Académie de Nantes
ECOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE
LE MANS, FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT
Spécialité : ACOUSTIQUE

présentée par

Mohamed AMARI

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

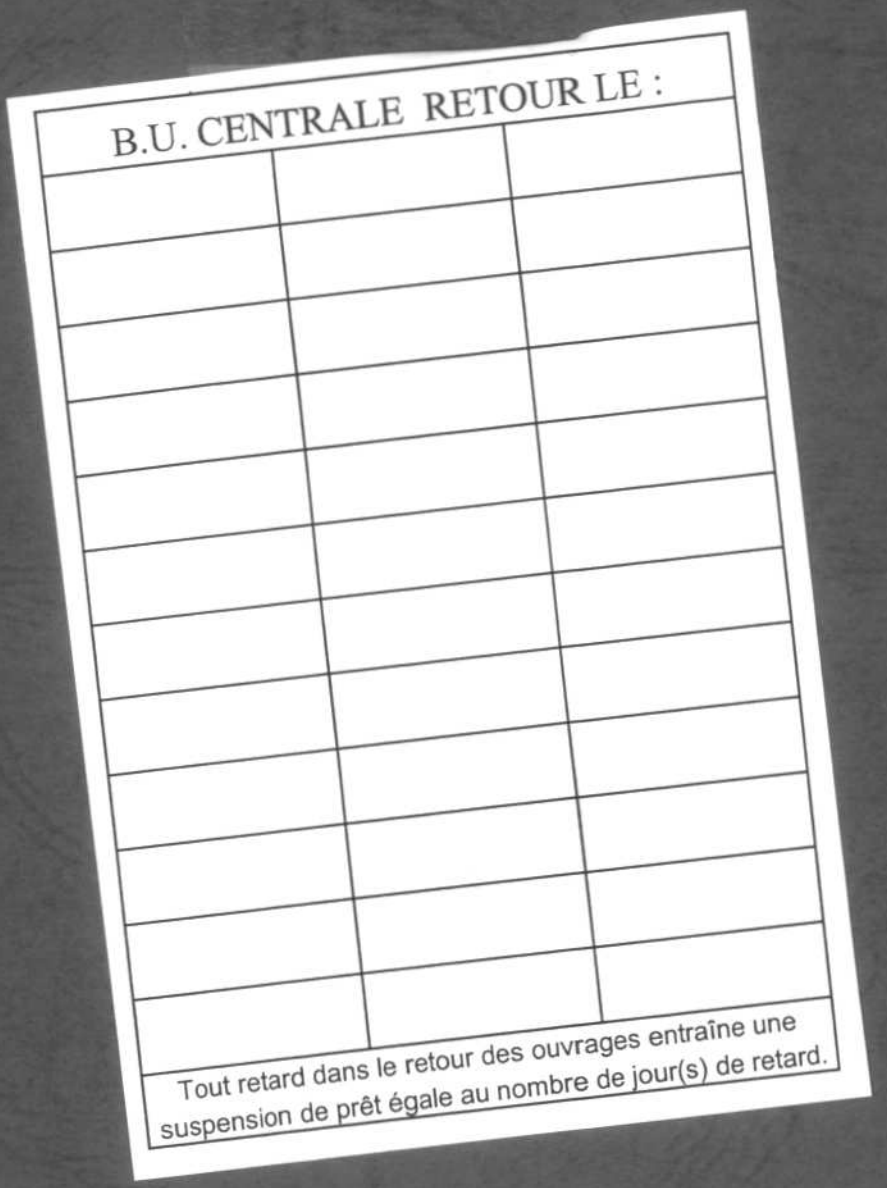
ETUDE DES ÉCOULEMENTS REDRESSÉS EN RÉGIME TRANSITOIRE DANS DES RÉSONATEURS ANNULAIRES À ONDES PROGRESSIVES ET STATIONNAIRES

Soutenue le 30 mars 2004

devant le jury composé de :

F. COULOUVRAT	Chargé de recherche, LMM, Paris	rapporteur
S. DOS SANTOS	Maître de conférences, LUSSI-GIP Ultrasons, Blois	examinateur
J. GILBERT	Chargé de recherche, LAUM, Le Mans	examinateur
V. GUSEV	Professeur, LPEC, Le Mans	co-directeur
N. JOLY	Maître de conférences, LAUM, Le Mans	co-directeur
L. MONGEAU	Professeur, RWHL, Indiana (USA)	rapporteur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DU MANS
M026394


B.U. CENTRALE RETOUR LE :
Tout retard dans le retour des ouvrages entraîne une suspension de prêt égale au nombre de jour(s) de retard.

Th.S. 2664

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs Vitalyi Gusev et Nicolas Joly pour la confiance qu'ils m'ont accordée ainsi que pour leur disponibilité. Je remercie également les rapporteurs et membres du Jury qui ont accepté de juger mon travail.

Je remercie chaleureusement Samuel Gougeon pour ses conseils pertinents qui m'ont fait économiser un temps considérable. Je témoigne également ma reconnaissance à Sébastien Ollivier qui m'a réservé un accueil humain et m'a fait profiter de son expérience à mon arrivée au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine.

J'adresse un remerciement particulier à Mohammed Kherraz pour son soutien d'outre-mer tout en espérant être à la hauteur de sa confiance en moi. Enfin, je remercie mon directeur en magister, Kadi Lamine de l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran, qui a soutenu ma candidature à l'obtention de la bourse de thèse.

Table des matières

Notations ..... **vii**

Tables des figures ..... **xi**

Introduction **1**

1 Equations générales des écoulements redressés **11**

1.1 Equations de base 11

1.2 Méthode des approximations successives 13

1.3 Mise en équation des écoulements redressés 14

1.3.1 Conservation de masse 14

1.3.2 Conservation de quantité de mouvement 16

1.3.3 Conservation de l'énergie 18

1.3.4 Remarques 20

1.4 Approximation fluide incompressible 20

1.5 Approximation couche limite 21

1.6 Conclusion 24

2 Génération d'ondes progressives dans des résonateurs annulaires **25**

2.1 Développement d'une géométrie toroïdale en une géométrie droite 26

2.2 Propagation d'onde acoustique dans un conduit droit 27

2.2.1 Interaction de l'onde acoustique avec les parois du conduit 28

2.2.2 Approximation couche limite 29

2.2.3 Calcul du champ acoustique 29

2.3 Ondes progressives dans l'acoustitron 31

2.3.1 Equation de propagation de la pression 31

2.3.2 Régimes d'interaction quasi-adiabatique et quasi-isotherme 33

2.4 Ondes progressives dans le résonateur de Ceperley 37
2.4.1 Résolution de l'équation de propagation de l'onde 37
2.4.2 Solution propagative en régime quasi-adiabatique 39
2.5 Conclusion 41

3 Ecoulements redressés instationnaires dans l'acoustitron et le résonateur de Ceperley 43
3.1 Modélisation analytique des écoulements redressés en présence d'un champ acoustique propagatif 45
3.2 Ecoulements redressés dans l'acoustitron 50
3.2.1 Distributions spatiales des forces et des vitesses 50
3.2.1.1 Profils des forces excitatrices 50
3.2.1.2 Analyse spectrale des profils de force 52
3.2.1.3 Analyse spectrale des profils de vitesse stationnaire 54
3.2.2 Moyenne spatiale des vitesses d'écoulement 56
3.2.2.1 Régime d'écoulement stationnaire 57
3.2.2.2 Régime d'écoulement transitoire 60
3.2.3 Investigation des processus de stabilisation de l'écoulement redressé 62
3.2.3.1 Régimes d'écoulement moyen monotones 62
3.2.3.2 Régimes d'écoulement moyen non monotones 66
3.2.4 Temps caractéristique de l'établissement de l'écoulement redressé 69
3.2.4.1 Ecoulements redressés partiels 70
3.2.4.2 Ecoulement redressé total 72
3.3 Ecoulements redressés dans le résonateur de Ceperley en présence de champs acoustiques propagatif et stationnaire 76
3.3.1 Champ acoustique propagatif pur 76
3.3.2 Champ acoustique à composantes propagative et stationnaire 81
3.4 Application aux machines thermoacoustiques annulaires 84
3.5 Discussion des limites d'applicabilité du modèle analytique proposé 86

3.6 Conclusion 88

4 Modélisation numérique des écoulements redressés instationnaires dans des résonateurs annulaires 89

4.1 Contraintes numériques en simulation des machines thermoacoustiques 89

4.2 Modèle proposé et validation 91

4.3 Application aux résonateurs de Ceperley équipés de stack fin 97

4.4 Conclusion 107

Conclusions et perspectives 109

A Contraintes adimensionnelles de Reynolds 113

Références bibliographiques 115

Notations

a	célérité adiabatique du son
b	distance séparant deux sources excitatrices
c	constante de Kirchhoff
c_a	vitesse de propagation de l'excitation le long des parois de l'acoustitron
c_p	chaleur spécifique à pression constante
c_v	chaleur spécifique à volume constant
C_F	coefficient de proportionnalité spécifique à la force excitatrice de l'écoulement redressé
C_v	coefficient de proportionnalité spécifique à la vitesse de l'écoulement redressé
d	largeur d'une source excitatrice
D	diamètre de la section transversale du conduit
D_s	distance séparant deux plaques consécutives du stack
E_{dis}	puissance calorifique due à la dissipation de l'énergie cinétique par effet de viscosité
f	fréquence de l'onde acoustique
$f_{v,k}$	valeurs des fonctions $\Phi_{v,k}$ pour $\eta = 1$
$\mathbf{F} = (F_x, F_y)$	vecteur des sources de force pour un écoulement bidimensionnel
F_i	composante de la force volumique excitatrice d'écoulement redressé issue du champ acoustique ($i = 1...3$)
F_k	fonction décrivant la distribution transversale du champ de température acoustique dans le conduit
F_n	nième composante spectrale spatiale de la force excitatrice

$F_x (= F_{x1} + F_{x2} + F_{x3})$	force axiale excitatrice de l'écoulement redressé
F_v	fonction décrivant la distribution transversale du champ de vitesse acoustique dans le conduit
$h = -(c_p - c_v)/(\underline{\beta} p)$	coefficient calorimétrique
I_a	intensité acoustique axiale
k	nombre d'onde acoustique
k_0	nombre d'onde acoustique adiabatique
k_a	nombre d'onde de la propagation de l'excitation le long des parois de l'acoustitron
L	longueur du conduit
L_s	longueur du stack
L_x	longueur caractéristique à la variation du champ de pression suivant la coordonnée axiale
$\mathbf{M}$	flux de masse
n	nombre entier
n_p	nombre de plaques du stack
p	pression du fluide
q_s	source de chaleur
R_0	rayon de la circonférence décrite par le centre de la section transversale du résonateur annulaire
R_φ	rapport des composantes stationnaire et propagative de l'onde acoustique
s	entropie massique du fluide
t	temps
T	température du fluide
$\mathbf{U}$	vitesse de transport de masse
$\mathbf{u} = (u_x, u_y)$	vitesse particulaire pour un écoulement bidimensionnel
$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$	vitesse particulaire
v_0	amplitude de la vitesse des vibrations des sources excitatrices
$v_a(x,t)$	champ de vitesse fluctuant normal aux parois de l'acoustitron
v_{mx}	vitesse axiale de l'écoulement redressé

v_n	nième composante spectrale spatiale de la vitesse de l'écoulement redressé
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$	vecteur position d'une particule fluide
x	coordonnée axiale
y	coordonnée transversale
z	coordonnée suivant la direction orthogonale au plan (x,y)
β	paramètre reliant la viscosité à la température du fluide
$\underline{\beta}$	coefficient d'augmentation de pression isochore
χ	conductivité thermique du fluide
δ	fonction de Dirac
δ_{ij}	symbole de Kronecker
δ_k	épaisseur de la couche limite thermique
δ_v	épaisseur de la couche limite visqueuse
$\gamma = c_p / c_v$	rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants
η	coordonnée transversale adimensionnelle
$\hat{\eta}$	vecteur unitaire suivant la direction transversale
$\Im_{ij}$	élément (i, j) du tenseur des contraintes visqueuses
φ	déphasage entre les excitations des sources du résonateur annulaire de Ceperley
$\Phi_{v,k}$	intégrale de $F_{v,k}$ entre 0 et η
κ	diffusivité thermique du fluide
λ	longueur d'onde acoustique
λ_a	longueur d'onde de la vibration des parois de l'acoustitron
μ	viscosité dynamique de cisaillement du fluide
ν	viscosité cinématique du fluide
θ	temps adimensionnel
ρ	masse volumique du fluide
σ	nombre de Prandtl
$\sigma_{1,2}$	contraintes de Reynolds
τ	période acoustique

