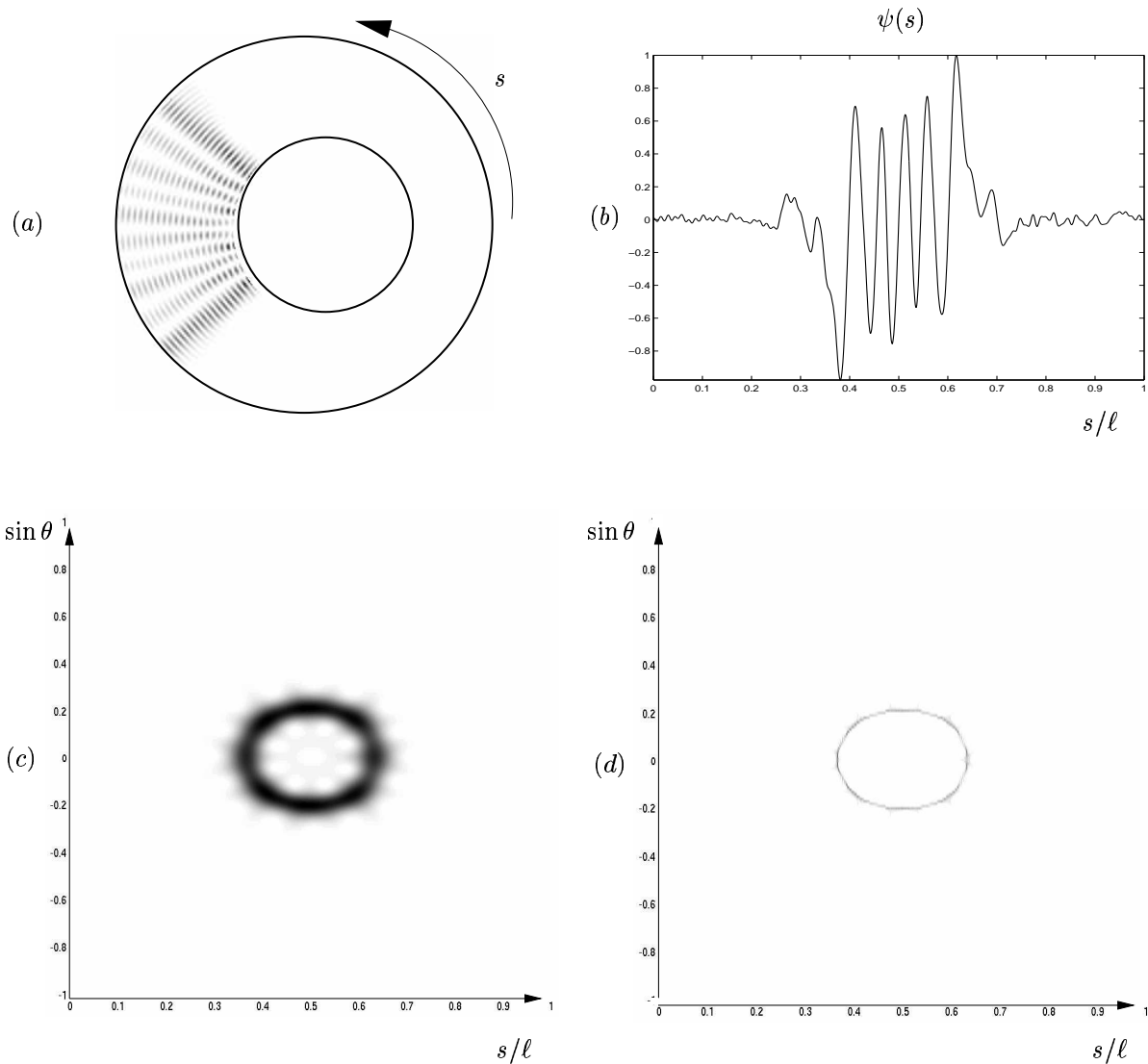


FIG. 3.14 – (a) : Module de la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$  dans un billard annulaire pour le nombre d'onde  $k = 102.2046$ . (b) : Fonction d'onde pariétale  $\psi(s)$ . (c) : Visualisation dans la carte de Birkhoff de la DH de la fonction d'onde pariétale  $\psi(s)$ . (d) : Visualisation dans la carte de Birkhoff de la DH réallouée de la fonction d'onde pariétale  $\psi(s)$ .

Cette dernière opération permet d'optimiser l'algorithme de la numérisation de la DH et de la DH réallouée qui font intervenir de nombreuses transformées de Fourier rapides (TFR) [25, 26]. La

DH et la DH réallouée sont présentées en Fig. 3.14 (c) et Fig. 3.14 (d), respectivement. A l'image du comportement asymptotique géométrique, La DH présente dans la carte de Birkhoff un anneau elliptique. La réallocation, suite aux propos précédents sur la méthode différentielle, refocalise l'énergie de la DH sur ces propres extrema. Le résultat obtenu est extrêmement fin et se confond avec l'approche géométrique.

### 3.5.2.2 Orbite A4

Comme le montre la Fig. 3.6, la condition  $|\sin \theta| > a + \delta$  implique la naissance d'une "galerie à échos" (GE). L'évolution du rayon ainsi que sa carte de Birkhoff correspondante, sont obtenues pour des conditions initiales de Birkhoff  $(0, 0.95)$ , et sont données respectivement en Fig. 3.15 (a) et Fig. 3.15 (b).

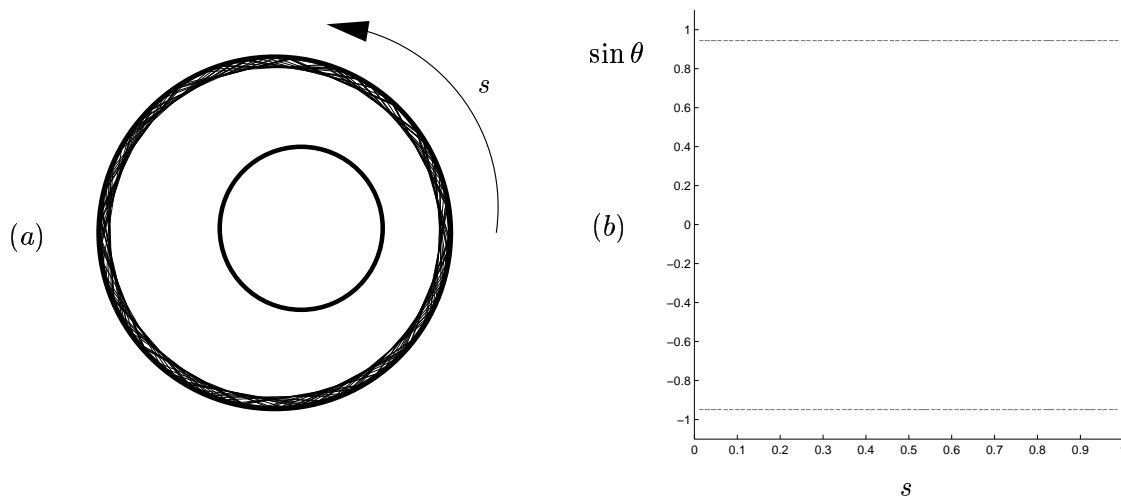


FIG. 3.15 – GE d'ordre élevé par la méthode des rayons dans le domaine spatial (a) et dans la carte de Birkhoff (b).

L'ordre élevé d'une GE se traduit par une multitude d'impacts en paroi du billard et s'interprète sur la carte de Birkhoff par une droite horizontale. L'approche ondulatoire présente le même résultat pour un mode propre ayant pour valeur propre  $k^2 = 10576.066$ . Son évolution spatiale est présentée en Fig. 3.16 (a). La correspondance onde-rayon est au même titre que précédemment clairement visible. La suite des résultats est obtenue pour la même procédure qu'en §3.5.2.1 (maillage irrégulier et ré-échantillonnage sur 1024 points). La fonction d'onde pariétale, la DH et la DH réallouée sont proposées en Fig. 3.16 (b), (c) et (d). Deux droites horizontales sont ainsi présentes sur la DH. Rappelons que le lissage gaussien de la fenêtre d'analyse sur la DWV de la fonction pariétale, étale les composantes éventuellement bien localisées de cette dernière. En effet, ces droites horizontales sont parfaitement localisées selon la DWV. Ainsi, la méthode de réallocation ne peut que refocaliser convenablement les composantes de la DH sur ces deux droites horizontales.

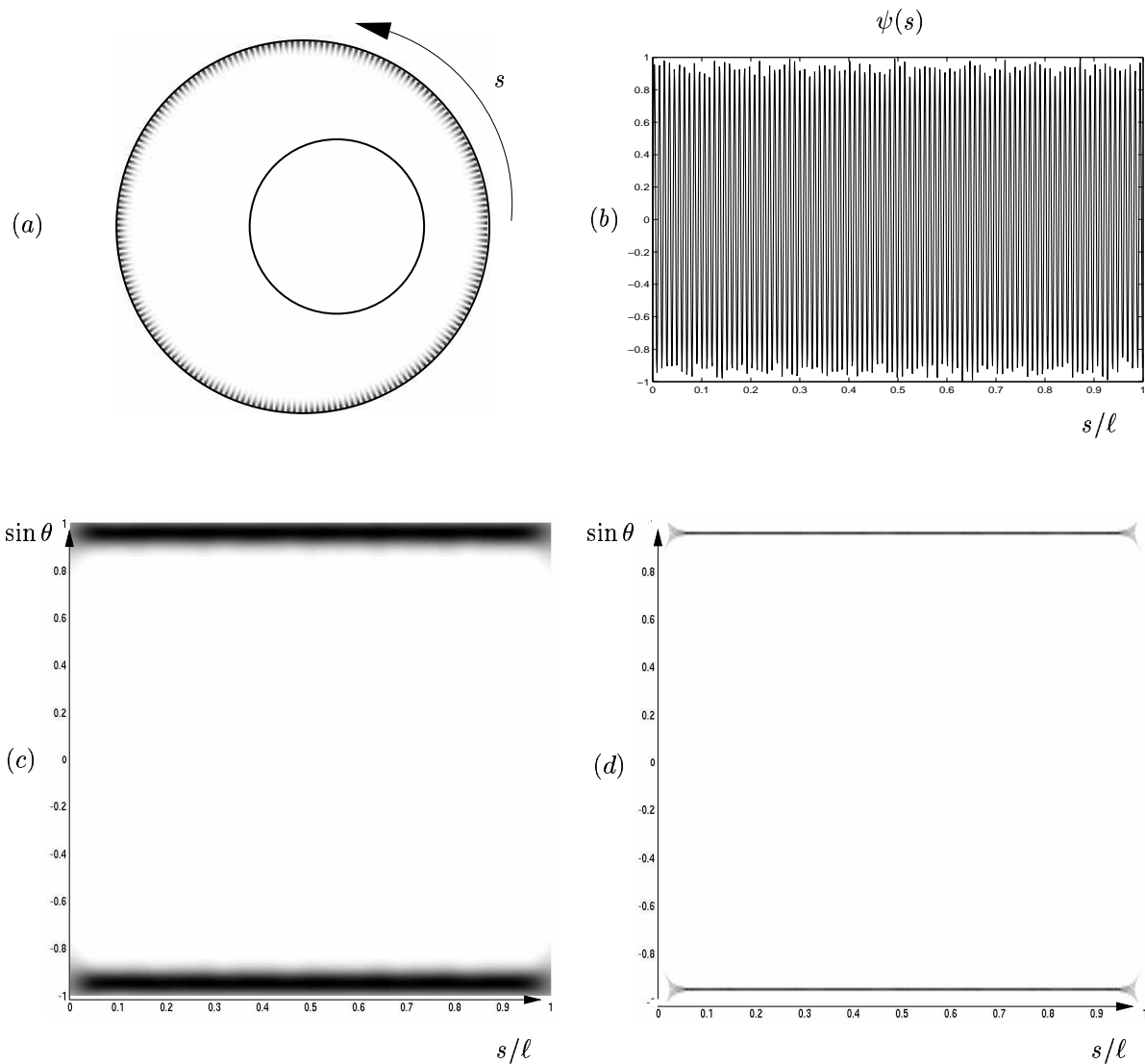


FIG. 3.16 – (a) : Module de la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$  dans un billard annulaire pour le nombre d'onde  $k = 102.84$ . (b) : Fonction d'onde pariétale  $\psi(s)$ . (c) : Visualisation dans la carte de Birkhoff de la DH de la fonction d'onde pariétale  $\psi(s)$ . (d) : Visualisation dans la carte de Birkhoff de la DH réalloguée de la fonction d'onde pariétale  $\psi(s)$ .

### 3.5.2.3 Discussion

Ces deux exemples sont en accord avec les conditions d'usage de la méthode de réallocation sur la DH autorisant dans la carte de Birkhoff des droites, des ellipses ou des points isolés. Or, un point important dans l'étude des billards quantiques est l'étude d'orbites isolées et instables. L'instabilité de ces orbites est d'une importance capitale. Les travaux qui suivent tentent d'examiner le comportement de la réallocation sur de telles orbites.

### 3.5.3 Orbites périodiques instables dans un stade de Bunimovich

L'étude porte sur un quart de stade basé sur les paramètres d'un stade constitué de deux cercles de rayon  $R = 1$  et d'une portion droite de longueur  $\epsilon = 1$ . Le stade ainsi constitué a un périmètre  $\ell = (2\pi + 2)$  et une surface  $\mathcal{S} = (\pi + 4)$ . La résolution du problème de Helmholtz (Eq. (3.1)) aux conditions de Neumann en frontière est réalisée à l'aide d'un calcul par éléments finis [40], à l'aide d'un maillage irrégulier avec ré-échantillonnage uniforme. Le mode propre ainsi obtenu a la particularité de mettre en lumière la présence d'une ou de plusieurs cicatrices. Les variables de Birkhoff obtenues à l'aide de distributions dans l'espace des phases permettent alors d'identifier cette (ou ces) cicatrice(s). Pour ce faire, l'obtention du champ pariétal est effectué selon la variable curviligne  $s$  le long des frontières du quart de stade, prenant naissance à l'extrémité gauche du billard suivant le sens des aiguilles d'une montre.

#### 3.5.3.1 Orbite périodique instable d'une "galerie à échos"

Le mode propre est obtenu pour sa valeur propre correspondante  $k^2 = 11105.261$  et est tracé en Fig. 3.17 (a). Il présente une cicatrice donnée en surimpression en Fig. 3.17 (a). La répartition spatiale énergétique d'un tel mode se trouve confinée tout au long de la paroi du système. Le mode propre étudié et sa limite asymptotique présentent deux impacts en paroi au sein du quart de stade. Afin de visualiser le comportement d'un tel mode dans l'espace des phases, le champ pariétal est obtenu par un maillage irrégulier et un ré-échantillonnage sur 512 points. Le champ pariétal est visualisé en Fig. 3.17 (b). La DH et la DH réallouée sont présentées respectivement en Fig. 3.17 (c) et Fig. 3.17 (d). Les deux réflexions en paroi se traduisent sur la carte de Birkhoff par deux îles donnant la position des impacts et la direction du rayon émanent de cette réflexion en paroi, en accord avec le principe d'incertitude. La refocalisation de la DH, effectué par la méthode de réallocation par des déplacements de valeurs de la DH vers de nouvelles positions nommées centres de gravité locaux, offre une sculpture des logons de la DH en forme "d'étoiles". L'étude des variétés stable et instable de la cicatrice est abordée en vue d'expliquer qualitativement les résultats fournis par la méthode de réallocation.