τ_c	temps caractéristique
ω	pulsation de l'onde acoustique
ξ	viscosité dynamique de volume du fluide

Indices

0, 1, 2, ...	ordres de perturbation acoustique
c	caractéristique
cr	critique

Exposants

a	adimensionnel
*	valeur complexe conjuguée
+	direction propagative d'une onde (sens positif des x)
-	direction contre propagative d'une onde (sens négatif des x)

Autres notations

$\mathrm{Im}(\cdots)$	partie imaginaire
$\mathrm{Re}(\cdots)$	partie réelle
exposant ou *indice* **s**	stack
exposant ou *indice* **w**	guide d'onde
exposant **ws**	guide d'onde $\oplus$ stack
$<\cdots>$ ou *indice* **m**	moyenne temporelle sur une période acoustique
$\overline{\cdots}$	moyenne spatiale le long de la section transversale du conduit
$\underset{\sim}{\cdots}$	amplitude complexe

Table des figures

1 Vortex de Rayleigh et dans les couches limites d'un résonateur fermé. 2

2 Ecoulement redressé de Gedeon dans la machine thermoacoustique annulaire de Ceperley. 2

3 Schéma de la pompe ultrasonique de Rudenko et coll. [34]. 7

4 Processus de développement de l'instabilité thermoacoustique dans un moteur annulaire [36]. 7

1.1 Schéma d'un conduit droit. 22

2.1 Géométrie toroïdale. 26

2.2 Tore développé en géométrie droite équivalente. 27

2.3 Schéma de l'acoustitron. 31

2.4 Evolution du rapport de vitesses (c_a / a_0) en fonction du rapport (δ_v / D). 35

2.5 Evolution du module de l'amplitude de pression p_a normalisée par rapport à la pression caractéristique p_c ($| p_a | / p_c$) en fonction du rapport (δ_v / D). 36

2.6 Schéma du résonateur de Ceperley. 38

3.1 Profils des forces adimensionnelles F_{x1}^a, F_{x2}^a et F_x^a pour différentes valeurs du rapport (δ_v / D).

(a) $\delta_v / D = 10^{-2}$. (b) $\delta_v / D = 10^{-1}$. (c) $\delta_v / D = 1$. (d) $\delta_v / D = 10$. 51

3.2 Spectres spatiaux des forces adimensionnelles F^a_{x1} et F^a_{x2} pour différentes valeurs du rapport (δ_ν / D).

Les figures (a) et (b) correspondent respectivement à F^a_{x1} et F^a_{x2}. 53

3.3 Spectres spatiaux des vitesses adimensionnelles stationnaires v^a_{mx1} et v^a_{mx2} pour différentes valeurs du rapport (δ_ν / D).

Les figures (a) et (b) correspondent respectivement à v^a_{mx1} et v^a_{mx2}. 55

3.4 Evolution des vitesses moyennes adimensionnelles stationnaires $\overline{v}^a_{mx1}$, $\overline{v}^a_{mx2}$ et $\overline{v}^a_{mx}$ en fonction du rapport (δ_ν / D). 60

3.5 Evolution temporelle des vitesses adimensionnelles $\overline{v}^a_{mx}$. Evolution monotone en régimes quasi-isotherme $((\delta_\nu / D) = 3)$ et quasi-adiabatique $((\delta_\nu / D) = 0.1$ et $(\delta_\nu / D) = 2 \cdot 10^{-2})$. Evolution non monotone en régime quasi-adiabatique aigu $((\delta_\nu / D) = 10^{-2})$. 61

3.6 Evolution de la vitesse moyenne adimensionnelle v^a_{mx} en fonction du temps adimensionnel θ en différents points η de la section transversale de l'acoustitron. Deux cas limites sont considérés : (a) le régime quasi-adiabatique $(\delta_\nu / D = 0.1)$, (b) le régime quasi-isotherme $(\delta_\nu / D = 3)$. La vitesse adimensionnelle v^a_{max} est le maximum de la valeur absolue des vitesses adimensionnelles stationnaires v^a_{mx} le long de la section transversale du guide d'onde. 63

3.7 Profils de la vitesse adimensionnelle v^a_{mx} en différentes valeurs du temps adimensionnel θ. Deux cas limites sont considérés : (a) le régime quasi-adiabatique $(\delta_\nu / D = 0.1)$, (b) le régime quasi-isotherme $(\delta_\nu / D = 3)$.La vitesse adimensionnelle v^a_{max} est le maximum de la valeur absolue des vitesses adimensionnelles stationnaires v^a_{mx} le long de la section transversale du guide d'onde. 64

3.8 Profils des vitesses adimensionnelles $v^a_{mx1,2}$ normalisés à l'unité, en différents temps adimensionnels θ, en un régime quasi-adiabatique et non monotone ($\delta_v / D = 10^{-2}$). 67

3.9 Profils des vitesses adimensionnelles v^a_{mx} normalisés à l'unité, en différents temps adimensionnels θ, en un régime quasi-adiabatique et non monotone ($\delta_v / D = 10^{-2}$). 68

3.10 Evolution temporelle de la vitesse moyenne adimensionnelles $\overline{v}^a_{mx}$ dans une transition d'un régime monotone à un régime non monotone au voisinage de la valeur critique $(\delta_v / D)_{cr} \approx 1.3 \cdot 10^{-2}$. 69

3.11 Définition du temps caractéristique pour une stabilisation monotone de l'écoulement redressé. 70

3.12 Evolution du temps caractéristique adimensionnel de la stabilisation de l'écoulement redressé θ_c en fonction du rapport (δ_v / D): pour l'écoulement partiel monotone excités par F_{x1} (1), pour l'écoulement partiel monotone excités par F_{x2} (2), pour l'écoulement total monotone (3), pour l'écoulement total non monotone (4). 71

3.13 Définition du temps caractéristique pour une stabilisation non monotone de l'écoulement redressé. 75

3.14 Profils des forces adimensionnelles F^a_{x1}, F^a_{x2} et F^a_x pour différentes valeurs du rapport (δ_v / D). (a) $\delta_v / D = 10^{-2}$. (b) $\delta_v / D = 10^{-1}$. 77

3.15 Spectres spatiaux des forces adimensionnelles F^a_{x1} et F^a_{x2} pour différentes valeurs du rapport (δ_v / D).

Les figures (a) et (b) correspondent respectivement à F^a_{x1} et F^a_{x2}. 78

3.16 Spectres spatiaux des vitesses adimensionnelles stationnaires v^a_{mx1} et v^a_{mx2} pour différentes valeurs du rapport (δ_v / D).
Les figures (a) et (b) correspondent respectivement à v^a_{mx1} et v^a_{mx2}. 79

3.17 Evolution des vitesses moyennes adimensionnelles stationnaires $\overline{v}^a_{mx1}$, $\overline{v}^a_{mx2}$ et $\overline{v}^a_{mx}$ en fonction du rapport (δ_v / D). 80

3.18 Evolution du temps caractéristique adimensionnel (θ_c) de la stabilisation des écoulement redressés partiels et total en fonction du rapport (δ_v / D). 81

4.1 Choix du type de maillages selon le régime d'interaction onde / paroi. 94

4.2 Evolution des profils de vitesse normalisés à l'unité en fonction du temps adimensionnel (θ). 95

4.3 Evolution du temps caractéristique adimensionnel (θ_c) en fonction du rapport (δ_v / D). 96

4.4 Schéma d'un résonateur de Ceperley équipé d'un stack. 98

4.5 Maillage suivant la direction axiale au voisinage des interfaces stack/guide d'onde. 98

4.6 Profils de la force excitatrice F_x le long de la section transversale d'installation du stack. 100

4.7 Maillage suivant la direction transversale au voisinage des interfaces stack/ guide d'onde. 100

4.8 Champ de vitesse axiale de l'écoulement redressé dans un résonateur annulaire. Le stack occupant 10% du volume du résonateur est composé de 7 plaques. Seule la partie supérieure du résonateur est considérée. 101

4.9 Champ de vitesse transversale de l'écoulement redressé dans un résonateur annulaire. Le stack occupant 10% du volume du résonateur est composé de 7 plaques. Seule la partie supérieure du résonateur est considérée. 102

4.10 Profils stationnaires des vitesses de l'écoulement redressé le long de la section transversale du guide d'onde au point ($x = 0$). 103

4.11 Evolution du temps caractéristique adimensionnel (θ_c) en fonction du nombre de plaques et de la longueur du stack. 104

4.12 Evolution du temps caractéristique adimensionnel global (θ_c^{ws}) en fonction du nombre de plaques et de la longueur du stack. 106

Introduction

Le vent acoustique, dit aussi écoulement redressé, désigne le phénomène non linéaire de génération d'un écoulement moyen (non périodique) par les mouvements oscillatoires associés à une onde sonore [1-3]. En présence d'une onde stationnaire au voisinage d'une paroi solide, les écoulements redressés, générés suite à des processus non linéaires dans les couches limites viscothermiques, forment des vortex toroïdaux (figure 1) dits écoulements de Rayleigh [1-2]. En maintenant par ailleurs une onde non stationnaire dans un conduit présentant un circuit en boucle fermée, aux vortex liés à la composante stationnaire de l'onde, s'ajoute un écoulement à flux de masse non nul lié à la composante propagative de l'onde (figure 2). Cet écoulement est dit de Gedeon [4].

Rayleigh fut le premier à décrire quantitativement les vortex observés par Faraday au voisinage d'une membrane vibrante et par Kundt en mesurant la vitesse du son dans l'air à l'intérieur des tubes [1-2]. Rayleigh considéra le cas d'une onde stationnaire maintenue entre deux parois rigides séparées d'une distance importante par rapport à l'épaisseur de la couche limite visqueuse et faible devant la longueur d'onde. Le modèle de Rayleigh fut étendu par Schuster *et coll.* [5] aux conduits à section circulaire. Westervelt apporta une correction à la vitesse de l'écoulement redressé donnée par Rayleigh [6]. En effet, bien que sa solution pour le champ acoustique soit à divergence non nulle, Rayleigh la considéra implicitement nulle dans son processus de dérivation de la vitesse de l'écoulement redressé. Enfin, Nyborg traita les écoulements redressés de Rayleigh au voisinage d'une paroi à géométrie arbitraire dans le cas d'une épaisseur de couche limite visqueuse très faible devant la dimension caractéristique à la variation de la composante irrotationnelle de la vitesse particulaire tout en supposant cette composante donnée [7].

Plus tard, Zarembo porta une attention particulière aux écoulements redressés de nature tourbillonnaire générés au sein même des couches limites visqueuses [8]. Les écoulements de Rayleigh éclipsaient jusqu'à lors ces derniers du fait que les couches limites considérées étaient minces. Les vortex dans les couches limites ont lieu en sens opposé aux vortex de

Rayleigh dans une couche de fluide dont l'épaisseur est de même ordre de grandeur que celle de la couche limite (figure 1). Zarembo calcula le champ acoustique et l'écoulement redressé dans un milieu fluide semi infini délimité par une paroi. Les solutions obtenues respectivement au voisinage immédiat de la paroi et suffisamment loin de celle-ci (à l'infini) sont raccordées par une méthode asymptotique. Rudenko *et coll.* soulignèrent l'incohérence de ce modèle conçu à partir des équations des fluides incompressibles [3].

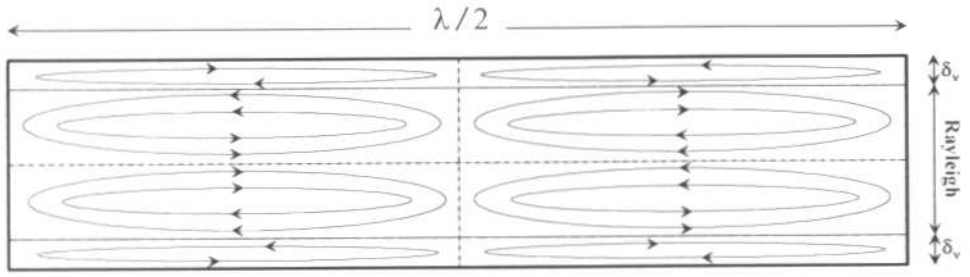


Fig. 1. Vortex de Rayleigh et dans les couches limites d'un résonateur fermé.

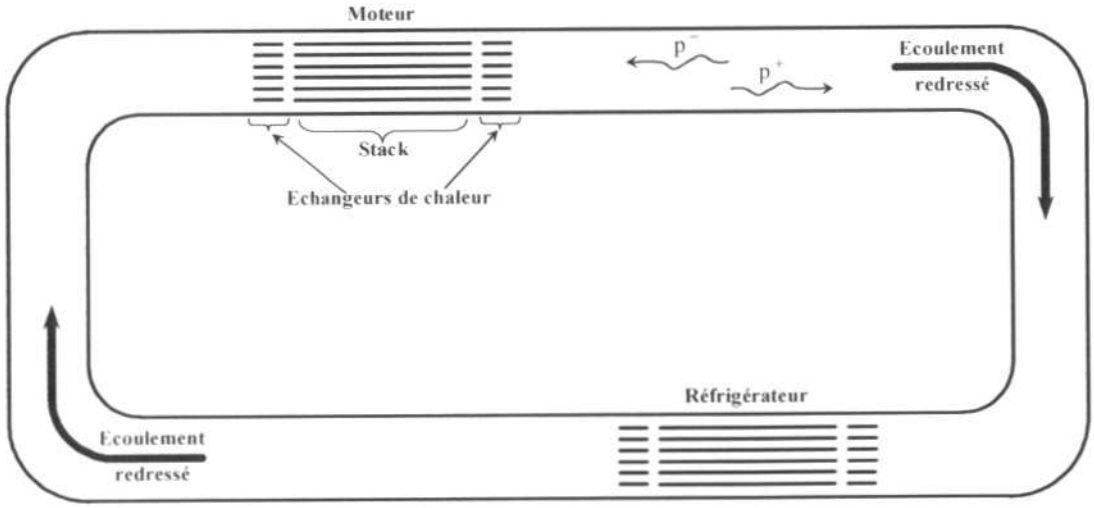


Fig. 2. Ecoulement redressé de Gedeon dans la machine thermoacoustique annulaire de Ceperley.

Rott introduisit les effets de la conduction thermique dans le fluide et la variation de la température le long de la paroi dans la formulation des écoulements redressés [9]. La considération de la conduction thermique mit en évidence la présence d'une couche limite thermique ainsi que des processus non linéaires supplémentaires dont ceux en rapport avec la dépendance entre la viscosité du fluide et sa température. Rott, tout en analysant la

configuration de Rayleigh, démontra l'annihilation de l'effet de la conduction thermique lorsque la dépendance entre la viscosité et la température est linéaire. Il démontra par ailleurs que pour un gradient de température très important, les écoulements de Rayleigh au voisinage de la paroi sont dirigés vers la position de la température élevée.

Qi reprit le modèle de Zarembo pour y inclure l'effet de la compressibilité du fluide [10]. Qi considéra ainsi implicitement l'interaction thermique fluide/paroi issue de la conduction thermique dans le fluide. C'est pourquoi ses résultats sont en bon accord avec ceux de Rott pour un fluide à viscosité dynamique constante et sans gradient de température le long de la paroi [9,11]. Qi *et coll.* étendirent par la suite ce modèle adimensionnel à raccordement asymptotique au calcul de l'écoulement redressé dans un conduit large à section circulaire pour une onde progressive quasi-plane [11].

Avec l'avènement des machines thermoacoustiques au cours des deux dernières décennies [12-14], un regain d'intérêt fut porté aux différents types d'écoulements redressés mis en relief ci-dessus. En effet (figure 2), l'amplification de l'onde sonore dans le moteur thermoacoustique est contrôlée par la distribution de température dans le "stack" (la partie poreuse du résonateur, où l'interaction entre la thermique et les ondes sonores est la plus importante), alors que dans la pompe à chaleur thermoacoustique, la réfrigération est due à un flux de chaleur induit par une onde sonore le long du stack [12-14]. Or l'écoulement redressé participe au transport convectif de chaleur entre les régions de températures différentes des machines thermoacoustiques, ce qui modifie la distribution de température dans le moteur thermoacoustique (et par conséquent, l'amplification de l'onde sonore), et affecte le fonctionnement du réfrigérateur thermoacoustique. L'amélioration des performances des machines thermoacoustiques suscite une modélisation adéquate et la recherche de méthodes efficaces de suppression des écoulements redressés [15-16].

Pour les réfrigérateurs thermoacoustiques à tubes pulsés, Olson *et coll.* étendirent le modèle de Rott à des conduits légèrement coniques. Cette géométrie permet une suppression des écoulements de Rayleigh conditionnée par un choix approprié de l'angle d'ouverture du cône [17]. Par ailleurs, deux procédés distincts ont été proposés pour la suppression des écoulements de Gedeon dans les circuits en boucle fermée des réfrigérateurs à tubes pulsés actuels [18]. Le premier procédé, consistant en l'installation d'une barrière à l'écoulement transparente à l'onde sonore (ballon en caoutchouc), s'est avéré non fiable à long terme. Le second procédé est un élargissement brusque opéré dans le circuit de l'écoulement redressé qui génère un écoulement irréversible en forme de jet. La dépression associée au jet, d'où l'appellation pompe à jet, compense le gradient de pression associé à l'écoulement redressé et

par conséquent peut l'annihiler. La suppression de l'écoulement redressé par une pompe à jet est toutefois instable dans certaines conditions [19].

Pour les machines thermoacoustiques à résonateurs fermés, dites aussi à ondes stationnaires, la modélisation des écoulements redressés dans les pores des stacks révéla l'importance des vortex dans les couches limites dans les conduits étroits. Waxler appliqua l'approximation des couches minces de Rott [9] au calcul des écoulements redressés entre deux plaques d'un stack en s'affranchissant de la restriction sur la largeur du conduit et en considérant un fluide à viscosité constante [20]. Bien que le modèle de Waxler ne mette pas en évidence les vortex dans les couches limites, les processus non linéaires excitant les écoulements de Rayleigh et les vortex dans les couches limites y sont dissociées. Baillet *et coll.* rajoutèrent l'effet de la viscosité du fluide et considérèrent aussi bien des conduits composés de deux plaques parallèles que des tubes [21]. La solution analytique obtenue pour l'écoulement redressé entre deux plaques parallèles non chauffée mit en évidence la prépondérance des vortex dans les couches limites par rapport aux vortex de Rayleigh pour des conduits étroits. Baillet *et coll.* montrèrent la contribution significative due au gradient de température le long des parois pour des conduits larges et apportèrent une correction à la vitesse de l'écoulement redressé donnée par Rayleigh. En faisant abstraction du gradient de température le long des parois du conduit, de la conduction thermique dans le fluide ainsi que de la dépendance entre la viscosité et la température, Hamilton *et coll.* établirent un modèle complètement analytique pour les écoulements redressés entre les parois parallèles d'un conduit de largeur arbitraire [22]. En formulant l'écoulement redressé en termes de vitesse de transport de masse, Hamilton *et coll.* mirent en évidence la disparition graduelle des vortex de Rayleigh en faveur d'une importance croissante des vortex dans les couches limites, lorsque la largeur du conduit est progressivement réduite devant l'épaisseur de la couche limite (supposée faible devant la longueur d'onde). Par la suite, Hamilton *et coll.* prirent en compte les effets de la conduction thermique et la viscosité du fluide et étendirent leur modèle aux tubes [23]. Il est à remarquer que le transport de chaleur par convection dû aux écoulements redressés a été peu étudié. Des coefficients thermiques correspondant à ce type de transfert thermique ont été évalués analytiquement et expérimentalement par Mozurkewich pour des objets chauds à dimensions arbitraires insérés dans un résonateur cylindrique ainsi que pour des segments de parois chauds du résonateur avec ou sans une légère obstruction du conduit [24].

Pour les machines thermoacoustiques à résonateurs annulaires, dites aussi à ondes progressives, l'investigation des écoulements redressés (de Gedeon) est encore à ses débuts.

Par le biais d'un modèle analytique, Gusev *et coll.* exprimèrent le flux de masse dans un moteur annulaire en termes de rapport d'une source excitatrice d'écoulement à une résistance hydrodynamique [25]. Gusev *et coll.* démontrèrent que dans une interaction thermique quasi-adiabatique entre l'onde et le stack, les directions de l'écoulement redressé et du flux de masse coïncident avec le sens de propagation de l'onde. Par contre, dans une interaction quasi-isotherme, la direction de l'écoulement redressé dépend étroitement du gradient de température le long du stack ainsi que d'un paramètre phénoménologique liant la viscosité à la température. La prépondérance du transport d'enthalpie dû à l'écoulement redressé par rapport au transport d'enthalpie associé à la conduction thermique du fluide fut aussi démontrée. Ce modèle fut amélioré pour une interaction onde/stack quasi-adiabatique en s'affranchissant de l'hypothèse restrictive d'un stack fin, mais sans pour autant prendre en compte l'effet de l'onde contrepropagative [26]. En évaluant le flux de masse par un modèle thermique qualitatif simple et des mesures expérimentales de température au sein de la partie chaude du moteur annulaire, Job *et coll.* parvinrent à obtenir des résultats en très bon accord avec le modèle amélioré.

Pour les machines thermoacoustiques hybrides, une géométrie complexe impose une investigation expérimentale des écoulements redressés. Dans son moteur thermoacoustique à cycle de Stirling composé d'un résonateur annulaire solidaire d'un résonateur droit [27], Backhauss *et coll.* utilisèrent des pompes à jet pour la suppression des écoulements de Gedeon ainsi que des tubes légèrement coniques, dits tubes thermiques tampons, pour la suppression des écoulements de Rayleigh. Cette dernière technique a été également utilisée par Gardner *et coll.* dans leur moteur thermoacoustique composé d'un résonateur fermé droit, où des compartiments générant séparément des ondes stationnaires et des ondes progressives sont disposés en cascade [28].