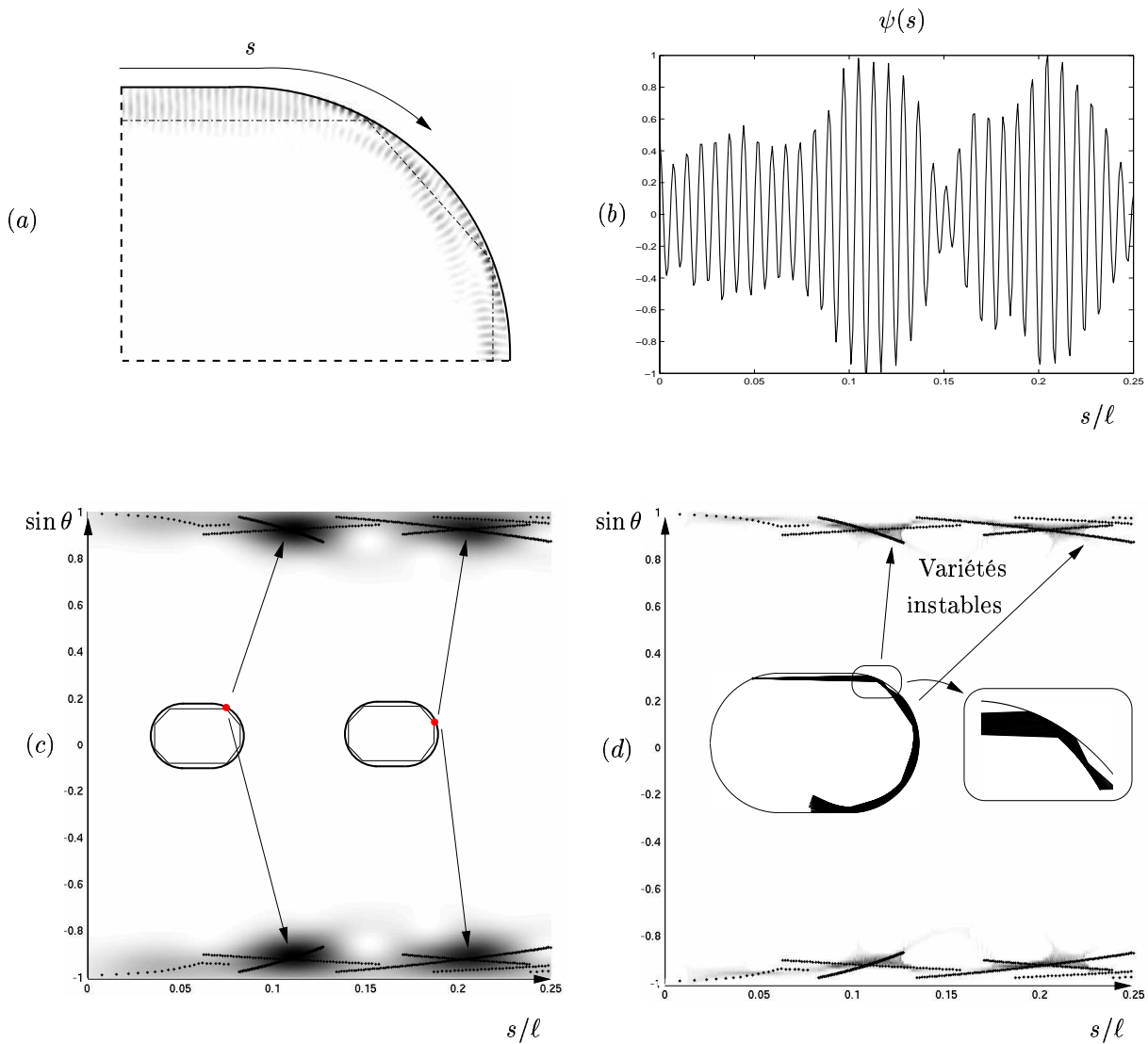


FIG. 3.17 – (a) : Module de la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$  dans un quart de stade pour le nombre d'onde  $k = 105.3815$ . (b) : Fonction d'onde pariétale  $\psi(s)$ . (c) : Visualisation dans la carte de Birkhoff de la DH de la fonction d'onde pariétale  $\psi(s)$ . (d) : Visualisation dans la carte de Birkhoff de la DH réallocation de la fonction d'onde pariétale  $\psi(s)$ . L'amplitude est représentée par niveaux de gris allant du blanc pour le niveau de seuil au noir pour les amplitudes maximales.



### 3.5.3.2 Influence des variétés stables et instables

La relation entre une orbite périodique instable et ses variétés associées suscite depuis quelques années un intérêt croissant dans l'étude des billards quantiques [41, 22, 42, 43]. A travers le concept d'hyperbolicité, la structure en "étoile" des îles de la carte de Birkhoff peut en effet être explicitée, comme le montre la Fig. 3.18. Le point noir, nommé  $O$ , symbolise l'emplacement dans l'espace des phases d'une orbite périodique, parfois nommée point hyperbolique du fait d'une analogie géométrique, ou orbite de Lyapunov. Son instabilité se traduit par des points figuratifs qui s'écartent de  $O$  sur le segment  $(\xi\xi')$  appelé "variété instable", alors que dans la direction  $(\eta\eta')$  les points figuratifs se rapprochent de  $O$  et se nomment "variété stable". Le principe d'attraction dans la carte de Birkhoff s'opère donc dans une direction, alors que la divergence des trajectoires s'opère dans une autre direction. Ainsi en dehors de ces axes principaux, les points se meuvent sur des courbes qui ressemblent à des hyperboles, représentées par des courbes en pointillés sur la Fig. 3.18.

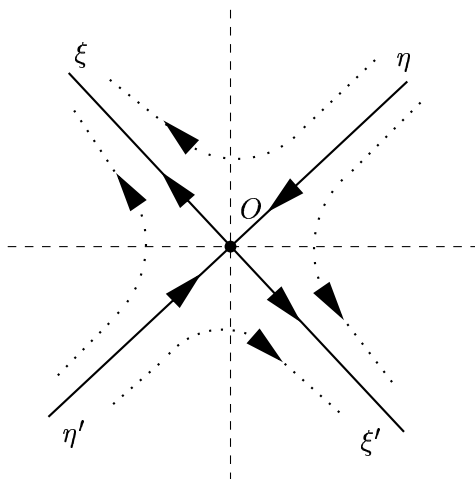


FIG. 3.18 – Illustration d'hyperbolicité dans l'espace des phases.

L'excursion au voisinage de l'orbite périodique instable que forme la GE peut alors être commentée comme suit. En Fig. 3.17 (d), se trouve un pinceau de rayons centré sur l'orbite périodique instable. Ce pinceau contient 61 rayons espacés à leur naissance les uns des autres d'un angle  $\kappa = \pm a\varsigma$ , avec  $a$  un entier compris entre 1 et 30, et  $\varsigma = 5.10^{-4}$  radians. Chaque impact en paroi du pinceau de rayons est représenté dans la carte de Birkhoff par un point noir et forme ainsi les variétés instables. Les variétés stables sont quant à elles obtenues par retournement temporel de l'opération précédente. Des travaux ont montré que la DH épouse le comportement des variétés stables et instables d'une orbite périodique instable considérée [16, 22, 42, 43]. La méthode de réallocation, de par son principe, accentue ce phénomène. Or, les variétés d'une GE tendent à être parallèles. La DH discerne alors mal l'influence des variétés d'une GE sur la dynamique quantique d'un mode propre dans l'espace des phases. La méthode de réallocation ne peut donc, dans ces conditions, confirmer avec précision l'influence des variétés stable et instable d'une cicatrice présente dans l'évolution d'un mode propre.

Réitérons ce processus d'analyse pour une orbite autre qu'une GE.

### 3.5.3.3 Orbite périodique instable du "Papillon"

Le mode propre abordé est obtenu pour sa valeur propre correspondante  $k^2 = 9647.2$  et est représenté en Fig. 3.19 (a). Cette fonction propre laisse deviner la présence d'une cicatrice soulignée par sa limite asymptotique géométrique, et porte le nom de l'orbite du "Papillon", comme illustré en Fig. 3.7 (d). Après obtention du champ pariétal selon la procédure rappelée lors du paragraphe précédent, la DH et la DH réallouée sont respectivement appliquées et fournies en Fig. 3.19 (c) et Fig. 3.19 (d). La cicatrice est confirmée par la présence dans la carte de Birkhoff d'un impact en paroi pour le quart de stade, quatre pour le stade entier. Deux îles symétriques par rapport à l'axe  $\sin \theta = 0$  sont ainsi présentes dans la DH. Le principe de réallocation réaffine les résultats donnés par la DH. Il est alors possible de comparer l'évolution de la DH réallouée avec les variétés stable et instable de l'orbite. La réallocation confirme les prévisions obtenues par [16, 22, 42, 43] sur les structures locales de la DH et suit les trajectoires des variétés de l'orbite étudiée.

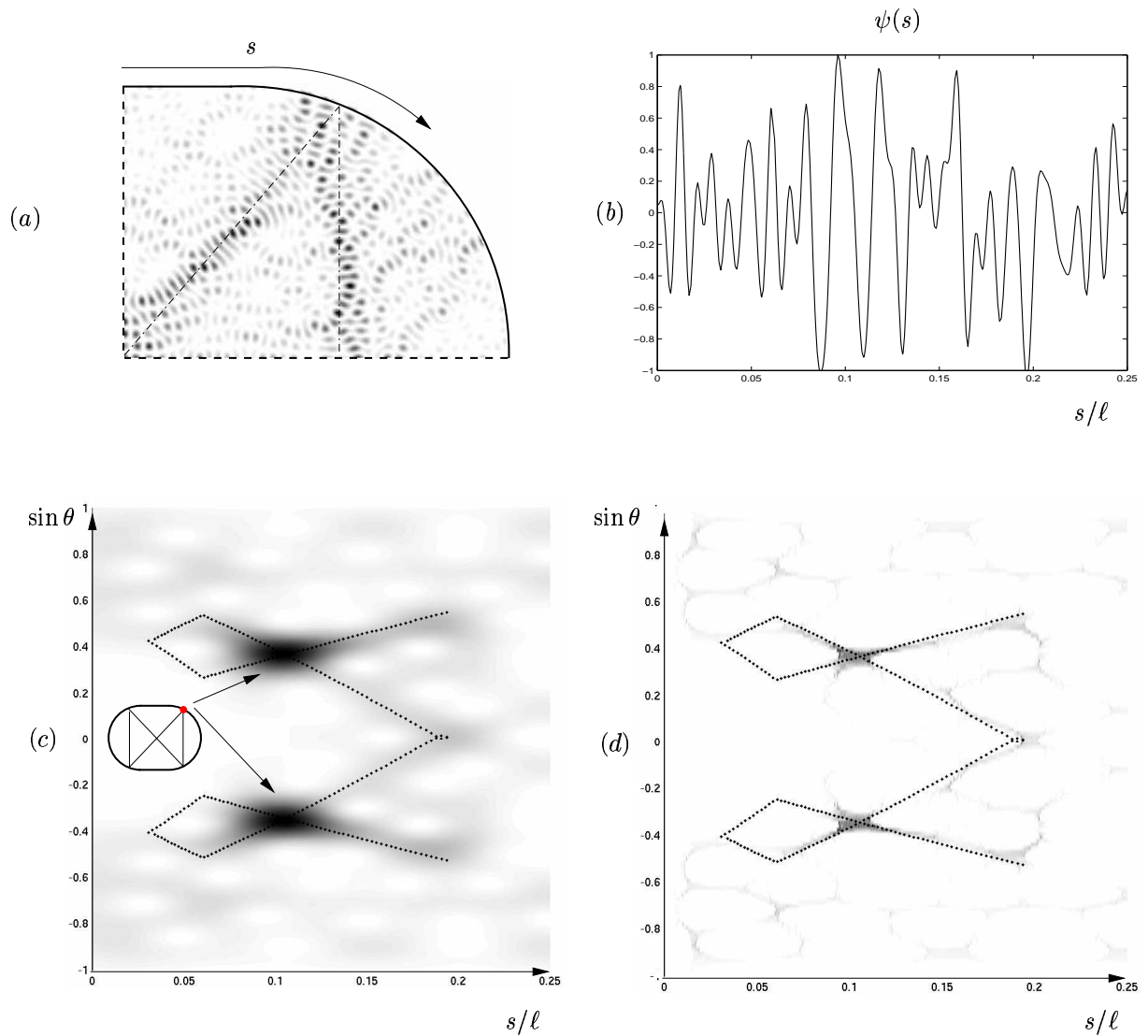


FIG. 3.19 – (a) : Module de la fonction d’ondes  $\psi(\mathbf{r})$  dans un quart de stade pour le nombre d’onde  $k = 98.2203$ . (b) : Fonction d’onde pariétale  $\psi(s)$ . (c) : Visualisation dans la carte de Birkhoff de la DH de la fonction d’ondes pariétale  $\psi(s)$ . (d) : Visualisation dans la carte de Birkhoff de la DH réallouée de la fonction d’ondes pariétale  $\psi(s)$ .

### 3.5.3.4 Présence de plusieurs orbites périodiques instables

Il existe plusieurs approches pour expliquer semi-classiquement la présence (ou l'absence) d'une cicatrice sur les fonctions propres de systèmes classiquement chaotiques. Seules les orbites de courte période peuvent cicatrifier les états propres [23]. L'analyse qui suit tente de mettre en évidence le comportement local dans l'espace des phases de plusieurs cicatrices, pour une seule et unique fonction propre. Le nouveau mode propre étudié a pour valeur propre  $k^2 = 6108.8449$  et est représenté en Fig 3.20 (a). L'analyse dans l'espace des phases permet de souligner la présence de possibles cicatrices. Afin de réaliser une cartographie de ces dernières dans la carte de Birkhoff, le champ pariétal du quart de stade est obtenu par la méthode rappelée lors du paragraphe précédent (maillage irrégulier suivi d'un ré-échantillonnage sur 512 points). Le champ ainsi constitué est présenté en Fig. 3.20 (b). La DH et la DH réallouée sont présentées respectivement en Fig. 3.20 (c) et Fig. 3.20 (d). Trois types d'orbites périodiques instables (d'ordre<sup>4</sup> 4, 5 et 6) sont visibles dans l'espace des phases. Or, par les symétries axiales du quart de stade, le nombre de cicatrices répertoriées s'élève à cinq, notées de  $B1$  à  $B5$  comme indiqué en Fig. 3.20 (c). Ce principe d'analyse est dans le cas présent un outil fort attrayant, permettant de souligner la présence de cicatrices qui ne sont pas facilement accessibles à partir de la représentation énergétique spatiale du mode propre. La méthode de réallocation fournit une représentation donnée en Fig. 3.20 (d), conduisant à un squelette très fin. Fort des travaux réalisés aux §3.5.3.1 et §3.5.3.3, il est important de porter un regard approfondi sur le comportement de la DH réallouée avec les variétés stable et instable d'orbites périodiques instables.

---

<sup>4</sup>L'ordre d'une cicatrice signifie le nombre d'impacts en paroi sur une révolution.