A la fin des années 90, l'intérêt particulier porté aux écoulements redressés en micromécanique des fluides donna lieu à de nombreuses applications notamment le contrôle des environnements chimiques et biochimiques à des échelles microscopiques [29]. L'utilisation des écoulements redressés résout les problèmes de non fiabilité et de grande impédance inhérents à la miniaturisation des éléments mécaniques tels que les pompes, les valves et les canaux [30]. Les importantes pertes visqueuses dans les micros canaux limitent les performances des micromachines alors qu'une couche limite visqueuse relativement épaisse devant la largeur du canal s'associe à une génération d'écoulements redressés [30]. Les micros pompage et mixage des fluides [31-33] ou encore le micro contrôle de la

concentration des réactifs autour d'une électrode [29] impose néanmoins le passage de la gamme des fréquences de l'audible à celle des ultrasons.

Notre recherche bibliographique met en évidence un nombre de travaux réduit concernant les écoulements redressés en régime permanent dans les machines thermoacoustiques annulaires. Aussi aucune investigation en régime transitoire n'est disponible jusqu'à lors pour ce type de machines. Par ailleurs, des publications restreintes existent en modélisation transitoire des écoulements redressés dans des guides d'onde à géométrie annulaire. Dans le guide d'onde toroïdal de Rudenko *et coll.* [34], l'excitation de l'écoulement redressé est la conséquence, non de processus non linéaires dans les couches limites, mais de l'atténuation volumique [3] d'un faisceau d'ondes ultrasonores maintenu sur une portion du tore. De plus c'est le gradient de pression aux bords de cette portion du guide d'onde qui excite un écoulement de Poiseuille dans la partie restante du tore (figure 3). Dans la micro pompe de Nguyen *et coll.* [32-33], une onde ultrasonore évanescente est excitée dans un fluide compressible se trouvant entre deux plaques parallèles suite à la propagation d'une onde de flexion dans l'une des plaques. L'adoption de conditions aux limites cycliques relativement aux entrée et sortie du conduit suggère le cas d'une géométrie toroïdale développée en géométrie droite [25-26]. Et bien que les écoulements redressés dans cette micro pompe soient des écoulements de Gedeon, leur vitesse est calculée par un modèle numérique ne prenant pas en compte la conduction thermique dans le fluide. De plus le procédé d'excitation de l'onde sonore est asymétrique (vibration d'une seule plaque) et le régime transitoire de l'écoulement est couplé au processus de stabilisation de l'amplitude de l'onde de flexion dans la plaque.

Les résultats expérimentaux [35] obtenus pour un moteur annulaire montrent que le phénomène de cascade harmonique ne suffit pas à expliquer le processus de saturation des ondes acoustiques. Des mesures expérimentales récentes sur le même moteur annulaire [36] montrent bien un processus de saturation des ondes acoustiques en deux paliers (figure 4). Le flux de masse associé aux écoulements redressés de Gedeon mis en évidence expérimentalement [26,35] reste le seul phénomène non linéaire susceptible d'expliquer l'évolution de l'amplitude de l'onde acoustique provenant de l'instabilité thermoacoustique dans le stack, d'où la nécessité d'une caractérisation spatio-temporelle de l'écoulement redressé dans un guide d'onde annulaire.

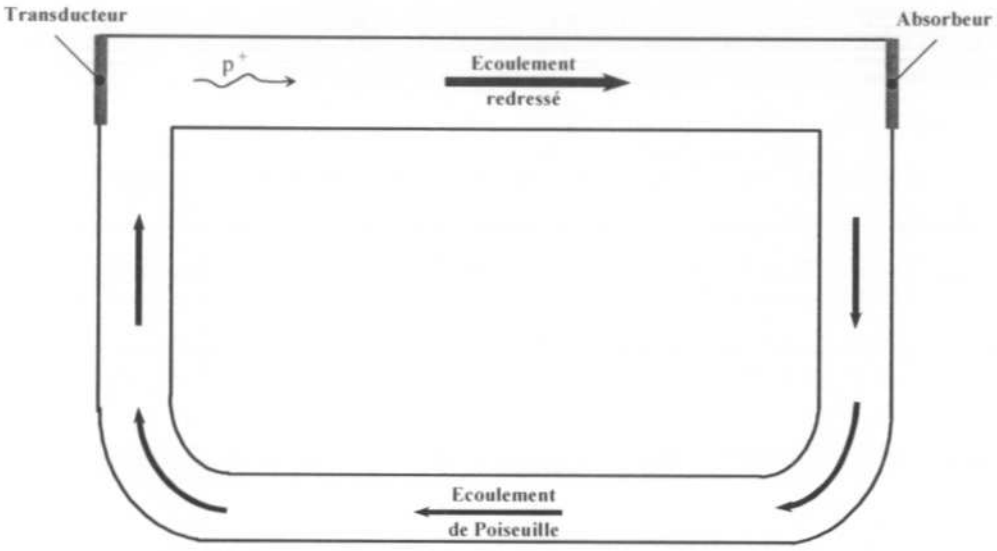


Fig. 3. Schéma de la pompe ultrasonique de Rudenko *et coll.* [34].

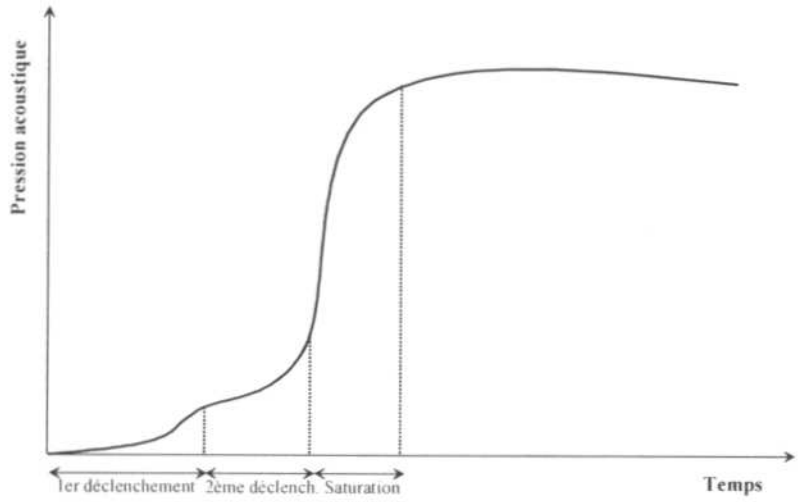


Fig. 4. Processus de développement de l'instabilité thermoacoustique dans un moteur annulaire [36].

Le travail présent porte sur la quantification des écoulements redressés en régime transitoire dans des guides d'ondes à géométries annulaires et de largeur arbitraire. L'excitation des écoulements a lieu essentiellement en présence d'une onde acoustique progressive à champ établi ; la génération d'une onde progressive pure est d'un grand intérêt en thermoacoustique [35-39]. Une attention particulière est toutefois attachée au cas d'un guide d'onde annulaire équipé d'un stack fin. Les effets thermoacoustiques susceptibles de donner un gradient de température le long des parois du guide d'ondes et des plaques du stack sont supposés négligeables. Cette quantification est aussi importante à l'échelle microscopique (guides d'onde de largeur réduite – inférieure au millimètre – et onde

acoustique de fréquence ultrasonore) pour des applications des écoulement redressés en micromécanique des fluides. De plus la modélisation des différents types d'écoulements redressés s'impose en micromécanique des fluides suite à la miniaturisation des machines thermoacoustiques en vue d'une utilisation potentielle en microélectronique [40].

Dans le premier chapitre de cette étude, des équations des écoulements redressés formulées en terme de vitesse de transport de masse sont établies dans la forme la plus générale. La vitesse de transport de masse adoptée est définie différemment de celle présente habituellement dans la littérature [3,22-23] ; la masse volumique moyenne du fluide (ordre 0 en terme de perturbation acoustique [9]) est supposée être une fonction du temps. Aussi aucune hypothèse restrictive sur les propriétés thermophysiques du fluide ou les conditions opératoires (dimensions du conduit, longueur d'onde, etc.) n'est considérée. Les équations de continuité et de quantité de mouvement de Rudenko *et coll.* formulées en terme de vitesse de transport de masse classique [3] sont dérivées à partir de leur similaires dans les équations générales des écoulements redressés. Aussi, l'équation de la vitesse de l'écoulement redressé de Rott [3] est dérivée à partir de l'équation de quantité de mouvement générale.

Au cours du second chapitre, deux possibilités de génération d'ondes acoustiques progressives dans des guides d'onde annulaires sont explorées sans utilisation d'instabilités thermoacoustiques : un tore à parois tapissées de sources excitatrices, dit acoustitron [41], et un résonateur annulaire à deux sources excitatrices, dit de Ceperley [42]. L'acoustitron présente l'avantage d'un mode d'interaction entre l'onde et la paroi variant du régime quasi-adiabatique au régime quasi-isotherme ; le résonateur de Ceperley, fonctionnant en régime quasi-adiabatique, offre un contrôle aisé des composantes stationnaire et propagative de l'onde acoustique.

Le troisième chapitre présente un modèle analytique, conçu à la base de la théorie de Pandtl [43] pour le calcul de l'écoulement redressé en régime transitoire dans l'acoustitron. Les contraintes de Reynolds issues des termes non linéaires dans les équations de Navier-Stokes [44] ainsi que la vitesse de l'écoulement excité par celles-ci sont analysées pour des régimes d'interaction thermique onde/paroi allant du régime quasi-adiabatique au régime quasi-isotherme. Des expressions analytiques compactes sont obtenues pour la vitesse stationnaire de l'écoulement redressé dans les régimes quasi-adiabatique et quasi-isotherme. L'évolution du temps caractéristique de stabilisation de l'écoulement redressé est étudiée entre ces deux régimes asymptotiques, en particulier au voisinage d'un point critique pour lequel la vitesse moyenne en section de l'écoulement s'annule.

Dans le quatrième chapitre, l'écoulement redressé en régime transitoire dans le résonateur annulaire à deux sources excitatrices de Ceperley est calculé par le modèle du chapitre précédent en se limitant au régime quasi-adiabatique. Une composante stationnaire est rajoutée au champ acoustique propagatif en modifiant les conditions opératoires d'excitation des sources. Son influence sur l'écoulement redressé est présentée.

Le cinquième chapitre propose un modèle numérique pour le calcul des écoulements redressés en général et dans les guides d'onde annulaires en particulier. Ce modèle exploite la forme similaire des équations générales des écoulements redressés (notamment celles de la continuité et de la quantité de mouvement présentées au premier chapitre), avec les équations des fluides incompressibles. L'implémentation des contraintes de Reynolds dans un code numérique classique de mécanique des fluides permet l'évaluation spatiotemporelle des écoulements redressés. Le modèle numérique est validé en utilisant les résultats issus du modèle analytique appliqué à l'acoustitron, pour être utilisé dans un résonateur de Ceperley équipé d'un stack fin.

Chapitre 1

Equations générales des écoulements redressés

La formulation présentée dans ce chapitre prend en compte la convection thermique induite par les écoulements redressés notamment, dans les machines thermoacoustiques. Le champ acoustique est supposé varier dans le temps par interaction avec le champ de température moyen modifié par convection thermique. Une mise en équations des écoulements redressés par l'emploi d'une vitesse de transport de masse adaptée, est faite sur la base des équations de la thermomécanique et de la méthode des approximations successives présentées au début de ce chapitre. L'adoption de l'approximation *fluide incompressible* ou *couche limite* conduit à une simplification considérable des équations générales des écoulements redressés.