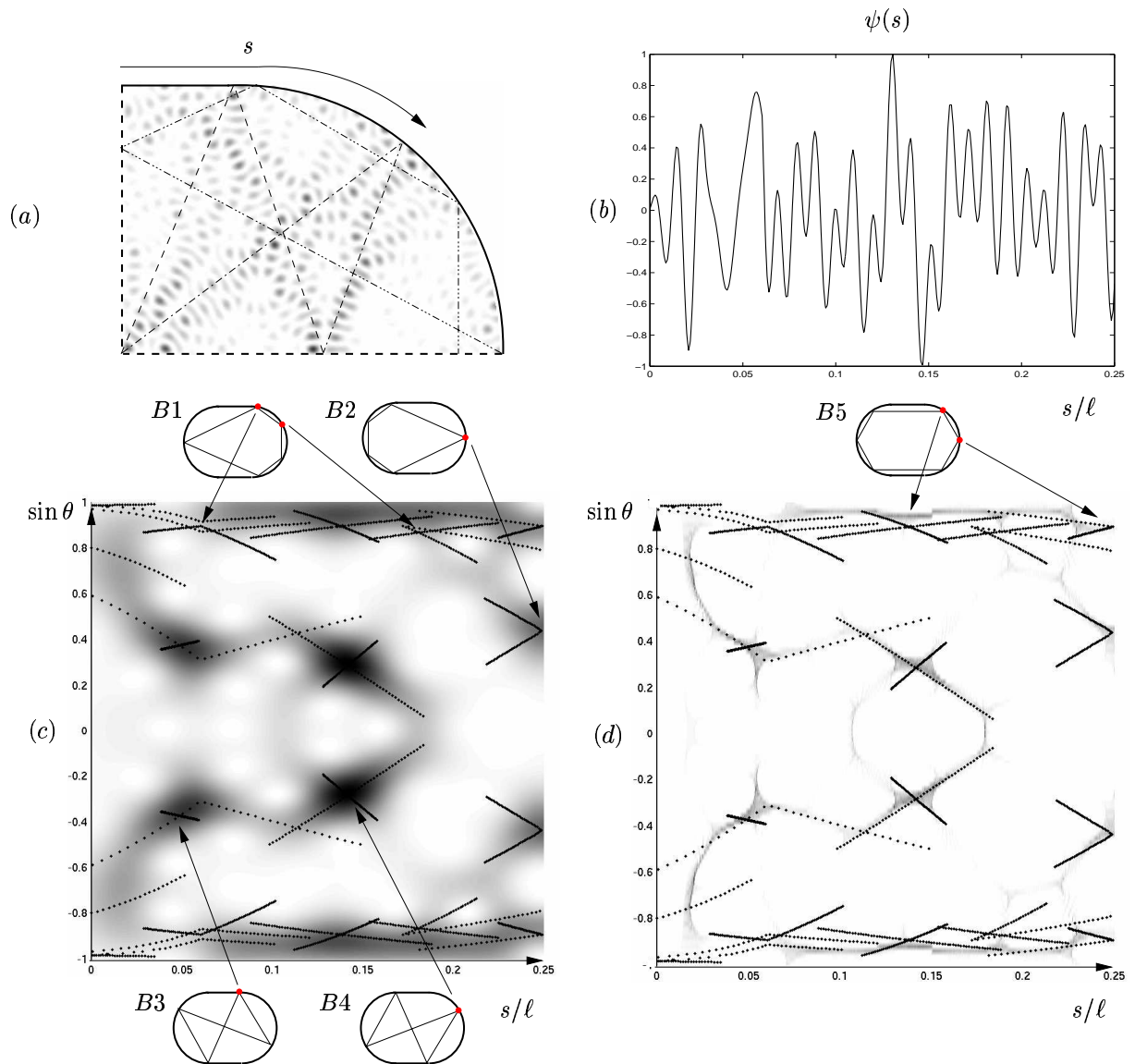


FIG. 3.20 – (a) : Module de la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$  dans un quart de stade pour le nombre d'onde  $k = 78.1591$ . (b) : Fonction d'onde pariétale  $\psi(s)$ . (c) : Visualisation dans la carte de Birkhoff de la DH de la fonction d'onde pariétale  $\psi(s)$ . (d) : Visualisation dans la carte de Birkhoff de la DH réallouée de la fonction d'onde pariétale  $\psi(s)$ . L'amplitude est représentée par niveaux de gris allant du blanc pour le niveau de seuil au noir pour les amplitudes maximales.

### 3.5.3.5 Influence des variétés stables et instables

Suite aux travaux de [41, 22, 42, 43], la distribution de Husimi épouse l'influence des variétés stable et instable des orbites périodiques instables présentes dans le mode propre, ce d'autant plus exactement que  $k \rightarrow \infty$ . Dans le cas présent, il est pertinent de soutenir cette affirmation lorsque  $|\sin \theta| < 0.7$ . Les variétés et la DH associées sont extrêmement proches pour les orbites  $B2$ ,  $B3$  et  $B4$ . Dans ce cas précis, la DH est plus présente sur les variétés instables des orbites correspondantes. En revanche, pour  $|\sin \theta| > 0.7$ , les variétés stable et instable tendent à être parallèles. La DH ne peut dans ces conditions séparer l'information l'une de l'autre. La DH réallouée focalise l'information sur les extrema de la DH. Il est donc normal d'observer un alignement des composantes de la DH réallouée sur les variétés stable et surtout instable.

## 3.6 Conclusion

L'analyse de Birkhoff, au moyen de distributions quadratiques, a été utilisée pour trois familles de billards quantiques à dynamique régulière, mixte et chaotique. Une méthode empruntée au traitement du signal et des images a été adoptée afin d'améliorer la localisation de la DH. Quelques résultats probants de la réallocation ont été présentés sur le comportement d'orbites stables dans la carte de Birkhoff, mettant en évidence une très grande similitude entre l'approche rayon et l'approche ondulatoire. Un intérêt particulier a été porté sur la dynamique instable d'orbite isolée. La réallocation de la DH confirme le comportement local de la DH au voisinage des variétés stables et instables d'orbite périodique instable. Il sera intéressant de poursuivre l'étude dans un régime très hautes fréquences, qui d'après [42], devrait accentuer cette tendance.

# Bibliographie

- [1] J.A. Méndez-Bermúdez, G.A. Luna-Acosta, P. Šeba & K.N. Pichugin “Understanding quantum scattering properties in terms of purely classical dynamics : Two-dimensional open chaotic billiards,” *Physical Review E* **66**, 46207 (2002).
- [2] G.A. Luna-Acosta, J.A. Méndez-Bermúdez, P. Šeba & K.N. Pichugin “Classical versus quantum structure of the scattering probability matrix : Chaotic waveguides,” *Physical Review E* **65**, 46605 (2002).
- [3] P. Bellomo T. Uzer “State scarring by ghosts of periodic orbits,” *Physical Review E* **50**(3), 1886 (1994).
- [4] H.U. Baranger, D.P. DiVincenzo, R.A. Jalabert & D. Stone, “Classical and quantum ballistic-transport anomalies in microjunctions,” *Physical Review B* **44**(19), 10637-10675 (1991).
- [5] P.B. Wilkinson, T.M. Fromhold, R.P. Taylor & A.P. Micolich “Electromagnetic wave chaos in gradient refractive index optical cavities,” *Physical Review Letters* **86**(24), 2046 (2001).
- [6] M. Hentschel & K. Richter “Quantum chaos in optical systems : The annular billiard,” *Physical Review E* **66**, 56207 (2002).
- [7] D. Delande, D. Sornette & R. Weaver “A reanalysis of experimental high-frequency spectra using periodic orbit theory,” *J. Acoust. Soc. Am.* **96**(3), 1873-1880 (1994).
- [8] E. Arcos, G. Báes, P.A. Cuatlayol, M.L.H. Prian & R.A. Méndez-Sanchez “Vibrating soap films : An analog for quantum chaos on billiards,” *Am. J. Phys.* **66**(7), 601-607 (1998).
- [9] P.A. Chinnery & V.F. Humphrey “Experimental visualization of acoustic resonances within a stadium-shaped cavity,” *Physical Review E* **53**(1), 272-276 (1996).
- [10] V. Lopac, I. Mrkonjić & D. Radić “Chaotic dynamics and orbit stability in the parabolic oval billiard,” *Physical Review E* **66**, 36202 (2002).
- [11] R. Narevich, R.E. Prange & Oleg Zaitsev “Square billiard with a magnetic flux,” *Physical Review E* **62**(2), 2046 (2000).
- [12] W. Li, L.E. Reichl & B. Wu “Quantum chaos in a ripple billiards,” *Physical Review E* **65**, 56220 (2002).
- [13] A.M. Ozorio de Almedia & R.O. Vallejos, “Poincaré’s recurrence theorem and the unitarity of the S-matrix,” *Chaos, Solitons and Fractals* **11**, 1015-1020 (2000).

- [14] B. Crespi, G. Perez & S.J. Chang “Quantum Poincaré sections for two-dimensional billiards,” *Physical Review E* **47**(2), 986 (1993).
- [15] S. W. McDonald & A.N. Kaufman “Spectrum and eigenfunctions for a hamiltonian with stochastic trajectories,” *Physical Review Letters* **42**, 1189 (1979).
- [16] S. Nonnenmacher “Etats propres de systèmes classiquement chaotique dans l’espace des phases,” these de Doctorat, Université de Paris Sud - Paris XI (30 Janvier 1998).
- [17] M. Novaes “Wigner and Husimi functions in the double-well potential,” *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **5**, S342-S348 (2003).
- [18] K. Zyczkowski “Quantum chaotic system in the generalized Husimi representation,” *Physical Review A* **35**(8), 3546 (1987).
- [19] K. Takahashi & N. Saitô “Chaos and Husimi distribution function in quantum mechanics,” *Physical Review Letters* **55**(7), 645 (1985).
- [20] S.B. Lee & M.D. Feit “Signatures of quantum chaos in Wigner and Husimi representations,” *Physical Review E* **47**(6), 4552 (1993).
- [21] H.W. Lee “Generalized antinormally ordered quantum phase-space distribution functions,” *Physical Review A* **50**(3), 2746 (1994).
- [22] M. Feingold, R.G. Littlejohn, S.B. solina, J.S. Pehling & O. Piro “Scars in billiards : The phase space approach,” *Physics Letters A* **146**(4), 199-203 (1990).
- [23] E.J. Heller “Bound state eigenfunctions of classically chaotic Hamiltonian systems : scars of periodic orbits,” *Physic Review Letters* **53**, 1515-1518 (1984).
- [24] K. Kodera, C. De Villedary & E.J. R. Gendrin “A new method for the numerical analysis of nonstationary signals,” *Phys. Earth and Plan. Int.* **12**, 142-150 (1976).
- [25] A. Papandreou-Suppappola, editor. “Applications in time-frequency signal processing,” CRC Press (2002).
- [26] F. Auger & P. Flandrin “Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method,” *IEEE Trans. Signal Proc.* **SP-43**(5), 1068-1089 (1995).
- [27] E. Chassande-Mottin “Méthode de réallocation dans le plan temps-fréquence pour l’analyse et le traitement de signaux non stationnaires,” thèse de Doctorat, Université de Cergy-Pontoise (28 Septembre 1998).
- [28] Y.I. Fujisaka & Mikio Tohyama “Eigenfrequency spacing analysis and eignemode breakdown for semi-stadium-type 2-D fields,” *Journal of Sound and Vibration*, in press (2003).
- [29] F.V. Oppen “Magnetic susceptibility of ballistic microstructures,” *Physical Review B*, **50**(23), 17151-17161 (2002).
- [30] Y.F. Chen, K.F. Huang & Y.P. Lan “Localization of wave patterns on classical periodic orbits in a square billiard,” *Physical Review E*, **66**, 46215-1-46215-7 (2002).



- 
- [31] O. Bohigas, D.Boosé, R. Egydio de Carvvalho & V. Marvulle “Quantum tunneling and chaotic dynamics,” Nucl. Phys. A, **560**, 197-210 (1993).
- [32] S.D. Frischat & Doron “Dynamical tunneling in mixed system,” Phys. Rev. E, **57**(2), 1421-1443 (1998).
- [33] E.J. Heller “Semiclassical wave packet dynamics and chaos in quantum mechanics,” in Les Houches Lecture Series LII (1989), eds. M-J Giannoni, A Voros & J Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 547-663 (1991).
- [34] J.B. Davies “Finite element analysis of waveguides and cavities - a review,” IEEE Transactions on Magnetics, **29**(2), 1578 (1993).
- [35] E.B. Bogomolny “Semiclassical quantization of multidimensional systems,” Nonlinearity, **5**, 805-866 (1992).
- [36] P.A. Boasman “Semiclassical accuracy for billiards,” Nonlinearity, **7**, 485-537 (1994).
- [37] P. O’Connor, J. Gehlen & E.J. Heller “Properties of random superpositions of plane waves,” Physical Review Letters, **58**(13), 1296-1299 (1987).
- [38] E.J. Heller “Qualitative properties of eigenfunctions of classically chaotic Hamiltonian systems,” in *Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics*, edited by T.H. Seligman and Nishioka (1986).
- [39] L. Cohen, “Time Frequency Analysis,” Prentice Hall PTR (1995).
- [40] M.Mori, “The finite Element Method and its applications,” Mc Millann, New York (1953).
- [41] R.L. Waterland, J.M. Yuan, C.C. Martens, R.E. Gillilan & W.P. Reinhardt “Classical-Quantum correspondence in the presence of global chaos,” Physical Review Letters **61**(24), 2733-2736 (1988).
- [42] D.A. Wisniacki & E. Vergini “Classical invariants and the quantum-classical link,” Phys. Rev. E **62**, R4513-R4515 (2000).
- [43] D.A. Wisniacki, F. Borondo, E. Vergini & R.M. Benito “Localization properties of groups of eigenstates in chaotic systems,” Phys. Rev. E **63**, 066220 (2001).
- [44] J.M. Tualle & A. Voros “Normal modes of billiards portrayed in the stellar (or nodal) representation,” Chaos, Solitons & Fractals **5**(7), 1085-1102 (1995).



## Chapitre 4

# Représentation des relations de dispersion pour des guides d'onde à section variable.

### 4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'analyser les capacités de la méthode de réallocation [1, 2, 3], à estimer les relations de dispersion dans un guide d'onde de section variable. Ce principe d'analyse est tiré d'une analogie avec les travaux réalisés dans le domaine ultrasonore sur la détection d'ondes de Lamb, initialement réalisée sur des cibles élastiques à l'aide d'une distribution de Wigner-Ville [4], puis repris selon un spectrogramme réalloué dans des plaques d'aluminium [6], dans des plaques renforcées par un composite [7], ou encore sur un cylindre afin de localiser un défaut de surface [8]. Le calcul du champ acoustique dans différents guides d'onde de section variable est réalisé à partir des travaux initiés par Pagneux *et al* [9, 10], introduisant la méthode multimodale pour la caractérisation de guides d'axe rectiligne et de section variable. Cette technique multimodale s'appuie sur la connaissance explicite d'une base de fonctions propres de l'opérateur transverse du guide. Elle consiste à déterminer les matrices impédance  $Z$  ou admittance  $Y$  ( $Y = Z^{-1}$ ), calculées en remontant le guide de la terminaison vers la source. Le champ acoustique peut à son tour être calculé en sens inverse, d'amont en aval. Cette méthode tient compte du couplage entre les modes, qu'ils soient propagatifs ou évanescents. Elle permet l'analyse de toute géométrie de guide d'axe rectiligne, dans une large gamme de fréquences et est particulièrement efficace dans des guides à section faiblement variable, (on ne considère alors qu'un faible nombre de modes). L'analyse du champ acoustique est obtenue dans un premier temps à partir de la pression acoustique sur un segment droit au sein du guide de section variable, dans le sens de la propagation. Ensuite la DH et la DH réallouée permettent d'illustrer les relations de dispersion des modes propagatifs présents dans le guide d'onde. Ces représentations mettent en évidence le principe de transition adiabatique, le couplage de modes ou encore les phénomènes de modes piégés.

## 4.2 Formulation multimodale du problème

Dans le cadre de l'acoustique linéaire, adiabatique, dans un fluide au repos, la pression acoustique  $p$  et la vitesse  $\mathbf{v}$  satisfont, dans le domaine fréquentiel, aux équations de conservation de la quantité de mouvement

$$-jk\mathbf{v} = \nabla p, \quad (4.1)$$

et de conservation de la masse

$$-jkp = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (4.2)$$

pour  $p$  et  $v$  adimensionnées par  $\rho_0 c_0^2$  et  $c_0$  respectivement, avec  $k = \omega/c_0$  et en omettant le facteur  $e^{j\omega t}$ . La pression  $p$  et la vitesse longitudinale  $v_x$  sont exprimées à l'aide des séries infinies

$$p(\mathbf{r}) = \sum_m \psi_m(y) P_m(x), \quad (4.3)$$

$$v_x(\mathbf{r}) = \sum_m \psi_m(y) U_m(x), \quad (4.4)$$

où les fonctions  $\psi_m$  sont les solutions du problème aux valeurs propres  $\Delta_{\perp} \psi_m = -\alpha_{xm}^2 \psi_m$ , satisfaisant à la condition de Neumann homogène aux parois

$$\frac{d\psi_m}{dn} = 0. \quad (4.5)$$

$P_m(x)$  et  $U_m(x)$  sont des fonctions scalaires. Les modes propres  $\psi_m$ , qui sont les modes transverses d'un guide droit de largeur  $h(x)$ , sont les fonctions

$$\psi_m(y) = A_m \cos\left(\frac{m\pi}{h(x)} y\right), \quad (4.6)$$

associées aux valeurs propres locales  $\alpha_{xm} = \frac{m\pi}{h(x)}$ . Ils sont orthogonaux et peuvent être normés en prenant  $A_m = \sqrt{\frac{2-\delta_{m0}}{h(x)}}$ .