1.1 Equations de base

Le comportement cinématique et thermodynamique d'un fluide compressible visqueux en l'absence de sources extérieures de débit, de force et de chaleur, est décrit par les lois de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie [44] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \tag{1.1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nabla \cdot \Im_{ij} \quad (i = \overline{1,3}) \quad , \tag{1.2}$$

$$\rho \, T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = \nabla \cdot (\chi \, \nabla T) + E_{dis} \quad , \tag{1.3}$$

où $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, t, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$, p, T, s, ρ et χ désignent respectivement, le vecteur position d'une particule fluide, le temps, la vitesse particulaire, la pression, la température, l'entropie massique, la masse volumique et la conductivité thermique du fluide. Dans le cas d'un fluide Newtonien, le terme $\Im_{ij}$ du tenseur des contraintes visqueuses est donné par la relation :

$$\Im_{ij}=\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\left(\xi-\frac{2}{3}\mu\right)\nabla\cdot\mathbf{v} \quad , \tag{1.4}$$

où μ et ξ sont respectivement, les viscosités dynamiques de cisaillement et de volume du fluide et δ_{ij} est le symbole de Kronecker (δ_{ij}=1 si $i=j$ et $\delta_{ij}=0$ si $i\neq j$). La puissance calorifique E_{dis} due à la dissipation de l'énergie cinétique par effet de viscosité est donnée par la relation :

$$E_{dis}=\left[\Im_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right]_{ij} \quad . \tag{1.5}$$

où les indices affectés aux crochets représentent une double sommation sur les indices i et j respectivement.

Une combinaison des équations de continuité et de Navier-Stokes ($v_i\times(1)+(2)$) donne l'équation compacte suivante [1-7,9] :

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}+v_i\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})+\rho\mathbf{v}\cdot\nabla v_i=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nabla\cdot\Im_{ij} \quad . \tag{1.6}$$

L'entropie massique s'exprime en fonction des variables d'état T et p comme suit [45]:

$$ds=\frac{c_p}{T}dT+\frac{h}{T}dp \quad , \tag{1.7}$$

où le coefficient calorimétrique $h=-(c_p-c_v)/(\underline{\beta}p)$ dépend des chaleurs spécifiques à pression et volume constants c_p et c_v ainsi que du coefficient d'augmentation de pression isochore $\underline{\beta}$. En substituant la variation de l'entropie massique par son expression (1.7), l'équation (1.3) prend la forme explicite suivante :

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla T\right)+\rho h\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla p\right)=\nabla\cdot(\chi\nabla T)+E_{dis} \quad . \tag{1.8}$$

1.2 Méthode des approximations successives

En raison de processus non linéaires dans les couches limites viscothermiques, la propagation d'une onde acoustique dans le milieu fluide d'une machine thermoacoustique par exemple, induit des écoulements non périodiques dits écoulements redressés. Les machines thermoacoustiques sont souvent étudiées en adoptant le schéma classique d'un champ acoustique fluctuant en régime harmonique établi auquel se superpose un écoulement moyen (l'écoulement redressé) quasi-stationnaire de faible amplitude. En conséquence, les variables cinématiques et thermodynamiques ainsi que les propriétés thermophysiques du fluide sont développées à base des puissances du nombre de Mach acoustique [1-9] :

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \quad , \tag{1.9}$$

où la fonction générique φ désigne successivement $\mathbf{v}$, p, T, s, ρ, χ, μ, ξ, c_p ou c_v. Les indices 0, 1, 2, ... correspondent aux ordres de perturbation acoustique. L'ordre zéro correspond à l'état du fluide en l'absence de la perturbation acoustique. Le fluide est supposé initialement au repos : sa vitesse $\mathbf{v}_0$ est nulle ($\mathbf{v}_0 = 0$) et sa pression p_0 est constante. La température T_0 ainsi que les quantités qui en dépendent, soient s_0, ρ_0, χ_0, μ_0, ξ_0, c_{p0} et c_{v0} sont considérées comme étant constantes dans l'espace et le temps. L'ordre 1 dans le développement ci-dessus correspond au champ acoustique dont les composantes φ_1 sont des fonctions harmoniques :

$$\varphi_1(\mathbf{x},t) = Re(\tilde{\varphi}(\mathbf{x},t)\, exp(-i\omega t)) \quad , \tag{1.10}$$

où la notation $\tilde{\varphi}$ désigne l'amplitude complexe de φ_1, $\omega = 2\pi/\tau$ est la pulsation de l'onde acoustique et $Re(\cdots)$ indique la partie réelle. La moyenne temporelle de la fonction φ_1 sur une période acoustique τ, symbolisée par $<\varphi_1> = (1/\tau)\int_t^{t+\tau} \varphi_1\, dt'$, est nulle. D'une manière générale, la moyenne temporelle d'un produit de fonctions harmoniques génériques ψ_{1i}, i étant un nombre entier, par rapport à leur période d'oscillation τ est donnée par la relation :

$$<\prod_{i=1}^{n} \psi_{1i}> = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \prod_{i=1}^{n} \psi_{1i}\, dt' \quad , \tag{1.11}$$

où $<\prod_{i=1}^{n} \psi_{1i}> = 0$ si n est impair et $<\prod_{i=1}^{n} \psi_{1i}> \neq 0$ si n est pair. Les corrections φ_2 apportées aux composantes du champ acoustique comprennent des termes indépendants du temps, et d'autres oscillants à la fréquence 2ω. En se limitant au second ordre de la perturbation

acoustique, la moyenne temporelle des variables φ annule les termes fluctuants à pulsation double (2ω) dans φ_2 :

$$<\varphi>=\frac{1}{\tau}\int_{t}^{t+\tau}\varphi\, dt' = \varphi_0 + <\varphi_2> \quad , \tag{1.12}$$

compte tenu de ce que $<\varphi_1>=0$.

La relation (1.12) rend compte implicitement d'une évolution temporelle des processus physiques à deux échelles de temps distinctes. La période acoustique τ caractérise les fluctuations cycliques du milieu fluide à la pulsation fondamentale. Le temps caractéristique des fluctuations quasi-stationnaires du milieu fluide (écoulement redressé) est supposé être de l'ordre de plusieurs périodes acoustiques. En introduisant la variable moyenne φ_m définie par $\varphi_m(\mathbf{x},t) = \varphi_0 + <\varphi_2(\mathbf{x},t)>$, les variables φ sont réécrites sous la forme :

$$\varphi(\mathbf{x},t) = \varphi_m(\mathbf{x},t) + \varphi_1(\mathbf{x},t) \quad . \tag{1.13}$$

1.3 Mise en équation des écoulements redressés

La vitesse particulaire est réécrite en fonction d'une vitesse de transport de masse adéquate. En moyennant sur une période acoustique les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, des équations similaires sont obtenues pour l'écoulement redressé représenté par la vitesse de transport de masse adoptée.

1.3.1 Conservation de masse

Le report des expressions de la vitesse du fluide $\mathbf{v}$ et de la masse volumique ρ (1.13) dans l'équation de conservation de masse (1.1) donne l'équation,

$$\frac{\partial(\rho_m + \rho_1)}{\partial t} + \nabla\cdot((\rho_m + \rho_1)(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_1)) = 0 \quad , \tag{1.14}$$

dont l'évaluation de la moyenne temporelle au sens des relations (1.11) et (1.12), permet d'écrire,

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_m\mathbf{v}_m + <\rho_1\mathbf{v}_1>) = 0 \quad . \tag{1.15}$$

La quantité $\mathbf{M} = \rho_m \mathbf{v}_m + < \rho_1 \mathbf{v}_1 >$ représente le flux de masse véhiculé par les composantes moyenne et fluctuante de la vitesse $\mathbf{v}$ du fluide. En définissant la vitesse de transport de masse $\mathbf{U}$ comme étant le rapport du flux de masse $\mathbf{M}$ à la masse volumique moyenne ρ_m,

$$\mathbf{U} = \mathbf{v}_m + \frac{< \rho_1 \mathbf{v}_1 >}{\rho_m} \quad , \tag{1.16}$$

d'une part, l'équation de conservation de masse suivante est obtenue pour l'écoulement redressé,

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) = 0 \quad , \tag{1.17}$$

et d'autre part, la vitesse $\mathbf{v}$ du fluide est exprimée en fonction de la vitesse de transport de masse $\mathbf{U}$ (1.16),

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} - < \rho_1 \mathbf{v}_1 > \rho_m^{-1} + \mathbf{v}_1 \quad . \tag{1.18}$$

Rudenko *et coll.* [3] définissent la vitesse de transport de masse $\mathbf{U}$ comme étant le rapport du flux de masse $\mathbf{M}_0 = \rho_0 \mathbf{v}_m + < \rho_1 \mathbf{v}_1 >$ à la masse volumique du fluide en l'absence de la perturbation acoustique (ρ_0),

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{v}_m + \frac{< \rho_1 \mathbf{v}_1 >}{\rho_0} \quad . \tag{1.19}$$

L'écriture de la vitesse de transport de masse $\mathbf{U}$ sous la forme (1.19) suppose un écoulement redressé incompressible (masse volumique du fluide constante dans l'espace et le temps, $\rho_m = \rho_0$). Dans le cas des machines thermoacoustiques, la présence d'un gradient de température le long des plaques des stacks confère à la masse volumique moyenne ρ_m une distribution spatiale non uniforme. De plus, par effet de convection thermique, le flux de masse modifie dans le temps les distributions de température simultanément le long des plaques et dans le fluide. La redéfinition de la vitesse de transport de masse $\mathbf{U}$ par rapport à la masse volumique moyenne ρ_m, rend compte de l'expansion thermique due aux variations temporelles de la température moyenne. De plus, la variation temporelle de l'expression de $\mathbf{U}$ (1.16),

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} + \rho_m^{-1} \frac{\partial < \rho_1 \mathbf{v}_1 >}{\partial t} - \rho_m^{-2} < \rho_1 \mathbf{v}_1 > \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \quad , \tag{1.20}$$

met en évidence trois processus d'interactions physiques à temps caractéristiques différents. La variation temporelle de la vitesse moyenne de l'écoulement redressé ($\partial \mathbf{v}_m / \partial t$) caractérise le processus de diffusion de la quantité de mouvement issue des forces excitatrices de l'écoulement. Ces forces dépendent étroitement du champ acoustique. Dans la convection

thermique causée par l'écoulement redressé, des transferts thermiques ont lieu entre les régions de températures différentes ; ce qui modifie le champ de température moyen dans un processus notamment lent, caractérisé par la variation temporelle de la masse volumique moyenne ($\partial\rho_m / \partial t$). Il s'ensuit que dans une interaction thermoacoustique, le champ acoustique représenté par le flux de masse $<\rho_l \mathbf{v}_l>$ évolue aussi dans le temps ($\partial <\rho_l \mathbf{v}_l> / \partial t$). Cette évolution normalement rapide, est lente lors du développement de l'instabilité thermoacoustique (propre à la phase d'allumage d'une machine thermoacoustique).

1.3.2 Conservation de quantité de mouvement

L'équation de conservation de quantité de mouvement est dérivée en injectant l'expression de la vitesse du fluide $\mathbf{v}$ (1.18) dans l'équation (1.6) et en faisant la moyenne temporelle sur une période acoustique (selon (1.11) et (1.12)).

Il est à souligner que l'utilisation de l'équation originale (1.2) dans une telle dérivation complique considérablement l'expression du terme instationnaire dans l'équation de l'écoulement redressé obtenue. En effet, le report de la vitesse $\mathbf{v}$ (1.18) dans le terme instationnaire de l'équation (1.2) conduit à écrire l'identité,

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = (\rho_m + \rho_l) \frac{\partial}{\partial t} (U_i - <\rho_l v_{li}> \rho_m^{-1} + v_{li}) \quad , \tag{1.21}$$

dont la moyenne temporelle (selon (1.11) et (1.12)) correspond à,

$$<\rho \frac{\partial v_i}{\partial t}> = \rho_m \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{<\rho_l v_{li}>}{\rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} - \frac{\partial <\rho_l v_{li}>}{\partial t} + <\rho_l \frac{\partial v_{li}}{\partial t}> \quad . \tag{1.22}$$

L'application de cette procédure au terme instationnaire de l'équation (1.6) donne une écriture plus compacte de l'équation de conservation de quantité de mouvement, en établissant successivement,

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} ((\rho_m + \rho_l)(U_i - \rho_m^{-1} <\rho_l v_{li}> + v_{li})) \quad , \tag{1.23}$$

$$<\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}> = \rho_m \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \quad . \tag{1.24}$$

Le développement de ce calcul à tous les termes de l'équation (1.6), permet d'écrire les moyennes temporelles ci-dessous,

$$< v_i \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla v_i >= U_i \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) + \rho_m \mathbf{U} \cdot \nabla U_i - (F_{ai}^{(1)} + F_{ai}^{(2)}) \quad , \tag{1.25}$$

$$< \frac{\partial p}{\partial x_i} >= \frac{\partial p_m}{\partial x_i} \quad , \tag{1.26}$$

$$< \nabla \cdot \Im_{ij} >= \nabla \cdot \Im_{ij}^{U} + F_{bi}^{(1)} + F_{bi}^{(2)} \quad . \tag{1.27}$$

Les termes d'ordre deux (par rapport au développement asymptotique (1.9)) $F_{ai}^{(1)}$ et d'ordre quatre $F_{ai}^{(2)}$ sont donnés par les relations,

$$F_{ai}^{(1)} = -\nabla \cdot (\rho_m < \widetilde{v}_i \widetilde{\mathbf{v}} >) \quad , \tag{1.28}$$

$$F_{ai}^{(2)} = \nabla \cdot (\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho} \widetilde{v}_i >< \widetilde{\rho} \widetilde{\mathbf{v}} >) \quad . \tag{1.29}$$

Dans les expressions (1.28) et (1.29) et les expressions suivantes de ce chapitre, les fonctions harmoniques sont notées $\widetilde{\varphi}$ au lieu de φ_l.

La quantité $\Im_{ij}^{U}$ dans la relation (1.27) désigne le terme (i,j) du tenseur des contraintes visqueuses relatif à la vitesse de transport de masse $\mathbf{U}$,

$$\Im_{ij}^{\mathbf{U}} = \mu_m \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left(\xi_m - \frac{2}{3} \mu_m \right) \nabla \cdot \mathbf{U} \quad . \tag{1.30}$$

De même, les quantités $\Im_{ij}^{v_l}$ et $\Im_{ij}^{v_s}$ sont les termes (i,j) des tenseurs des contraintes visqueuses relatives à la vitesse fluctuante du fluide v_l et à la vitesse spécifique $v_s = \rho_m^{-1} < \rho_l \mathbf{v}_l >$ respectivement,

$$\Im_{ij}^{\mathbf{v}_l} = \mu_l \left(\frac{\partial v_{li}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{lj}}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left(\xi_l - \frac{2}{3} \mu_l \right) \nabla \cdot \mathbf{v}_l \quad , \tag{1.31}$$

$$\Im_{ij}^{\mathbf{v}_s} = \mu_m \left(\frac{\partial v_{si}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{sj}}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left(\xi_m - \frac{2}{3} \mu_m \right) \nabla \cdot \mathbf{v}_s \quad . \tag{1.32}$$

Les termes $F_{bi}^{(1)} =< \nabla \cdot \Im_{ij}^{\mathbf{v}_l} >$ et $F_{bi}^{(2)} = \nabla \cdot \Im_{ij}^{\mathbf{v}_s}$ s'écrivent,

$$F_{bi}^{(1)} = \nabla \cdot < \widetilde{\mu} \left(\frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left(\widetilde{\xi} - \frac{2}{3} \widetilde{\mu} \right) \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{v}} > \quad , \tag{1.33}$$

$$F_{bi}^{(2)} = -\nabla \cdot \left[\mu_m \left(\frac{\partial (\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho} \widetilde{v}_i >)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho} \widetilde{v}_j >)}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left(\xi_m - \frac{2}{3} \mu_m \right) \nabla \cdot (\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho} \widetilde{\mathbf{v}} >) \right] . \tag{1.34}$$

En substituant les termes de l'équation (1.6) par leurs moyennes respectives (1.24) à (1.27), et compte tenu du fait que $\partial \rho_m / \partial t = -(\rho_m \nabla \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho_m)$ d'après l'équation de conservation de masse (1.17), une équation de conservation de quantité de mouvement similaire à l'équation (1.2) est obtenue,

$$\rho_m \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla U_i \right) = -\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \nabla \cdot \Im_{ij}^{U} + F_i \quad , \tag{1.35}$$

où la force volumique excitatrice de l'écoulement F_i, issue du champ acoustique, est la résultante des contributions des forces $F_{ai}^{(1)}$, $F_{ai}^{(2)}$, $F_{bi}^{(1)}$ et $F_{bi}^{(2)}$,

$$F_i = F_{ai}^{(1)} + F_{ai}^{(2)} + F_{bi}^{(1)} + F_{bi}^{(2)} \quad . \tag{1.36}$$

1.3.3 Conservation de l'énergie

Les vitesses des écoulements redressés sont proportionnelles au carré de l'amplitude de la pression acoustique [1-9]. Pour de grandes amplitudes de l'onde acoustique, ces vitesses, bien que restant très petites devant la célérité du son, prennent de l'ampleur, induisent des transports significatifs de chaleur et modifient simultanément les champs moyens de température et de pression. Les effets de la convection thermique due aux écoulements redressés sont décrits par l'équation de conservation d'énergie (1.8). L'expression de la vitesse $\mathbf{v}$ (1.18) ainsi que les développements des température, pression et propriétés thermophysiques du fluide (1.13) sont reportés dans l'équation (1.8). La moyenne temporelle de l'équation ainsi obtenue, donne une équation de conservation d'énergie ordinaire pour l'écoulement redressé,

$$(\rho c_p)' \left(\frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T_m \right) + (\rho h)' \left(\frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla p_m \right) = \nabla \cdot (\chi_m \nabla T_m) + q_s + < E_{dis} > \quad , \tag{1.37}$$

où q_s désigne une source de chaleur. La capacité calorifique $(\rho c_p)'$ est la résultante des capacités calorifiques moyenne ($\rho_m c_{pm}$) et fluctuante ($< \widetilde{\rho}\ \widetilde{c}_p >$) du fluide,

$$(\rho c_p)' = \rho_m c_{pm} + < \widetilde{\rho}\ \widetilde{c}_p > \quad . \tag{1.38}$$

De même, la capacité calorimétrique $(\rho h)'$ s'écrit,

$$(\rho h)' = \rho_m h_m + < \widetilde{\rho}\ \widetilde{h} > \quad . \tag{1.39}$$

La source de chaleur q_s correspond à la densité de chaleur cumulée en moyenne (c'est-à-dire, sur une période acoustique) en un point donné, suite aux transports hydrodynamique et conductif de l'entropie. La génération d'entropie est indissociable des variations spatiale et temporelle des champs moyens et fluctuants de la pression et de la température. Le transport hydrodynamique de l'entropie est effectué par la composante fluctuante de la vitesse particulaire $\mathbf{v}_1$ ainsi que par la vitesse de transport de masse $\mathbf{U}$. Le transport conductif de l'entropie vient de la conductivité thermique fluctuante du fluide χ_1. L'écriture de la source de chaleur sous la forme $q_s = q_{as} + q_{bs} + q_{cs}$ met en évidence un groupe de termes associés aux variations de la température,

$$q_{as} = -(<(\rho_m \widetilde{c_p} + c_{pm} \widetilde{\rho})(d\widetilde{T}/dt + \widetilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla T_m)> + (\rho c_p)' < \widetilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \widetilde{T} >) \quad , \tag{1.40}$$

un second groupe associé aux variations de pression,

$$q_{bs} = -(<(\rho_m \widetilde{h} + \widetilde{\rho} h_m)(d\widetilde{p}/dt + \widetilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla p_m)> + (\rho h)' < \widetilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \widetilde{p}) >) \quad , \tag{1.41}$$

et un dernier terme associé au transport de l'entropie par conductivité thermique,

$$q_{cs} = \nabla \cdot < \widetilde{\chi} \nabla \widetilde{T} > \quad . \tag{1.42}$$

Les termes instationnaires dans les équations (1.40) et (1.41) sont donnés respectivement par les relations $d\widetilde{T}/dt = \partial \widetilde{T}/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla \widetilde{T}$ et $d\widetilde{p}/dt = \partial \widetilde{p}/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla \widetilde{p}$. Le terme $< E_{dis} >= E_1 + E_2 + E_3$ désigne la dissipation par effet de viscosité des énergies cinétiques correspondant au champ fluctuant de vitesse $\mathbf{v}_1$,

$$E_1 = \mu_m (<(\nabla \widetilde{v}_i)^2> + <\nabla \widetilde{v}_i \cdot \partial \widetilde{\mathbf{v}}/\partial x_i>) + (\xi_m - 2\mu_m/3) <(\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{v}})^2> \quad , \tag{1.43}$$

au champ de vitesse de transport de masse $\mathbf{U}$,

$$E_2 = \mu_m ((\nabla U_i)^2 + \nabla U_i \cdot \partial(\mathbf{U})/\partial x_i) + (\xi_m - 2\mu_m/3)(\nabla \cdot \mathbf{U})^2 \quad , \tag{1.44}$$

et à une combinaison des deux champs de vitesses précédents,

$$E_3 = (2\nabla U_i + \partial \mathbf{U}/\partial x_i) \cdot < \widetilde{\mu} \nabla \widetilde{v}_i > + \nabla U_i \cdot < \widetilde{\mu} \partial \widetilde{\mathbf{v}}/\partial x_i > + 2\nabla \cdot \mathbf{U} <(\widetilde{\xi} - 2\widetilde{\mu}/3) \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{v}} > \quad . \tag{1.45}$$

Les termes $<\widetilde{\rho}\,\widetilde{c_p}><\widetilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \widetilde{T}>$ et $<\widetilde{\rho}\,\widetilde{h}><\widetilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \widetilde{p})>$ dans les expressions respectives (1.40) et (1.41) ainsi que les termes en $\mathbf{U}$ dans $< E_{dis} >$ (c'est-à-dire, les termes E_2 (1.44) et E_3 (1.45)), sont d'ordre quatre en se référant au développement à base du nombre de Mach acoustique (1.9).

1.3.4 Remarques

Les équations de conservation de masse (1.17), de quantité de mouvement (1.35) et de l'énergie (1.37) ont la forme spécifique aux équations des écoulements compressibles. Pour un champ acoustique donné, les termes sources des équations (1.35) et (1.37) peuvent être aisément implémentés dans les codes numériques semi-ouverts propres à la mécanique des fluides compressibles. Cette implémentation est faite par une procédure externe.