Le formalisme matriciel permet par ailleurs d'écrire la décomposition modale (4.3) et (4.4) suivant

$$p = {}^t \boldsymbol{\psi} \mathbf{P}, \quad (4.7)$$

$$v_x = {}^t \boldsymbol{\psi} \mathbf{U}, \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{P} = (P_m)_{m \in \mathbb{N}}$  et  $\mathbf{U} = (U_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sont les vecteurs des composantes de  $p$  et  $v_x$  dans la base  $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , et  $\boldsymbol{\psi}$  est le vecteur des modes propres  $\psi_m$ . On définit alors une impédance généralisée  $Z$  telle que

$$\mathbf{P} = Z\mathbf{U}. \quad (4.9)$$

Une impédance est imposée en aval du coude sous la forme d'une matrice caractéristique  $Z_c$  qualifiant une impédance de rayonnement d'une section débouchant sur un guide droit semi-infini,

$$Z_{cm} = \frac{k}{k_{xm}}, \quad (4.10)$$

avec  $k_{xm} = \sqrt{k^2 - \alpha_{xm}^2}$  pour les modes propagatifs et  $k_{xm} = -j\sqrt{\alpha_{xm}^2 - k^2}$  pour les modes évanescents. Ces équations définissent les relations de dispersion du guide à section variable, relations que l'analyse locale par DH et DH réallouée permet d'estimer. Une source en amont du guide est définie par une condition sur  $\mathbf{P}$  ou  $\mathbf{U}$ . Ainsi, à partir de la matrice impédance du guide, un calcul du champ peut être effectué.

### 4.3 Représentation des relations de dispersion par analyse locale

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à des guides d'onde à section faiblement variable (Fig. 4.1), et les unités de longueur et d'impédance sont arbitraires. La hauteur du guide droit  $h_0$  est choisie comme valeur de référence. Le régime harmonique est tel que  $k = \frac{2.5\pi}{h_0}$ .

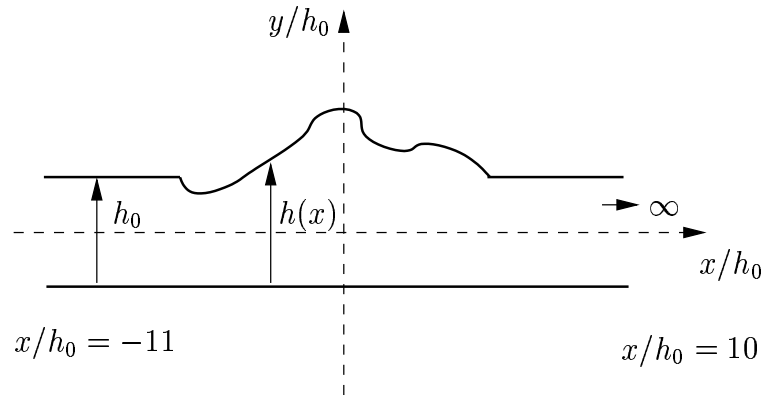


FIG. 4.1 – Guide droit de section variable et notations.

A droite de la cavité, en  $x/h_0 = 10$ , la condition limite  $Z = Z_c$  traduit l'existence d'une terminaison infinie. Dans les parties droites, trois modes sont propagatifs (modes 0 à 2). Des modes supérieurs peuvent le devenir dans la partie à section variable pour une extension des parois. La source est simulée en imposant au vecteur  $\mathbf{P}$  un coefficient unitaire pour l'un des modes propagatifs dans les sections droites. Le calcul multimodal s'effectue par la suite pour dix modes. Les analyses locales sont réalisées au coeur du guide sur un segment droit d'amont en aval. Les relations de dispersion à visualiser sont,

$$k_{xm} = \sqrt{k^2 - \alpha_{xm}^2}, \quad (4.11)$$

avec  $\alpha_{xm}$  les valeurs propres locales du problème de Helmholtz transversal et  $k = \frac{\omega}{c_0}$ .

#### 4.3.1 Géométrie des guides

Afin de calculer la matrice impédance du problème multimodal, différentes géométries de guides sont analysés dans ce paragraphe. Le choix de ces géométries provient de travaux en mécanique quantique [11, 12], en acoustique [10], etc... Dans les travaux qui suivent, trois types de guides sont abordés.

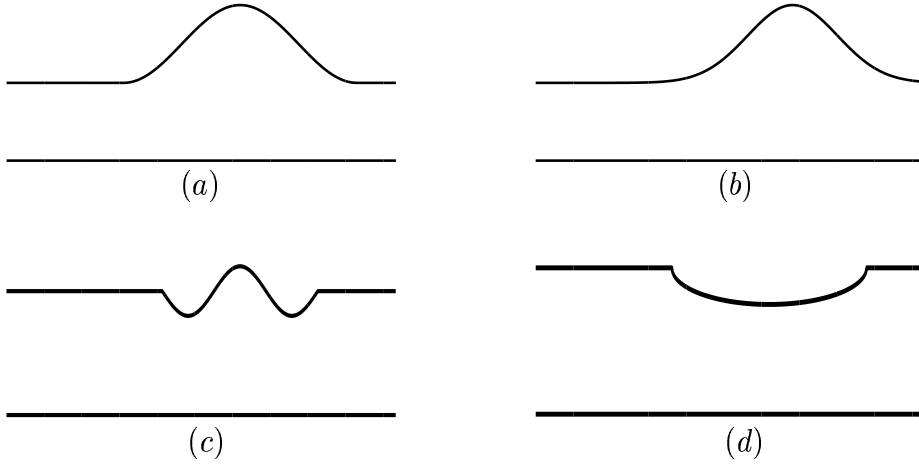


FIG. 4.2 – Guides d'onde de section variable. (a) : géométrie cosinus de type 1 ; (b) : géométrie gaussienne ; (c) : géométrie cosinus de type 2 ; (d) : géométrie elliptique.

Chaque guide possède une section variable couplée avec deux guides droits. La section variable se compose d'une frontière droite en  $y = 0$  et d'une frontière supérieure modulée par :

1. une fonction cosinus de type 1 (Fig. 4.2 (a)),

$$h(x) = h_0 + \frac{a_{c1}}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{L_{c1}}x\right) \right), \quad (4.12)$$

2. une fonction gaussienne (Fig. 4.2 (b)),

$$h(x) = h_0 + a_g e^{-b_g x^2}, \quad (4.13)$$

3. une fonction cosinus de type 2 (Fig. 4.2 (c)),

$$h(x) = h_0 + a_{c2} \cos\left(\frac{2\pi}{L_{c2}}x\right), \quad (4.14)$$

4. une fonction elliptique (Fig. 4.2 (d)),

$$h(x) = h_0 - b_e \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_e}\right)^2}, \quad (4.15)$$

où  $h_0$  est la hauteur des guides droits,  $L_{c1}$  et  $L_{c2}$  des périodes spatiales,  $a_g$ ,  $b_g$ ,  $a_{c1}$ ,  $a_{c2}$ ,  $a_e$  et  $b_e$  des constantes arbitraires.

## 4.4 Applications

### 4.4.1 Principe de la transition adiabatique

Le guide étudié ici est constitué d'une section variable définie par la fonction cosinus de type 2 donnée par l'équation (4.14). La section variable possède une période spatiale  $L_{c2} = 12$  et une

amplitude  $a_{c2} = 0.13$ . Le mode incident d'indice  $m = 2$  est considéré comme source. L'analyse locale s'effectue sur le segment de droite situé en  $y_a = 0.5$ , comme présenté en Fig. 4.3 (a). La visualisation du module de la pression en Fig. 4.3 (a) indique la présence du mode  $m = 2$  tout au long du guide sans véritable opposition à la propagation de ce dernier. La distribution de Husimi en Fig. 4.3 (b) confirme cet apriori. Les lignes en pointillés représentent les relations de dispersion pour les modes  $m = 0$  à  $m = 2$ . L'analyse se compose de deux parties (positive et négative) qualifiant respectivement la propagation et la rétro-propagation dans le guide d'onde. La DH donne un résultat suivant la ligne de dispersion du mode  $m = 2$ , confirmé par la réallocation qui affine ce résultat en Fig. 4.3 (c).

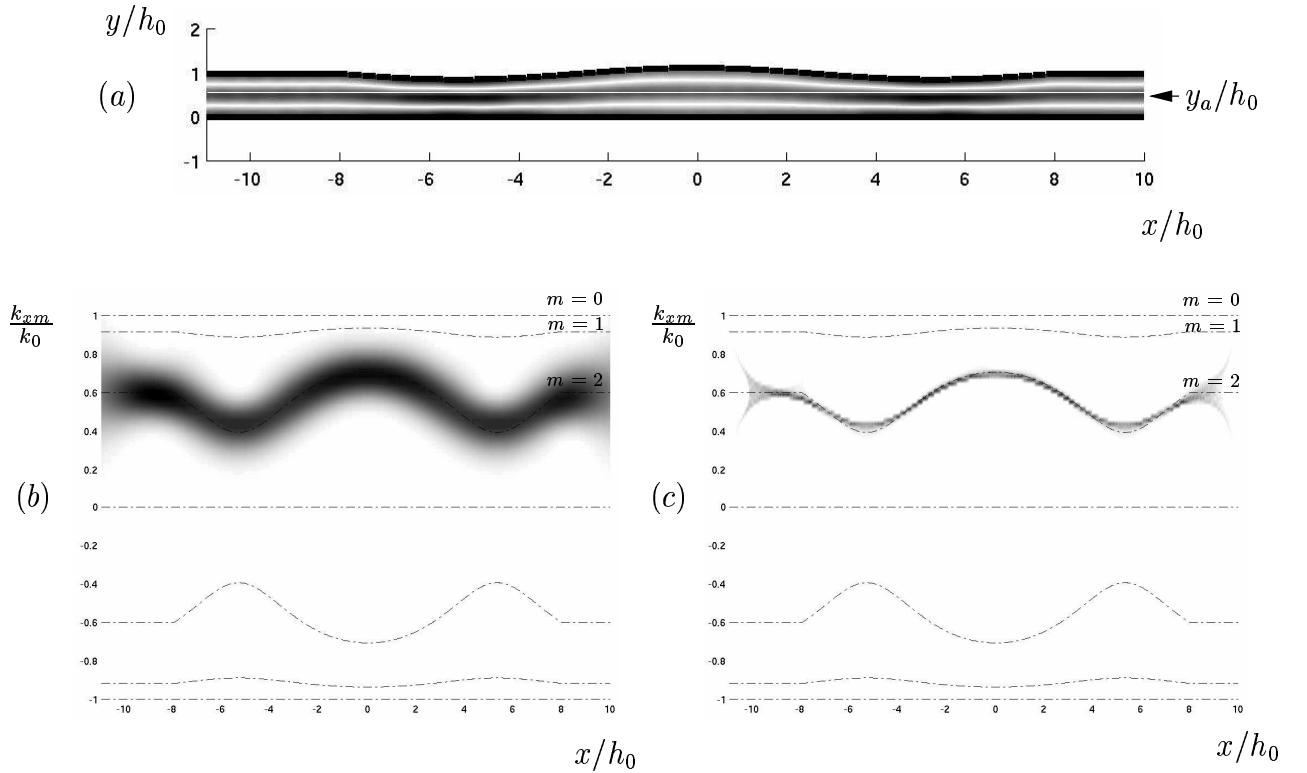


FIG. 4.3 – (a) : Module du champ de pression acoustique; (b) : Distribution de Husimi; (c) : Distribution de Husimi réallouée.

La section droite en  $x/h_0 = -11$  permet de définir un guide d'onde local (invariant par translation) dont les différents modes sont appelés modes locaux. Si les variations de la section variable sont suffisamment douces, on peut intuitivement admettre que le mode d'indice  $m = 2$  excité au début de la section variable progresse dans le guide en conservant sa puissance initiale, c'est à dire que les autres modes locaux ne sont pas excités. C'est le principe de la transition adiabatique.

#### 4.4.1.1 Etude comparative des méthodes multimodale et B.K.W. (Brillouin - Kramer - Wentzel)

L'amplitude de ce mode est accessible par le calcul multimodal donnant le coefficient  $P_2(x)$  issu de l'équation (4.3). L'approche B.K.W [14] permet d'obtenir cette même amplitude à condition que le nombre d'onde longitudinal ( $k_{x2}^2 = k^2 - \alpha_{x2}^2$ ) varie assez lentement selon la variable  $x$ . Le principe de calcul de la méthode B.K.W, exposé en Annexe A, permet l'établissement d'une solution approchée du problème de Helmholtz longitudinal

$$\frac{d^2}{dx^2} P_2^{BKW}(x) + [k^2 - \alpha_{x2}^2] P_2^{BKW}(x) = 0. \quad (4.16)$$

Le coefficient  $P_2^{BKW}(x)$  prend alors la forme

$$P_2^{BKW}(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha_{x2}^2}} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\pm i \int \sqrt{k^2 - \alpha_{x2}^2} dx}, \quad (4.17)$$

avec  $\alpha_{x2} = \frac{2\pi}{h(x)}$  la valeur propre locale du mode d'indice  $m = 2$  du problème de Helmholtz transverse.

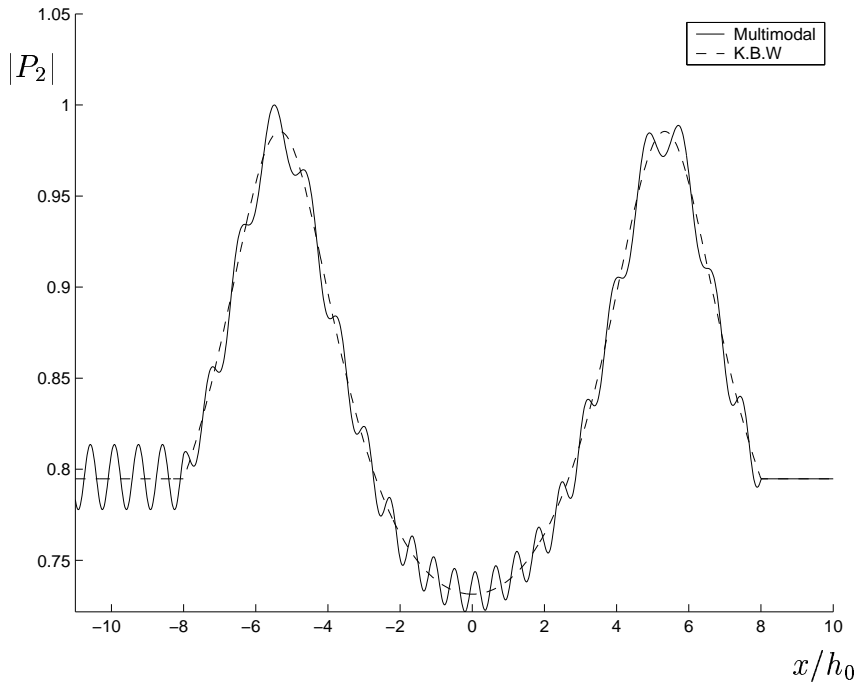


FIG. 4.4 – Module des coefficients  $P_2(x)$  (trait plein) et  $P_2^{BKW}(x)$  (trait pointillé).

La Fig. 4.4 montre une comparaison entre la méthode multimodale et l'approche B.K.W du coefficient  $P_2$ . La solution multimodale suit la valeur de la solution B.K.W. Le couplage (présent dans le calcul multimodal et absent dans l'approche B.K.W) induit des oscillations autour de la solution B.K.W, y compris dans la partie à section constante (à gauche). Même si ces dernières sont de faibles



amplitudes, elles témoignent de l'influence de la partie à section variable du guide. Ces faibles couplages peuvent se visualiser en observant la DH réallouée selon une dynamique en  $\sqrt{\hat{\rho}^H}$  [6] (Fig. 4.5 (a)) ou selon la représentation stellaire en  $\text{Log}(\hat{\rho}^H)$  [15] (Fig. 4.5 (b)). Chaque couplage est signalé par la lettre  $C$ . Ces derniers sont accentués dans la représentation stellaire, Fig. 4.5 (b), illustrant la présence d'oscillations par le calcul multimodal du coefficient  $P_2(x)$ . La Fig. 4.5 (b) indique deux couplages majeurs. Le premier concerne la présence du mode plan dans la partie à section variable, le second la rétropropagation du mode  $m = 2$ .

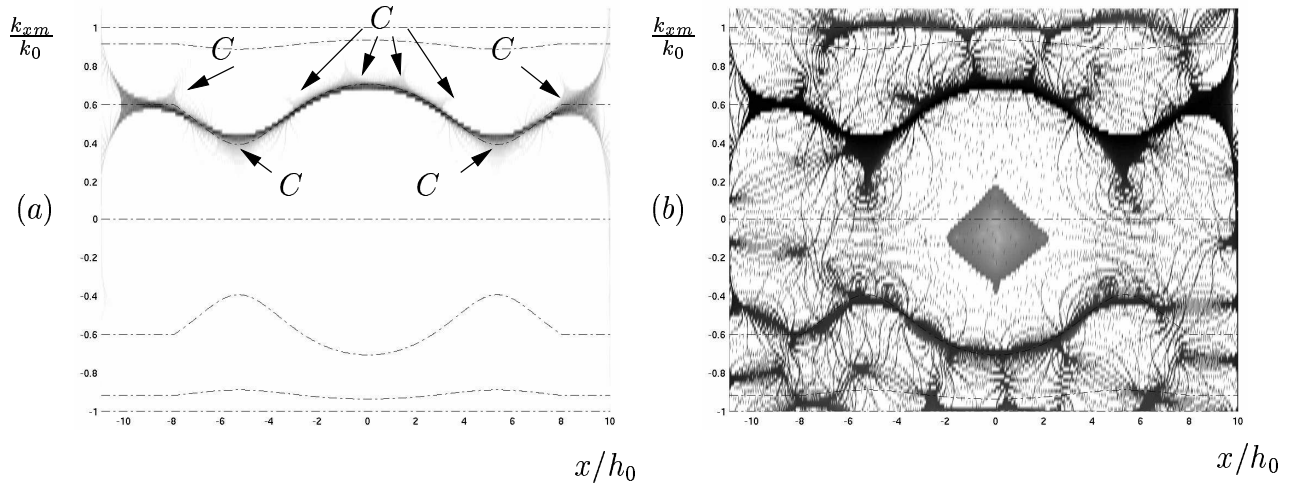


FIG. 4.5 – Distribution de Husimi réallouée. (a) : Dynamique en  $\sqrt{\hat{\rho}^H}$ ; (b) : Dynamique en  $\text{Log}(\hat{\rho}^H)$ .

#### 4.4.2 Modes couplés

Les deux exemples traités dans cette partie illustrent le principe du couplage modal, en modifiant la géométrie du guide (partie à section variable). Le premier exemple consiste à augmenter la hauteur du guide (géométrie gaussienne), le second à la diminuer (géométrie elliptique).

##### 4.4.2.1 Guide à géométrie gaussienne

Dans cette section, la partie à section variable du guide est obtenue par une fonction gaussienne de paramètres  $a_g = 1$  et  $b_g = 0.08$ . La source est simulée par le mode  $m = 2$  et l'analyse locale s'effectue sur le mur inférieur en  $y_a = 0$ . L'augmentation de la hauteur de la cavité implique, comme l'indiquent les figures Fig. 4.6 (b) et Fig. 4.6 (c), la naissance des modes propagatifs d'ordre  $m = 3$  et  $m = 4$ . Les zéros de  $k_{x3} = \sqrt{k^2 - \alpha_{x3}^2}$  et  $k_{x4} = \sqrt{k^2 - \alpha_{x4}^2}$  forment des "points tournants" et qualifient le passage de l'état évanescent à l'état propagatif. Les modes  $m = 0$ ,  $m = 1$  et  $m = 2$  sont eux toujours propagatifs. La DH montre que le mode  $m = 2$ , après propagation dans la cavité, se couple avec le mode  $m = 1$ . La finesse de la DH réallouée (Fig. 4.6 (c)), représentée selon une dynamique en  $\sqrt{\hat{\rho}^H}$ , permet de mieux localiser la position sur l'axe des abscisses du départ du couplage entre ces deux modes.

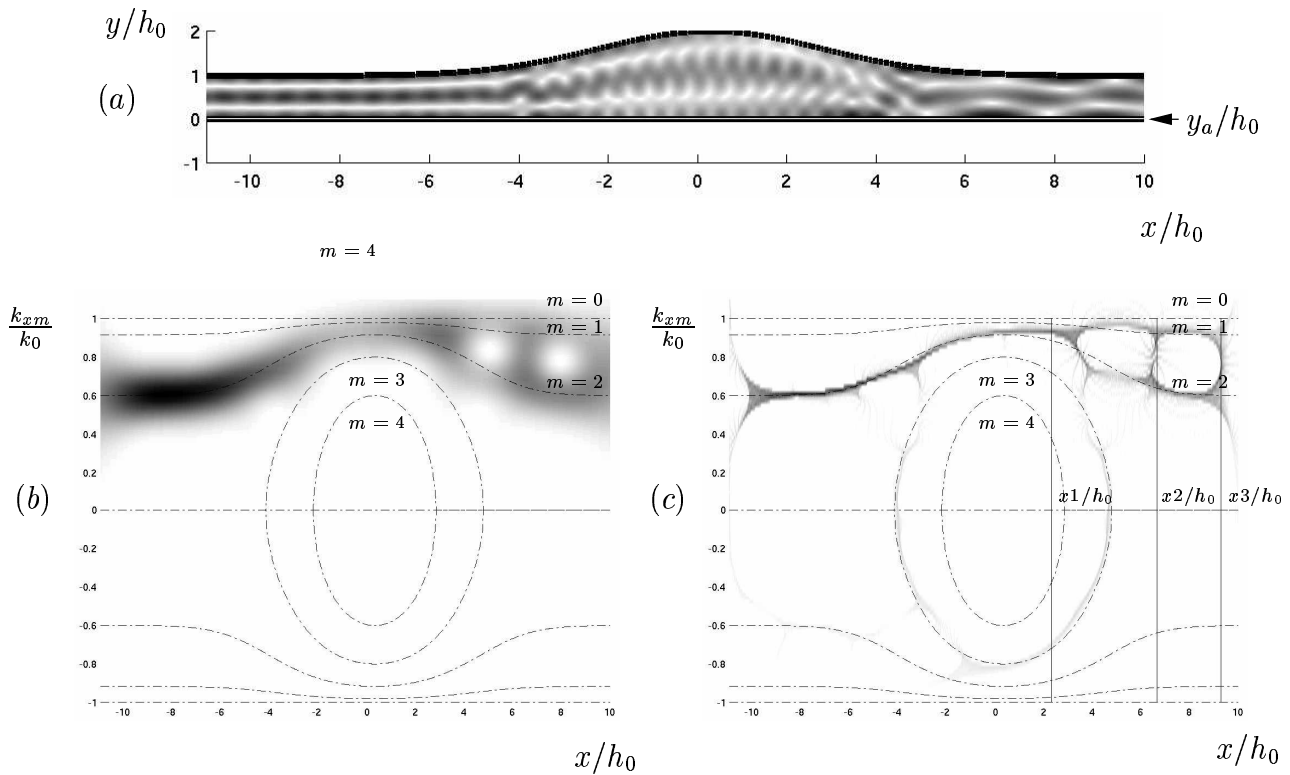


FIG. 4.6 – (a) : Module du champ de pression acoustique ; (b) : Distribution de Husimi ; (c) : Distribution de Husimi réallouée selon une dynamique en  $\sqrt{\rho^H}$ .

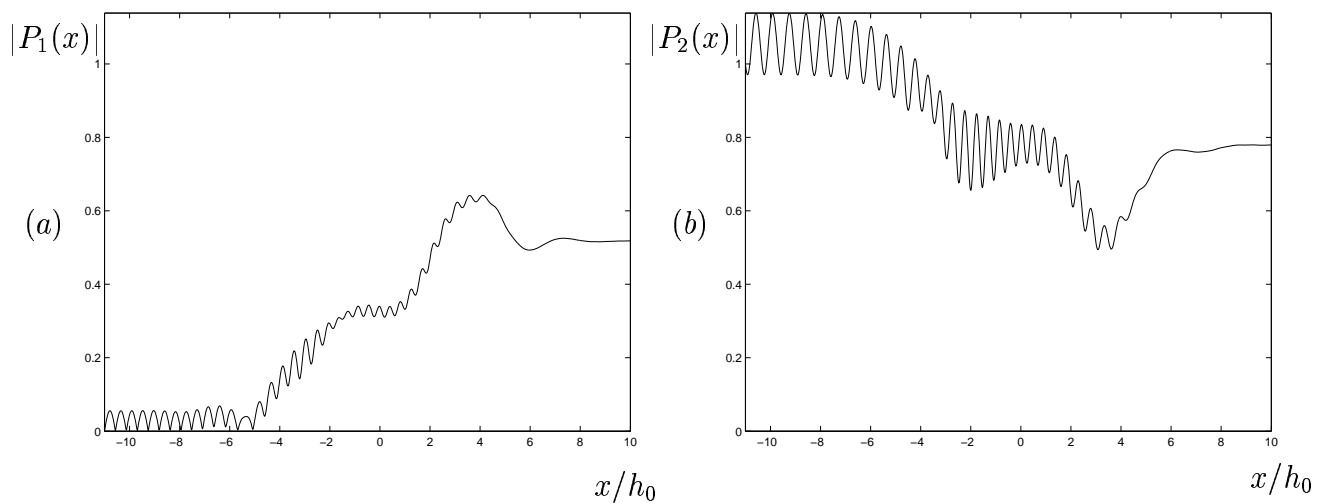


FIG. 4.7 – (a) :  $|P_1(x)|$ ; (b) :  $|P_2(x)|$ .

Aucune onde retour n'est présente. Or, d'après la Fig. 4.6 (c), la présence du mode d'indice  $m = 3$  (de faible intensité) annonce que celui-ci est piégé dans la partie à section variable du guide et ne peut

se propager dans les sections droites. La dynamique en  $\sqrt{\hat{\rho}^H}$  permet d'accéder à cette information, ce que la DH, Fig. 4.6 (a), aborde de manière moins détaillée. Si le principe d'analyse locale informe sur l'existence d'un ou plusieurs modes présents dans la propagation, il est légitime (Cf. §4.4.1.1) de se poser la question suivante : les transitions des couplages présents sur la DH, et la DH réallouée, sont-ils visibles par l'analyse multimodale? Les figures Fig. 4.7 (a) et Fig. 4.7 (b) présentent les modules du coefficient  $P_m(x)$  des modes  $m = 1$  et  $m = 2$ . La présence d'oscillations traduit de possibles couplages entre modes. Cependant, aucun caractère local de ces coefficients ne permet de signaler le début d'un couplage entre ces deux modes. Le désaccord de phase  $\Delta k_{mn}(x)$  [16] permet alors de localiser sur l'axe des abscisses ces zones de couplage, entre les modes d'indices  $m$  et  $n$ . Dans le cas présent, le désaccord de phase entre les modes  $m = 1$  et  $m = 2$  prend la forme

$$\Delta k_{21}(x) = \arg(P_2(x)) - \arg(P_1(x)). \quad (4.18)$$

L'efficacité du couplage est maximale si l'accord de phase est réalisé, c'est-à-dire si le désaccord de phase est nul ( $\Delta k_{21}(x) = 0$ ). A l'inverse, pour des désaccords de phase de grandes valeurs, les modes ne sont plus couplés. La figure Fig. 4.8 donne ainsi trois zéros de  $\Delta k_{21}(x)$  pour  $x/h_0 \in [-4, 10]$ , visualisés aux points  $x_1/h_0 = 2.3$ ,  $x_2/h_0 = 6.65$  et  $x_3/h_0 = 9.28$ . Ces points sont reportés sur la figure Fig. 4.6 (c) par trois lignes verticales et sont en accord avec les bras de couplage que donnent la DH réallouée.

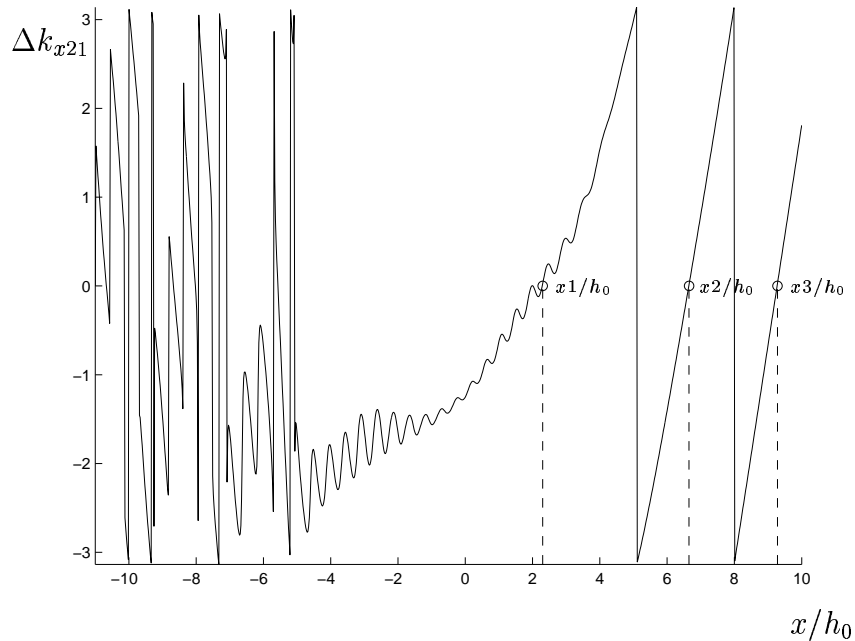


FIG. 4.8 – Désaccord de phase pour les modes  $m = 2$  et  $m = 1$ .

Pour  $x/h_0 \in [-11, -4]$ , les très faibles valeurs de  $|P_1(x)|$  interdisent toute interprétation de  $\Delta k_{21}(x)$ .

#### 4.4.2.2 Guide à géométrie elliptique

Le guide étudié dans cette section adopte une géométrie elliptique de paramètres  $a_e = 8$  et  $b_e = 0.25$  (Eq. 4.15). La source est simulée par le mode  $m = 1$ , et l'analyse locale s'effectue sur le segment de droite en  $y_a = 0.4$ . La diminution de la hauteur du guide implique, comme le montre la Fig. 4.9 (a), le passage du mode d'indice  $m = 2$  de l'état propagatif dans les sections droites du guide à l'état évanescent dans la partie à section variable, et se traduit par deux points tournants. Seuls les modes  $m = 0$  et  $m = 1$  sont totalement propagatifs. La DH et la DH réallouée données en Fig. 4.9 (b) et Fig. 4.9 (c) respectivement, indiquent la "non-propagation" du mode source. Deux couplages majeurs sont réalisés à l'entrée de la section variable avec les modes  $m = 0$  et  $m = 2$ . Le premier permet la transmission du mode plan à travers la section variable du guide et le second implique la réflexion du mode  $m = 2$ . Cependant, la méthode de réallocation met en évidence une inflexion dans le suivi des lois de dispersion que ce soit pour la réflexion du mode  $m = 2$ , ou pour le couplage avec le mode plan.