Dans l'approximation *fluide incompressible* ou encore *couche limite* adoptée par la suite (§ 1.4 ou 1.5), les équations générales des écoulements redressés se simplifient considérablement tout en s'apprêtant à une résolution par les codes numériques classiques propres à la mécanique des fluides incompressibles. De plus, le terme convectif dans l'équation (1.35) peut être négligé sans induire d'erreurs significatives (*écoulements de Stokes* [46]).

1.4 Approximation fluide incompressible

Les vitesses des écoulements redressés sont de faibles amplitudes par rapport à la célérité adiabatique du son a ($|U_i| << a$). De plus, le champ de température moyen est supposé constant dans l'espace et le temps ($T_m = T_0$). Le fluide est ainsi considéré incompressible ($\rho_m = \rho_0$) ; ce qui correspond, pour la masse volumique moyenne du fluide à écrire,

$$\frac{d\rho_m}{dt} = \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho_m = 0 \quad , \tag{1.46}$$

et réduit l'équation de conservation de masse de l'écoulement redressé (1.17) à,

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad . \tag{1.47}$$

Le terme $\nabla \cdot \Im_{ij}^{U}$ de l'équation de conservation de quantité de mouvement (1.35), réécrit sous la forme explicite,

$$\nabla \cdot \Im_{ij}^{U} = \mu_m \, \Delta U_i + \left(\xi_m + \frac{\mu_m}{3} \right) \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{U})}{\partial x_i} + \left(\nabla U_i + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) \cdot \nabla \mu_m + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\xi_m - \frac{2\mu_m}{3} \right) \nabla \cdot \mathbf{U} \quad , \tag{1.48}$$

est simplifié compte tenu de l'équation (1.47) et d'une viscosité dynamique de cisaillement constante ($\partial \mu_m / \partial x_i = \partial \mu_0 / \partial x_i = 0$) :

$$\nabla \cdot \Im_{ij}^{U} = \mu_0 \, \Delta U_i \quad , \tag{1.49}$$

De façon similaire, le terme force $F_{bi}^{(2)}$ (1.34) prend la forme explicite,

$$\begin{aligned} F_{bi}^{(2)} = &-\mu_m \, \Delta(\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho}\widetilde{v}_i >) - \left(\xi_m + \frac{\mu_m}{3}\right)\frac{\partial(\nabla \cdot (\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho}\widetilde{\mathbf{v}} >))}{\partial x_i} \\ &- \left(\nabla(\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho}\widetilde{v}_i >) + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}\right) \cdot \nabla \mu_m - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\xi_m - \frac{2\mu_m}{3}\right)\nabla \cdot (\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho}\widetilde{\mathbf{v}} >) \end{aligned} \quad , \tag{1.50}$$

dont la simplification compte tenu d'une viscosité dynamique de volume constante ($\partial \xi_m / \partial x_i = \partial \xi_0 / \partial x_i = 0$) donne l'expression,

$$F_{bi}^{(2)} = -\rho_0^{-1}\mu_0 \Delta(< \widetilde{\rho}\widetilde{v}_i >) - \rho_0^{-1}\left(\xi_0 + \frac{\mu_0}{3}\right)\frac{\partial(\nabla \cdot < \widetilde{\rho}\widetilde{\mathbf{v}} >)}{\partial x_i} \quad . \tag{1.51}$$

La considération de viscosités fluctuantes négligeables ($\mu_1 = \xi_1 \cong 0$) annule le terme force $F_{bi}^{(1)} \cong 0$ (1.33). En négligeant le terme d'ordre quatre $F_{ai}^{(2)} = \rho_0^{-1}\nabla \cdot (< \widetilde{\rho}\widetilde{v}_i >< \widetilde{\rho}\widetilde{\mathbf{v}} >)$ (1.29), l'équation de conservation de quantité de mouvement (1.35) devient,

$$\rho_m\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla U_i\right) = -\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \mu_m \Delta U_i + F_i \quad , \tag{1.52}$$

où la force volumique F_i est donnée par la relation,

$$F_i = -\rho_0 \nabla \cdot (< \widetilde{v}_i\widetilde{\mathbf{v}} >) - \rho_0^{-1}\mu_0 \Delta(< \widetilde{\rho}\widetilde{v}_i >) - \rho_0^{-1}\left(\xi_0 + \frac{\mu_0}{3}\right)\frac{\partial(\nabla \cdot < \widetilde{\rho}\widetilde{\mathbf{v}} >)}{\partial x_i} \quad . \tag{1.53}$$

Les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement (1.47) et (1.52) ont la forme spécifique des équations de la mécanique des fluides incompressibles. Le système d'équations (1.47), (1.52) et (1.53) fut dérivé par Rudenko *et coll.* (respectivement équations (1.3), (1.4) et (1.10) dans [3]) pour la description des écoulements redressés.

1.5 Approximation couche limite

Une onde acoustique est maintenue dans un conduit à dimension infinie suivant la direction $x_3 = z$ (figure 1.1). Un gradient de température le long des parois confère aux propriétés thermophysiques du fluide une distribution spatiale bidimensionnelle $\varphi_m(t, x_1 = x, x_2 = y)$. Pour des écoulements redressés d'amplitudes suffisamment faibles (faible niveau de pression acoustique), la distribution de température dans le fluide n'évolue pas dans le temps et par conséquent $\partial \varphi_m / \partial t \cong 0$. En se référant à l'approximation des

couches limites minces propre à la théorie de Prandtl [43], une dimension transversale D du conduit faible devant la dimension axiale L ($D << L$) correspond à des variations axiales des quantités physiques, négligeables devant les variations transversales ($\partial / \partial x << \partial / \partial y$).

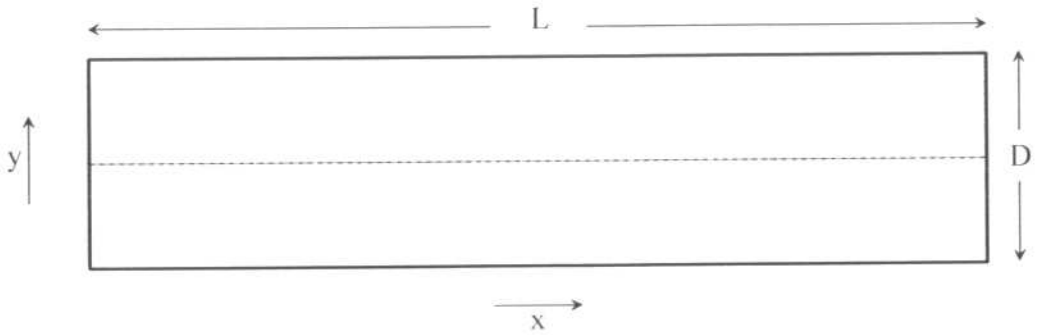


Fig. 1.1. Schéma d'un conduit droit.

En considérant une variation transversale négligeable de la masse volumique moyenne ($\partial \rho_m / \partial y \cong 0$) ainsi , les hypothèses retenues précédemment permettent d'une part, de simplifier l'équation de conservation de masse (1.17),

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = -\frac{U_x}{\rho_m}\frac{\partial \rho_m}{\partial x} \quad , \tag{1.54}$$

compte tenu de $\partial \rho_m / \partial t \cong 0$ et d'autre part, d'établir les ordres de grandeurs $\partial U_x / \partial x \approx U_x / L$, $\partial U_y / \partial y \approx U_y / D$ et $(1/\rho_m) U_x \partial \rho_m / \partial x \approx U_x / L$. D'après l'équation (1.54), l'amplitude de la composante transversale de la vitesse de transport de masse U_y est inférieure à celle de la composante axiale U_x d'un ordre de grandeur en terme du rapport de la largeur du conduit à la longueur du conduit ($U_y / U_x \approx D / L$). Négliger les termes d'ordre supérieur à deux dans développement (1.9), conduit à négliger le terme convectif ($\rho_m \mathbf{U} \cdot \nabla U_x$) dans l'équation de conservation de quantité de mouvement (1.35), exprimée pour la composante d'amplitude significative U_x,

$$\rho_m \frac{\partial U_x}{\partial t} = -\frac{\partial p_m}{\partial x} + \nabla \cdot \Im_{ij}^U + F_x \quad , \tag{1.55}$$

Dans l'approximation de couche limite, l'expression explicite (1.48) du terme $\nabla \cdot \Im_{ij}^U$ se réduit à,

$$\nabla \cdot \Im_{ij}^U = \mu_m \frac{\partial^2 U_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial U_x}{\partial y}\frac{\partial \mu_m}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_m \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \quad . \tag{1.56}$$

Dans les deux premiers termes de (1.48), seul le terme $\partial^2 U_x / \partial^2 y$ d'ordre U_x / D^2 est retenu car, le terme restant dans ΔU_x (soit $\partial^2 U_x / \partial^2 x$) et le terme $\partial(\nabla \cdot \mathbf{U})/\partial x$ sont d'ordre U_x / L^2. Dans les deux derniers termes de (1.48), l'ordre de grandeur du terme retenu $(\partial U_x / \partial y)(\partial \mu_m / \partial y)$ équivaut à $U_x \mu_m / D^2$ alors que les termes négligés ont un ordre de grandeur faible ($U_x \mu_m / L^2$).

En réitérant la même démarche pour les forces $F_{bi}^{(1)}$ et $F_{bi}^{(2)}$, des expressions similaires à (1.56) sont obtenues,

$$F_{bi}^{(1)} = < \widetilde{\mu} \frac{\partial^2 \widetilde{v}_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial \widetilde{v}_x}{\partial y} \frac{\partial \widetilde{\mu}}{\partial y} > = \frac{\partial}{\partial y} < \widetilde{\mu} \frac{\partial \widetilde{v}_x}{\partial y} > \quad , \tag{1.57}$$

$$F_{bi}^{(2)} = -\mu_m \frac{\partial^2 (\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho}\, \widetilde{v}_x >)}{\partial^2 y} - \frac{\partial (\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho}\, \widetilde{v}_x >)}{\partial y} \frac{\partial \mu_m}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_m \frac{\partial (\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho}\, \widetilde{v}_x >)}{\partial y} \right) \quad . \tag{1.58}$$

De plus, négliger le terme force d'ordre quatre $F_{ai}^{(2)}$ (1.29) conduit à écrire la force volumique F_x sous la forme simple,

$$F_x = -\nabla \cdot (\rho_m < \widetilde{v}_x \widetilde{\mathbf{v}} >) + \frac{\partial}{\partial y} < \widetilde{\mu} \frac{\partial \widetilde{v}_x}{\partial y} > - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_m \frac{\partial (\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho}\, \widetilde{v}_x >)}{\partial y} \right) \quad . \tag{1.59}$$

En considérant l'expression de la vitesse de transport de masse $\mathbf{U}$, le terme $\nabla \cdot \Im_{ij}^{U}$ sous sa forme générale (1.48) est exprimée en fonction de la force $F_{bi}^{(2)}$ comme suit,

$$\nabla \cdot \Im_{ij}^{U} = \nabla \cdot \Im_{ij}^{v_m} - F_{bi}^{(2)} \quad , \tag{1.60}$$

où $\Im_{ij}^{v_m}$ désigne le terme (i, j) du tenseur des contraintes visqueuses relatives à la vitesse moyenne du fluide v_m,

$$\Im_{ij}^{v_m} = \mu_m \left(\frac{\partial v_{mi}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{mj}}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left(\xi_m - \frac{2}{3} \mu_m \right) \nabla \cdot \mathbf{v}_m \quad . \tag{1.61}$$