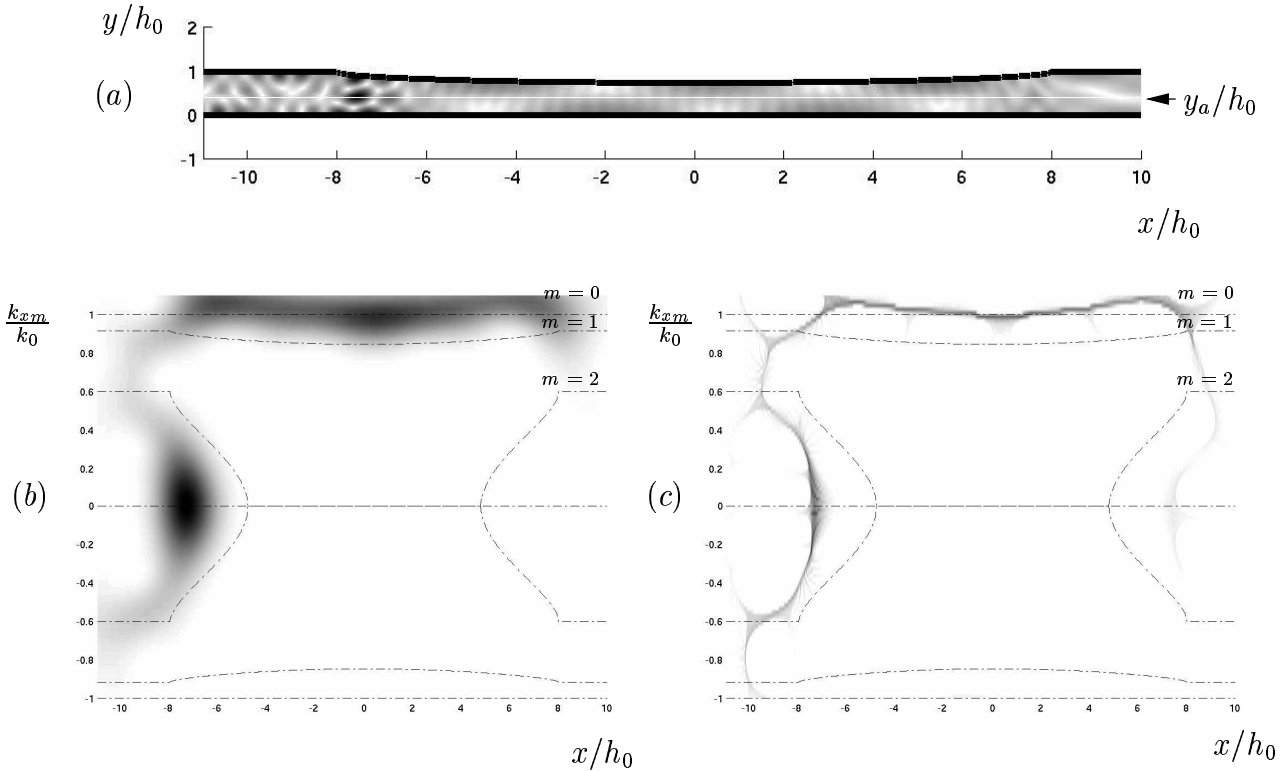


FIG. 4.9 – (a) : Module du champ de pression acoustique; (b) : Distribution de Husimi; (c) : Distribution de Husimi réallouée selon une dynamique en  $\sqrt{\rho^H}$ .

#### 4.4.3 Modes piégés

Pour des géométries liées à une augmentation de la hauteur du guide, certains modes peuvent rester piégés dans la partie à section variable. Un exemple concret, argumenté de justificatifs, est analysé ici.

### 4.4.3.1 Guide à géométrie cosinus de type 1

Un guide à section variable de géométrie cosinus de type 1 (Cf. Eq. (4.12)) est utilisé avec les paramètres  $a_{c1} = 1$  et  $L_{c1} = 12$ . La source est donnée par le mode  $m = 2$  et l'analyse locale est réalisée sur le segment de droite situé en  $y_a/h_0 = 0.48$ . Comme pour la géométrie gaussienne, les modes  $m = 0$ ,  $m = 1$  et  $m = 2$  sont "toujours" propagatifs, alors que les modes  $m = 3$  et  $m = 4$  ne sont propagatifs que dans la section variable du guide. La lecture de la DH et de la DH réallouée en Fig. 4.10 (b) et (c) annonce par une multitude de "bras" un grand nombre de couplages. Ces zones de couplage sont très bien localisées par le principe de la réallocation sur la DH représentée selon une dynamique en  $\sqrt{\hat{\rho}^H}$ . Le mode d'indice  $m = 3$  est alors excité et piégé. Celui-ci ne peut se propager dans les parties droites des deux extrémités du guide et reste confiné dans la partie à section variable réalisant des allers-retours entre les deux points tournants de ce mode. A l'entrée de la section variable, le troisième mode propagatif est réfléchi, alors qu'à la sortie, un couplage du mode piégé  $m = 3$  avec le mode  $m = 2$  permet la propagation de ce dernier dans la partie droite sortante.

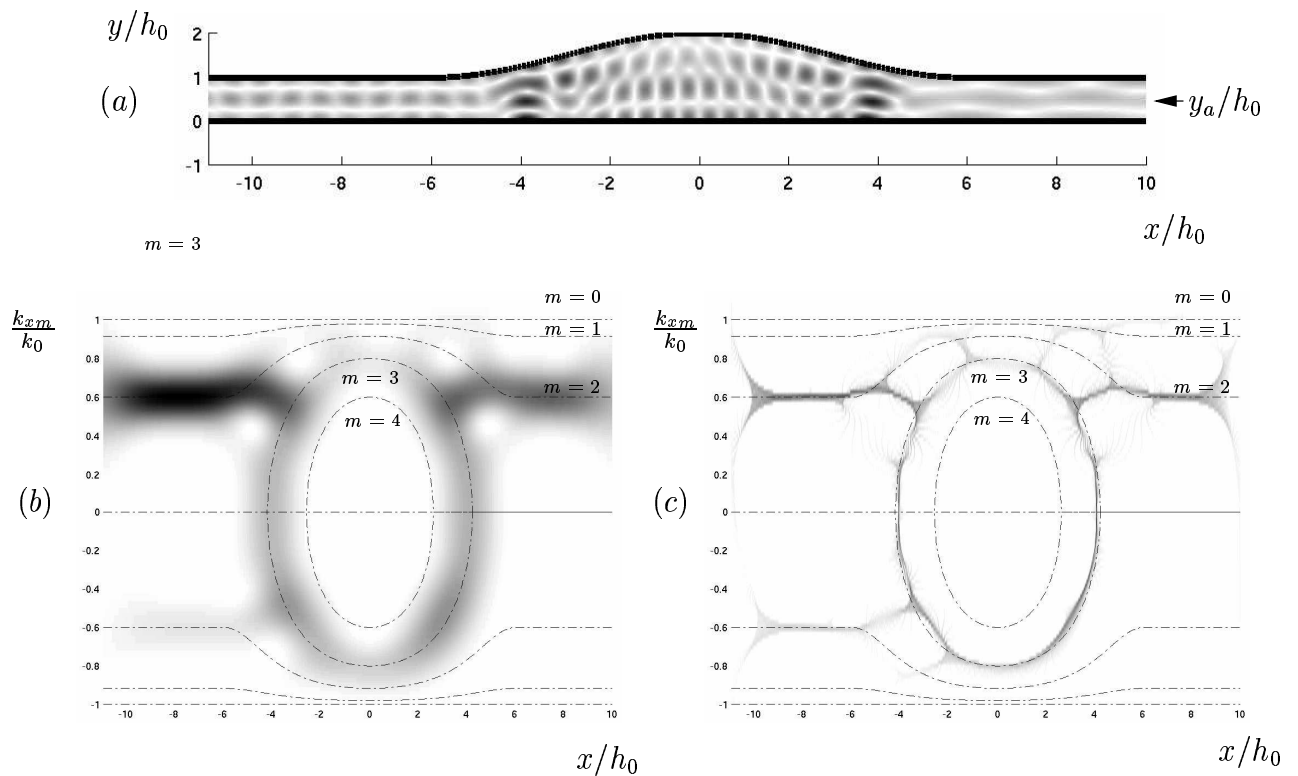
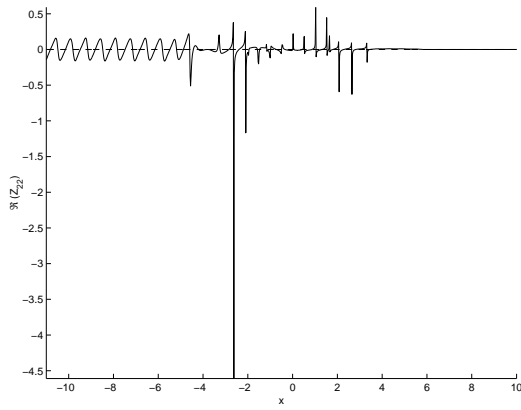


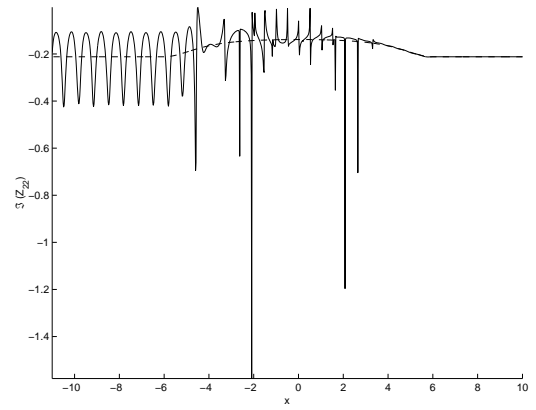
FIG. 4.10 – (a) : Module du champ de pression acoustique; (b) : Distribution de Husimi; (c) : Distribution de Husimi réallouée selon la dynamique  $\sqrt{\hat{\rho}^H}$ .

**Discussion sur l'impédance  $Z$  :** L'étude de la matrice impédance pour un guide de section variable (Eq. (4.9)) a déjà mis en évidence ce phénomène de modes piégés [13]. Il convient de retenir que la ou les sources ne sont pas considérées. Les valeurs diagonales de la matrice impédance, pour un mode propagatif tel  $Z_{22}$ , suivent les valeurs de l'impédance caractéristique correspondante  $Z_{c22}$  (lignes en pointillées). Par ailleurs, le couplage induit des oscillations autour des valeurs caractéristiques, y compris dans la partie à section constante en amont et témoignent de l'influence de la partie à section variable (Fig. 4.11 (a) et (b)). Pour l'impédance  $Z_{33}$  du mode piégé (Fig. 4.11 (c) et (d)), on observe entre les deux points tournants de  $Z_{c33}$  (lignes en pointillées) des pics caractéristiques d'une impédance de mode propagatif avec des conduits fermés (comportement en  $\tan(kx)$ ). Ce comportement traduit le fait que ce mode reste piégé dans la cavité. Enfin, pour un mode évanescent, tel que  $Z_{77}$ , cette impédance suit la valeur de l'impédance caractéristique en oscillant. Il y a inversion des parties réelles et imaginaires lors du passage "toujours propagatif - toujours évanescent".

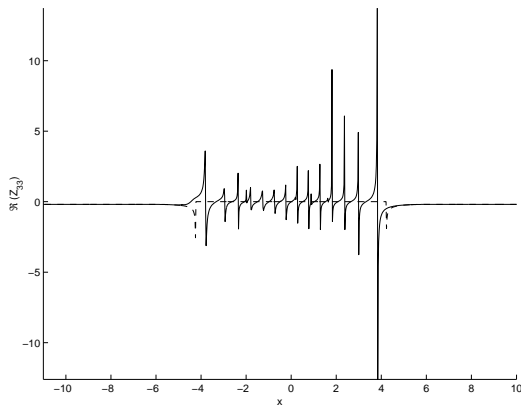
**Discussion sur le coefficient scalaire  $P_m(x)$  :** Les coefficients scalaires  $P_2(x)$ ,  $P_3(x)$  et  $P_7(x)$ , issus de l'équation (4.3), sont analysés en vue de confirmer, en présence d'une source, la propagation "totale" du mode  $m = 2$ , l'évanescence "totale" du mode  $m = 7$  et la capture du mode  $m = 3$ . Les Fig. 4.12 (a) et (b) traduisent pour les parties réelles et imaginaires une propagation sur tout l'axe des abscisses. Pour un mode évanescent, aucun signal n'est présent dans les guides droits, et une faible amplitude apparaît dans la section variable comme le montre les figures Fig. 4.12 (e) et Fig. 4.12 (f). Enfin, en Fig. 4.12 (c) et Fig. 4.12 (d), il y a présence d'un mode piégé avec une absence de signal dans les guides droits et de très fortes amplitudes dans la section variable.



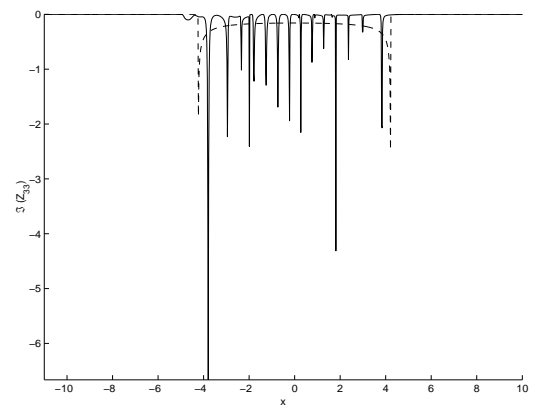
(a)



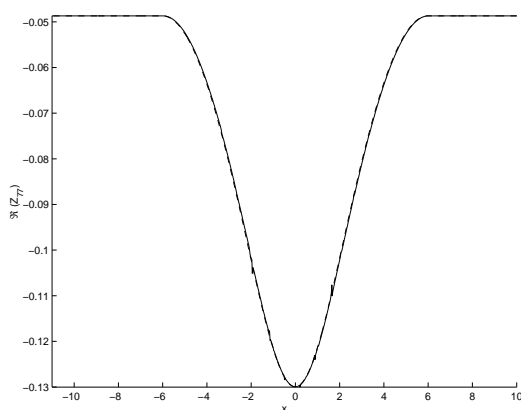
(b)



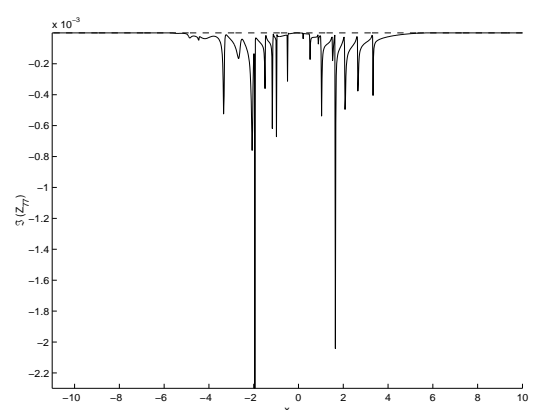
(c)



(d)

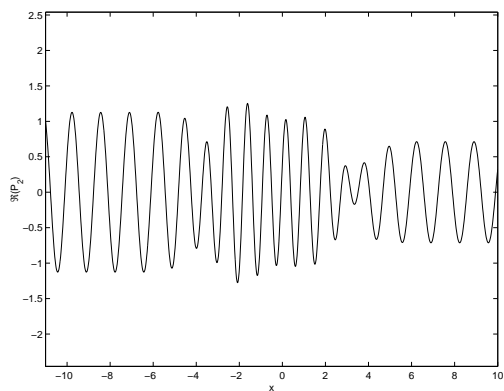


(e)

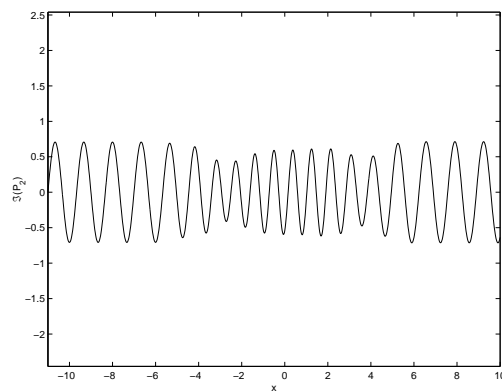


(f)

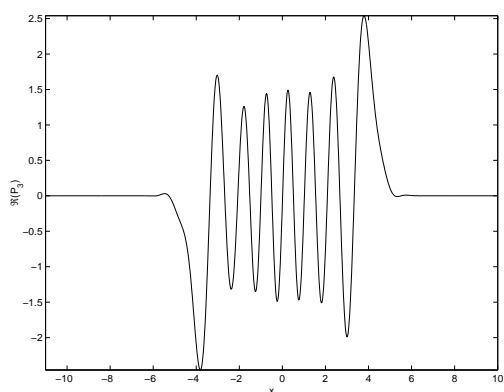
FIG. 4.11 – (a) :  $\Re(Z_{22})$ ; (b) :  $\Im(Z_{22})$ ; (c) :  $\Re(Z_{33})$ ; (d) :  $\Im(Z_{33})$ ; (e) :  $\Re(Z_{77})$ ; (f) :  $\Im(Z_{77})$ .



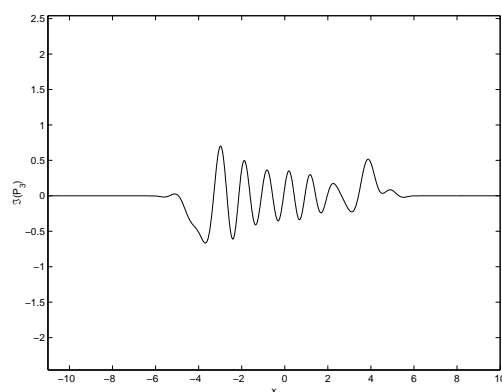
(a)



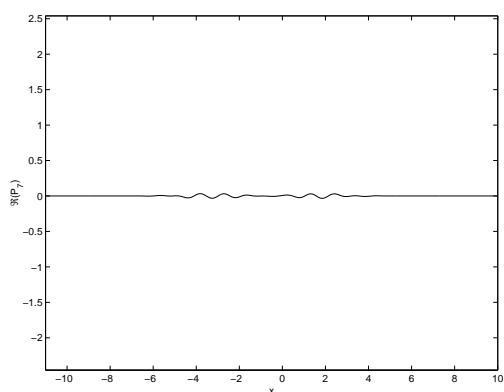
(b)



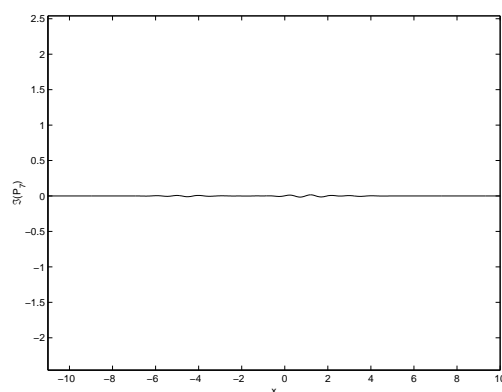
(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 4.12 – (a) :  $\Re(P_2(x))$ ; (b) :  $\Im(P_2(x))$ ; (c) :  $\Re(P_3(x))$ ; (d) :  $\Im(P_3(x))$ ; (e) :  $\Re(P_7(x))$ ; (f) :  $\Im(P_7(x))$ .



#### 4.4.4 Augmentation de la perturbation de géométrie $h(x)$

Le même guide que celui étudié en section §4.4.3.1 est analysé, mais pour un coefficient d'amplitude de  $a_{c1} = 2.1$ . La source est simulée par le mode  $m = 1$  et l'analyse locale s'effectue sur le segment de droite en  $y_a = 0$ . La DH et la DH réallouée, données respectivement en Fig. 4.13 (b) et Fig. 4.13 (c), annoncent la présence d'une multitude de couplages. En effet, en dehors de la partie à section variable, le mode source incident  $m = 1$  se couple avec le mode d'indice  $m = 2$ . Ces derniers se réfléchissent à l'entrée de la section variable. En sortie de la zone à perturbation de géométrie, les modes couplés d'indices  $m = 1$  et  $m = 2$  se propagent vers l'infini. Reste alors à analyser le contenu de la DH et de la DH réallouée dans la partie à section variable. En plus des trois modes "toujours propagatifs" d'indices  $m = 0$ ,  $m = 1$  et  $m = 2$ , se trouvent dans cette zone cinq modes "nouvellement" propagatifs d'indices  $m = 3$ ,  $m = 4$ ,  $m = 5$ ,  $m = 6$  et  $m = 7$ . Certaines bandes de dispersion de ces modes sont visualisées avec précision à l'aide de la DH réallouée, et sont mentionnées en Fig. 4.14. Les chiffres indiquent l'indice modal des relations de dispersion localement accentuées.

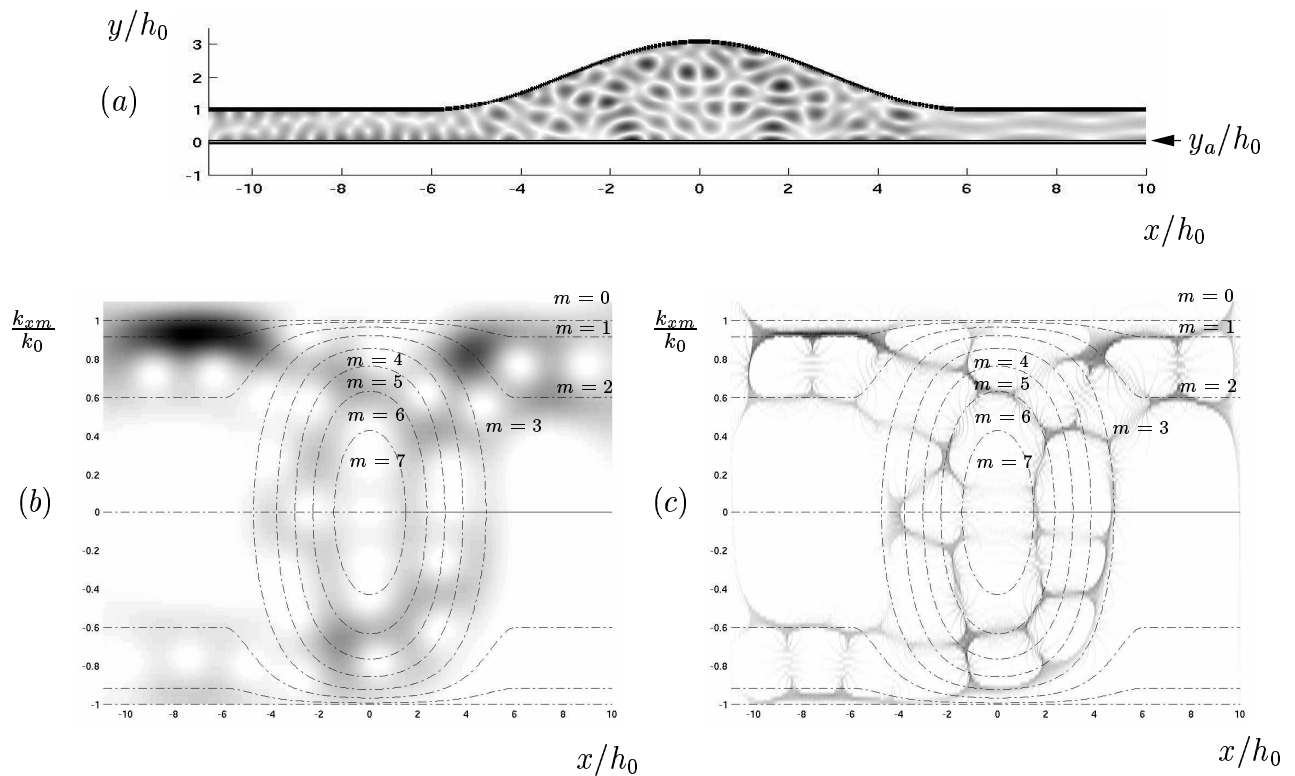


FIG. 4.13 – (a) : Module du champ de pression acoustique; (b) : Distribution de Husimi; (c) : Distribution de Husimi réallouée selon une dynamique en  $\sqrt{\hat{\rho}^H}$ .

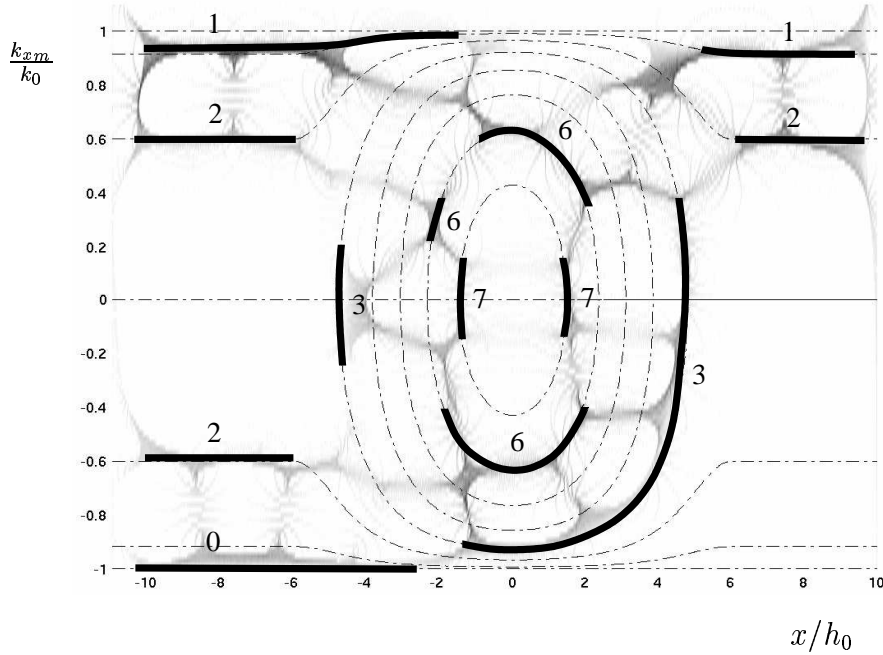


FIG. 4.14 – Classification des bandes de dispersion présentes dans la DH réallouée de la Fig. 4.13 (c).

#### 4.4.5 Régime harmonique "haute fréquence"

Le même guide cosinus de type 1 d'amplitude  $a_{c1} = 1$  et de période spatiale  $L_{c1} = 12$  est étudié (Eq. (4.12)) en augmentant le régime harmonique avec  $k = \frac{10.5\pi}{h_0}$ . Onze modes propagatifs sont donc présents dans les parties droites du guide. La source est simulée par le mode d'indice  $m = 5$  et l'analyse locale s'effectue sur le segment de droite en  $y_a = 0$ . La DH et la DH réallouée sont données en Fig. 4.15 (b) et Fig. 4.15 (c). La lecture de ces distributions informe sur l'incidence du mode  $m = 5$  et de la transmission en sortie de section variable des modes  $m = 8$ ,  $m = 9$  et  $m = 10$ . Cependant, aucune conclusion ne peut être avancée sur le régime évoluant dans la partie à section variable. A l'inverse de la section §4.4.4, où l'augmentation de la hauteur du guide impliquait un nombre conséquent de couplages entre modes, aucun caractère de ce type n'est visible. A l'image des travaux réalisés sur les billards, il est possible de s'intéresser à la dynamique des rayons dans une telle géométrie, à l'aide d'une carte de Birkhoff. Rappelons qu'à un mode  $\psi_m$  d'un guide droit sont classiquement associées deux ondes planes, se propageant dans les directions  $\theta_m = \sin^{-1}(m\pi/kh_0)$  et  $-\theta_m$ . Par interférence, ces deux ondes planes créent une onde transversale stationnaire qui n'est autre que  $\psi_m$  (section droite de gauche en Fig. 4.15 (a)). Par conséquent, la propagation de ce mode peut être envisagée en étudiant les trajectoires de deux familles de rayons, de directions  $\theta_m$  et  $-\theta_m$ . Considérons alors la propagation du mode d'indice  $m = 5$ . A la fréquence du régime harmonique, l'angle  $\theta_5 = 0.49$  rad. Rappelons que la carte de Birkhoff consiste à ne regarder que les positions et les angles des rebonds successifs des rayons.

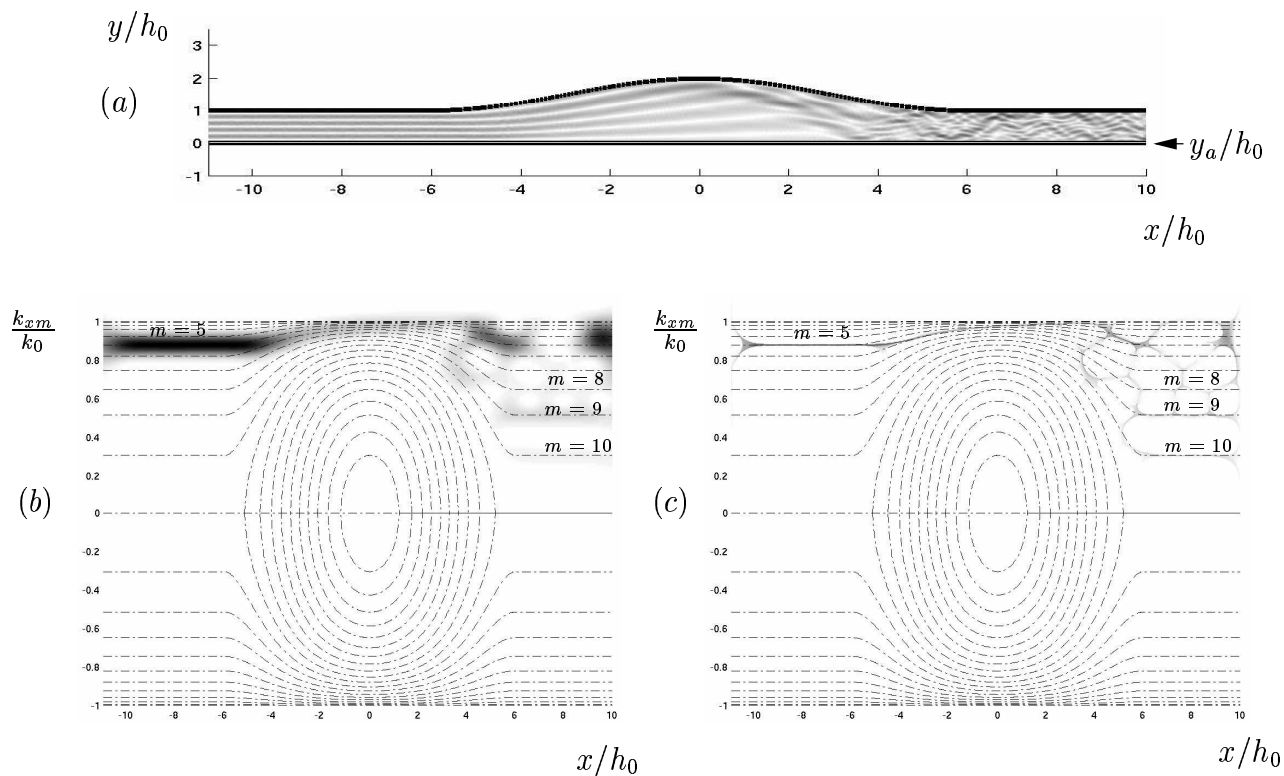


FIG. 4.15 – (a) : Module du champ de pression acoustique; (b) : Distribution de Husimi; (c) : Distribution de Husimi réallouée selon une dynamique en  $\sqrt{\hat{\rho}^H}$ .

L'évolution spatiale de la propagation du mode d'indice  $m = 5$  par la méthode des rayons est donnée en Fig. 4.16. La Fig. 4.17 compare alors la dynamique de la DH et de la DH réallouée avec la dynamique classique des rayons sur la frontière en  $y_a = 0$ . Cette approche simple des rayons permet d'interpréter l'évolution du champ de pression dans la partie à section variable du guide. En effet, l'approche classique corrobore avec l'approche ondulatoire donnée par les deux distributions. Le principe de réallocation est alors très performant et suit parfaitement la carte de Birkhoff.

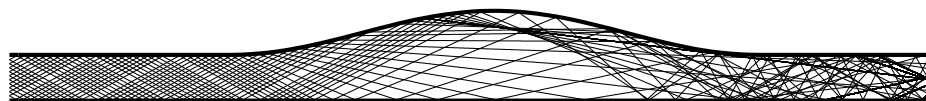


FIG. 4.16 – Propagation du mode  $\psi_5$  incident, à la fréquence  $kh_0/\pi = 10.5$ , par la méthode des rayons.

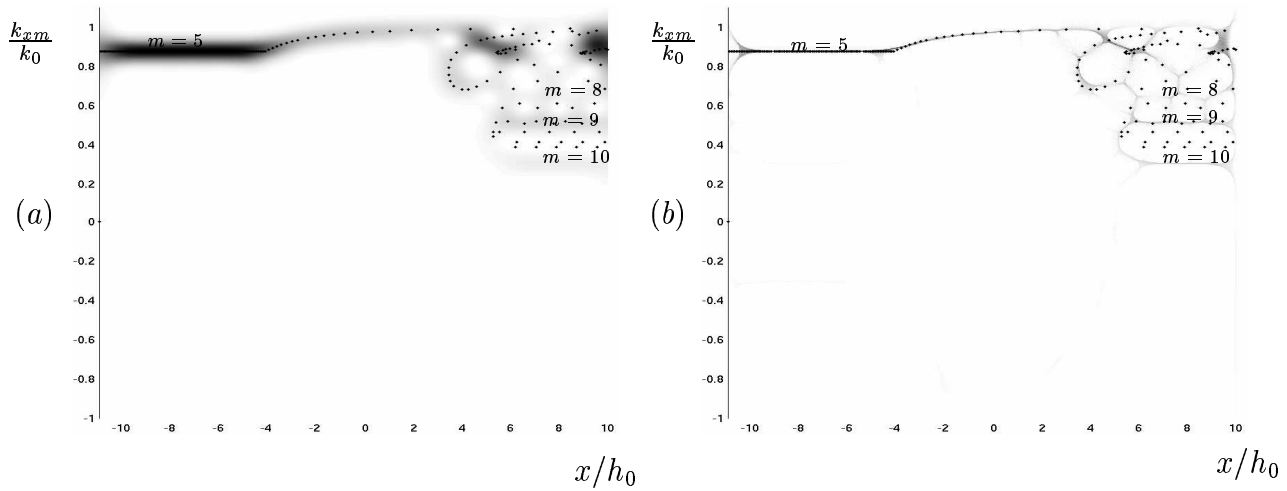


FIG. 4.17 – Approche de Birkhoff; (a) : Distribution de Husimi ; (b) : Distribution de Husimi réallouée avec une dynamique en  $\sqrt{\hat{\rho}^H}$ .

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre a permis d'illustrer, à l'aide de distributions dans l'espace des phases, les relations de dispersion dans un guide de section variable pour de faibles densités modales dans les guides droits. Dans un premier temps, des phénomènes de transition adiabatique, de couplage, de modes piégés ont été mis en évidence en s'appuyant sur les données de la théorie multimodale. La méthode de réallocation permet, grâce à ses bonnes propriétés de localisation de mieux visualiser ces phénomènes. Dans un second temps, une approche à plus haute fréquence a confirmé les travaux initiés par [11] autour de la matrice de diffusion.

## Annexe A

Dans cette annexe, la résolution du problème de Helmholtz longitudinal présent au §4.4.1.1 est obtenue par une méthode analytique approchée, l'approximation B.K.W. Cette méthode permet de résoudre de façon approchée le problème,

$$\frac{d^2}{dx^2} P_m^{BKW}(x) + [k^2 - \alpha_{xm}^2] P_m^{BKW}(x) = 0, \quad (A1)$$

lorsque  $[k^2 - \alpha_{xm}^2]$  varie "assez lentement". Nous introduisons le module et l'argument de  $P_m^{BKW}(x)$  :

$$P_m^{BKW}(x) = |P_m^{BKW}(x)| e^{ik_{xm}}, \quad (A2)$$

avec la constante de propagation locale,

$$k_{xm} = \sqrt{k^2 - \alpha_{xm}^2}. \quad (A3)$$

La solution approchée correspondante de l'équation (A1) est

$$P_m^{BKW}(x) \simeq e^{\pm ik_{xm}}. \quad (A4)$$

Les conditions nécessaires afin de valider l'approximation (A4) sont

$$\frac{d(\ln k_{xm})}{k_{xm} dx} \ll 1, \quad (A5)$$

ou

$$\left| \frac{(\partial \alpha_{xm} / \partial x)}{2(k^2 - \alpha_{xm}^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \ll 1. \quad (A6)$$

Il est alors évident de constater que l'équation (A4) n'est pas valable pour  $(\partial \alpha_{xm} / \partial x) \gg 1$  et au voisinage des zéros de  $(k^2 - \alpha_{xm}^2)$ , appelés points tournants. Une solution plus efficace, tenant compte des conditions de validation de la solution, prend la forme

$$P_m^{BKW}(x) \simeq e^{\varphi(x)}. \quad (A7)$$

La fonction  $\varphi(x)$  satisfait l'équation

$$(\varphi')^2 + \varphi'' + k_{xm}^2 = 0. \quad (A8)$$

C'est une équation non linéaire du premier ordre pour  $\varphi'$ . Cette équation est résolue par une procédure itérative, dans laquelle  $\varphi'$  est considérée comme une fonction "douce". Alors,

$$(\varphi')^2 \simeq -k_{xm}^2 + \left( \frac{i}{2k_{xm}} \right) \left[ \left( \frac{\partial \alpha_{xm}}{\partial x} \right) + \left( \frac{i}{2k_{xm}} \right) \left( \frac{\partial^2 \alpha_{xm}}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{i}{2k_{xm}^2} \right) \left( \frac{\partial \alpha_{xm}}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (A9)$$

Nous avons pour ce développement les mêmes conditions de validation que précédemment, c'est-à-dire au voisinage des points tournants  $k_{xm} = \sqrt{k^2 - \alpha_{xm}^2}$  et pour une fluctuation rapide de  $\alpha_{xm}$ . En prenant les deux premiers termes de ce développement, il en résulte la solution générale finale,

$$P_m^{BKW}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{k_{xm}}} e^{\pm i \int k_{xm} dx}. \quad (A10)$$



# Bibliographie

- [1] K. Kodera, C. De Villedary & E.J. R. Gendrin “A new method for the numerical analysis of nonstationnary signals,” *Phys. Earth and Plan. Int.*, **12**, 142-150 (1976).
- [2] F. Auger & P. Flandrin “Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method,” *IEEE Trans. Signal Proc.*, **SP-43**(5), 1068-1089 (1995).
- [3] E. Chassande-Mottin “Méthode de réallocation dans le plan temps-fréquence pour l’analyse et le traitement de signaux non stationnaires,” thèse de Doctorat, Université de Cergy-Pontoise (28 Septembre 1998).
- [4] P. Flandrin, J. Sageloli, J.P. Sessarego & M. Zakharia “Application of time-frequency analysis to the characterization of surface waves on elastic targets,” *Acoust. Lett.*, **10**(2), 13-28 (1986).
- [5] K. Husimi, “Some formal properties of the density matrix,” *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.* **22**, 264 (1940).
- [6] M. Niethammer, L. Jacobs, J. Qu & J. Jarzynski “Time-frequency representations of Lamb waves,” *J. Acoust. Soc. Am.* **109**(5), 1841-1847 (2001).
- [7] K. Luangvilai, W. Punurai & L. Jacobs “Guided Lamb wave propagation in composite plate/concrete component,” *Journal of Engineering Mechanics* **128**(12), 1337-1341 (2002).
- [8] C. Valle, M. Niethammer, J. Qu & L. Jacobs “Crack characterization using guided circumferential waves,” *J. Acoust. Soc. Am.* **110**(3), 1282-1290 (2001).
- [9] V. Pagneux, N. Amir & J. Kergomard, “A study of wave propagation in varying cross section waveguides by modal decomposition,” *J. Acoust. Soc. Am.* **100**, 2034-2048 (1996).
- [10] N. Amir, V. Pagneux & J. Kergomard, “A study of wave propagation in varying cross section waveguides by modal decomposition - Part II : Results,” *J. Acoust. Soc. Am.* **101**(5), 2504-2517 (1997).
- [11] J.A. Méndez-Bermúdez, G.A. Luna-Acosta, P. Šeba & K.N. Pichugin “Understanding quantum scattering properties in terms of purely classical dynamics : Two-dimensional open chaotic billiards,” *Physical Review E* **66**, 46207 (2002).
- [12] G.A. Luna-Acosta, J.A. Méndez-Bermúdez, P. Šeba & K.N. Pichugin “Classical versus quantum structure of the scattering probability matrix : Chaotic waveguides,” *Physical Review E* **65**, 46605 (2002).

- [13] V. Pagneux "Propagation acoustique dans les guides à section variable et effets d'écoulement," Thèse de doctorat, Université du Maine, (1996).
- [14] P. Morse & H. Feshbach, "Method of theoretical physics," Mc Graw-Hill (1953).
- [15] J.M. Tualle & A. Voros "Normal modes of billiards portrayed in the stellar (or nodal) representation," Chaos, Solitons & Fractals **5**(7), 1085-1102 (1995).
- [16] C. Vassalo, "Théorie des guides d'ondes électromagnétique," Eyrolles (1985).



# Conclusions et perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire ont pour cadre l'analyse locale d'un champ acoustique issu d'un guide d'onde à section variable ou d'un billard, à l'aide de représentations conjointes dans le domaine espace-nombre d'onde. Deux principes d'analyse sont abordés : le spectre local et l'analyse de Birkhoff.

Après avoir présenté et discuté des différentes distributions bilinéaires évoluant dans l'espace des phases, une première étude à but pédagogique a été réalisée et validée sur un guide droit. Deux sources de natures différentes (faisceau gaussien et point source) ont été simulées. La première méthode d'analyse locale consiste à fenêtrer autour d'un point d'analyse  $(x, y)$  le champ acoustique, puis à appliquer différentes distributions évoluant dans l'espace  $(x, y, k_x, k_y)$ . Plus précisément, quatre distributions ont été abordées, la distribution de Husimi, la pseudo distribution de Wigner-Ville, la S-distribution, et la pseudo distribution de Wigner-Ville lissée. Ces distributions ont un comportement semblable à l'approche "rayons". Dans la suite du document, la DH a été privilégiée, car elle génère peu d'interférences, même si elle ne localise que moyennement l'information. Une fois la résolution d'un problème simple validée, deux problèmes plus complexes ont été abordés : l'étude d'une chambre d'expansion brusque et celle d'un billard annulaire ouvert. Pour de tels guides, et selon les conditions de rayonnement de la source, des phénomènes de diffraction (ainsi que la présence d'ondes rampantes dans le cas du billard annulaire ouvert) contribuent à former le champ acoustique dans les zones d'ombre des guides. En dehors de ces zones d'ombre, plusieurs caractéristiques du champ modal ont été discutées, des "galeries à échos" pour le billard ouvert, ou la présence - ou non - des deux familles de rayons composant un mode pour la chambre d'expansion brusque.

Dans le chapitre 3, ont été étudiés des systèmes de type billards, dont le comportement classique est régulier, mixte ou chaotique. Un intérêt particulier a été porté sur l'étude de fonctions propres en présence de cicatrices, pour le billard carré (dynamique régulière), le billard annulaire (dynamique mixte) ou le stade de Bunimovich (dynamique classique). La distribution de Husimi permet de visualiser des cicatrices dans la section quantique de Poincaré, et de pouvoir comparer ces données avec l'approche classique donnée par la carte de Birkhoff. Une méthode de réallocation permet par ailleurs d'améliorer la localisation de la distribution de Husimi. Les résultats obtenus avec cette méthode approchent sensiblement la dynamique rayon obtenue par la carte de Birkhoff du système considéré. Quelques orbites stables ont été localisées sur le billard carré et le billard annulaire à l'aide de ce principe. Pour le stade de Bunimovich, le concept d'hyperbolicité est d'une importance capitale pour

expliquer l'évolution spatiale d'une cicatrice au sein d'une fonction propre. Chaque orbite périodique instable possède en effet deux variétés, stable et instable. La méthode de réallocation refocalise alors la distribution de Husimi sur les deux variétés de la cicatrice, ceci en présence d'une ou de plusieurs cicatrice(s) dans le même état propre.

Enfin, la propagation multimodale à faible densité a été étudiée, dans le cas d'un guide d'onde d'axe rectiligne de section variable. Le champ dans un tel guide d'onde a été simulé selon la formulation multimodale. Des analyses locales ont été réalisées sur un segment de droite, d'amont en aval du guide, afin de visualiser les relations de dispersion des modes propagatifs. Plusieurs géométries axisymétriques à section variable sont abordées afin d'illustrer des phénomènes de propagation multimodale, couplage de modes, transition adiabatique, ou modes piégés. La méthode de réallocation, grâce à ses bonnes propriétés de relocalisation, permet de mieux visualiser des bandes de dispersion, ainsi que les couplages qui apparaissent lors de la propagation. En augmentant la densité modale de l'ordre d'une dizaine de modes dans le conduit en amont de la section variable, un couplage entre l'entrée et la sortie (au sens de la matrice de diffusion) est assuré. De plus, le régime au sein de la partie à section variable a été attesté selon l'approche rayon (carte de Birkhoff).

Comme déjà évoqué, l'interprétation de ces distributions énergétiques est semblable à l'approche géométrique. Sur la base des résultats déjà acquis et rappelés précédemment, il serait souhaitable de s'intéresser à l'amplitude des distributions ainsi qu'à leur interprétation vis-à-vis de leur comportement rayon. De même, la méthode de réallocation, appliquée à l'étude de fonctions propres de billards selon une analyse de Birkhoff, peut être étendue à quatre dimensions avec le principe du spectre local. De plus, suite aux travaux présentés au chapitre 4, une étude plus systématique de l'influence de la fréquence et de la perturbation de géométrie  $h(x)$  peut maintenant être effectuée afin de proposer une famille d'éléments de guides (coupleurs, affaiblisseurs, oscillateurs, etc..) répondant à un cahier des charges donné (comme cela existe déjà en électromagnétisme, plus particulièrement en hyperfréquence).

D'un point de vue des perspectives d'applications des résultats obtenus lors de cette thèse, il est possible d'envisager des applications en acoustique sous-marine ou dans le domaine de la caractérisation de structures vibrantes. En acoustique sous-marine, l'analyse doit permettre de résoudre un problème inverse afin de localiser une ou plusieurs sources (en supposant les propriétés du guide connues). Pour ce qui est des vibrations de structures assemblées, constituées de sous-structures de type poutre, plaque ou coque, une attention particulière se porte sur le rôle des jonctions entre ces sous-structures. Si on veut maîtriser les niveaux vibratoires induits par des sources d'excitation mécaniques sur une structure assemblée, il est nécessaire d'identifier et de quantifier les couplages entre les sous-structures. Différentes analyses locales peuvent alors être envisagées au voisinage des liaisons entre les structures.