A cet effet, l'équation (1.56) prend la forme suivante,

$$\nabla \cdot \Im_{ij}^{U} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_m \frac{\partial v_{mx}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_m \frac{\partial (\rho_m^{-1} < \widetilde{\rho}\, \widetilde{v}_x >)}{\partial y} \right) \quad . \tag{1.62}$$

En substituant $\nabla \cdot \Im_{ij}^{U}$ et F_x par leur expressions respectives (1.62) et (1.59), l'équation de conservation de quantité de mouvement (1.55) qui s'écrit,

$$\rho_m \frac{\partial U_x}{\partial t} = -\frac{\partial p_m}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_m \frac{\partial v_{mx}}{\partial y}\right) - \nabla \cdot (\rho_m < \tilde{v}_x \tilde{\mathbf{v}} >) + \frac{\partial}{\partial y} < \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} > \quad , \tag{1.63}$$

se simplifie davantage en considérant une variation transversale négligeable de la viscosité dynamique du fluide ($\partial \mu_m / \partial y \cong 0$),

$$\rho_m \frac{\partial U_x}{\partial t} = -\frac{\partial p_m}{\partial x} + \mu_m \frac{\partial^2 v_{mx}}{\partial^2 y} - \frac{\partial(\rho_m < \tilde{v}_x^2 >)}{\partial x} - \rho_m \frac{\partial < \tilde{v}_x \tilde{v}_y >}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} < \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} > \quad . \tag{1.64}$$

En se référant à la relation (1.20), la variation temporelle de la quantité moyenne $< \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} >$ correspond à l'évolution du champ acoustique dans le temps. Un champ acoustique est dit établi pour $\partial < \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} > / \partial t = 0$. De ce fait, et compte tenu de $\partial \rho_m / \partial t = 0$, la variation temporelle de la composante axiale de la vitesse de transport de masse $U_x = v_{mx} + \rho_m^{-1} < \tilde{\rho} \tilde{v}_x >$ est réduite à,

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{\partial v_{xm}}{\partial t} \quad , \tag{1.65}$$

permettant ainsi de réécrire l'équation (1.64) sous la forme,

$$\rho_m \frac{\partial v_{mx}}{\partial t} = -\frac{\partial p_m}{\partial x} + \mu_m \frac{\partial^2 v_{mx}}{\partial^2 y} - \frac{\partial(\rho_m < \tilde{v}_x^2 >)}{\partial x} - \rho_m \frac{\partial < \tilde{v}_x \tilde{v}_y >}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} < \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} > \quad . \tag{1.66}$$

En régime stationnaire ($\partial v_{mx} / \partial t = 0$), l'équation (1.66) conduit à l'équation dérivée par Rott [9] pour la composante axiale de la vitesse de l'écoulement redressé v_{mx} ,

$$\mu_m \frac{\partial^2 v_{mx}}{\partial^2 y} = \frac{\partial p_m}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_m < \tilde{v}_x^2 >)}{\partial x} + \rho_m \frac{\partial < \tilde{v}_x \tilde{v}_y >}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} < \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} > \quad . \tag{1.67}$$

Rott considéra le cas particulier d'une couche limite visqueuse confinée au voisinage de la paroi et d'épaisseur faible devant la longueur du conduit.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les différents processus non linéaires intervenant dans l'excitation des écoulements redressés et la génération d'entropie sont mis en évidence. L'influence de l'expansion thermique sur l'écoulement redressé est décrite en termes de conservation de masse et d'énergie. Aussi, la possibilité d'implémenter et de simuler les écoulements redressés via des codes numériques de mécanique des fluides classiques est démontrée.

Chapitre 2

Génération d'ondes progressives dans des résonateurs annulaires

Les ondes progressives revêtent un intérêt particulier en thermoacoustique et en propagation d'ondes guidées. En effet, les moteurs thermoacoustiques à ondes progressives présentent un seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique relativement inférieur [38], et des rendements notamment supérieurs (presque le double), en comparaison de résonateurs similaires à ondes stationnaires [16,27]. De plus, l'excitation d'une onde progressive en résonance (source excitatrice en phase avec l'onde), avec des sources ponctuelles, dans un guide d'onde à topologie toroïdale, permet d'avoir des niveaux de pression acoustique relativement élevés [41].

La génération mécanique d'une onde progressive dans un tore nécessite l'installation de deux ou plusieurs sources excitatrices sur ses parois. Une source (de pression ou de débit) unique excite inévitablement deux ondes progressives en sens opposés donnant lieu à un champ acoustique stationnaire. Des configurations comprenant plus d'une source excitatrice sont susceptibles dans certaines conditions, d'annihiler le champ stationnaire en faveur d'un champ progressif. Les résonateurs annulaires à deux sources et à répartition continue de sources, dits respectivement de *Ceperley* [42] et *acoustitron* [41], constituent deux types de configurations *limites* dont l'étude est relativement simple.

Indépendamment de la configuration de sources excitatrices considérée, le guide d'ondes toroïdal est développé dans une géométrie droite (§ 2.1), et les composantes du champ acoustique sont exprimées en fonction de la pression acoustique en adoptant l'approche de la thermoacoustique linéaire classique (§ 2.2). Suite à l'établissement de l'équation de propagation de la pression acoustique, les conditions d'excitation d'un champ acoustique propagatif d'amplitude maximum sont déterminées dans l'acoustitron (§ 2.3) et le résonateur de Ceperley (§ 2.4). En particulier, deux modes d'interaction asymptotiques entre l'onde et les parois du résonateur sont explorés dans le cas de l'acoustitron : interactions

quasi-adiabatique et quasi-isotherme. Pour le résonateur de Ceperley, seul le régime d'interaction quasi-adiabatique est considéré.

2.1 Développement d'une géométrie toroïdale en une géométrie droite

Un guide d'onde à géométrie toroïdale est défini par le diamètre D de sa section et le rayon R_0 de la circonférence décrite par le centre de cette section (figure 2.1).

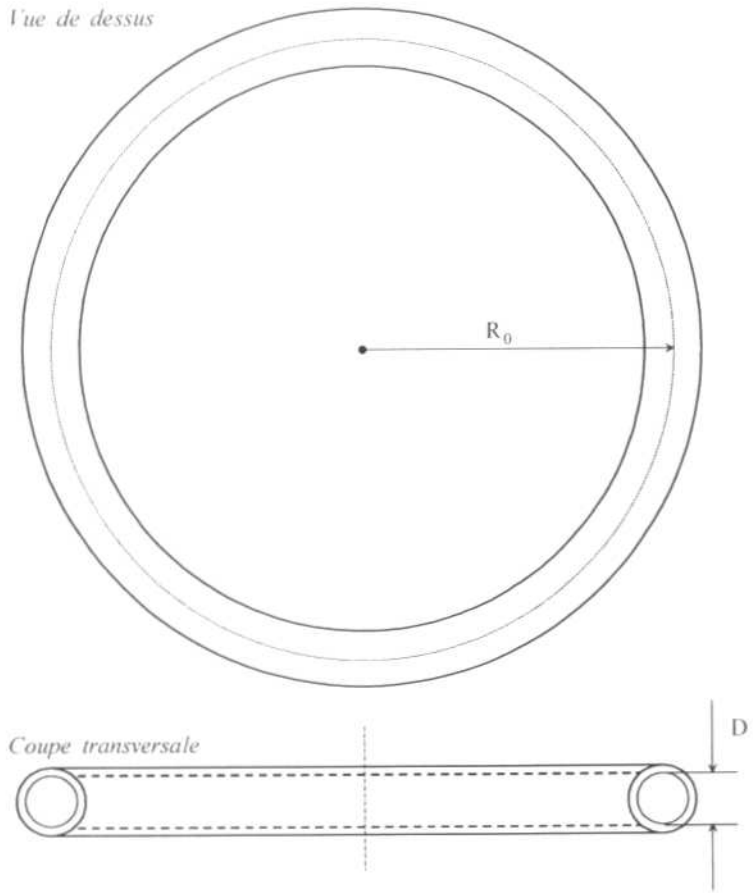


Fig. 2.1. Géométrie toroïdale.

Soit λ la longueur de l'onde acoustique générée par les sources excitatrices disposées sur les parois. Pour des longueurs d'onde importantes devant le diamètre du tore ($\lambda >> D$), l'effet de la courbure du conduit sur la propagation du son et l'écoulement hydrodynamique reste négligeable [1,25]. Cette hypothèse permet de développer la géométrie toroïdale du conduit suivant une géométrie linéaire (figure 2.2) qui correspond à un conduit droit, ayant pour longueur le périmètre de la circonférence ($L = 2\pi R_0$). Ce volume peut être considéré

comme la cellule de base d'un guide d'onde infini dont le champ acoustique présente une périodicité de longueur L suivant x. Conséquemment, seul le mode fondamental propagatif dans la direction des x est à considérer ; l'onde acoustique est plane.

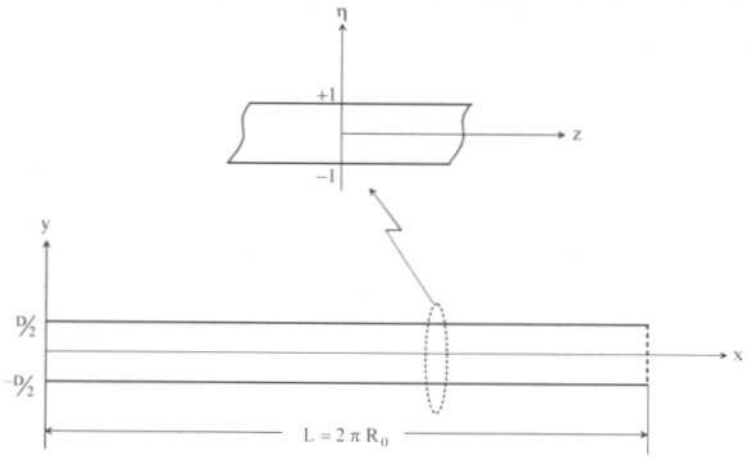


Fig. 2.2. Tore développé en géométrie droite équivalente.

Toute fonction ψ mise en jeu dans la description de la propagation du son dans le tore vérifie la condition de continuité, ou encore de périodicité, $\psi(x=0)=\psi(x=L)$. Dans ce qui suit, le champ acoustique et l'écoulement redressé (Chapitres 2 à 5) sont analysés dans le plan (x,y) de la figure 2.2, en considérant une section rectangulaire de dimension infinie suivant z. Les résultats compacts obtenus sont susceptibles d'être extrapolés à la géométrie initiale à section circulaire. La variable adimensionnelle η introduite dans la figure 2.2 est définie par la relation,

$$\eta = (2/D)y \quad . \tag{2.1}$$

2.2 Propagation d'onde acoustique dans un conduit droit

Inhérente à la propagation des ondes acoustiques guidées et dépendant principalement de la fréquence de l'onde et du diamètre du guide d'onde, l'interaction de l'onde avec les parois du conduit influence considérablement le champ acoustique. Le calcul du champ acoustique par l'approche de la thermoacoustique linéaire classique consiste [9,12], tout d'abord, en une simplification des équations de la mécanique des fluides ((1.1) à (1.3)) faite sur la base de l'approximation de couche limite de Prandtl [43]. Le développement des

équations simplifiées à l'ordre un de la perturbation acoustique (1.9) permet alors leur linéarisation puis leur résolution en tenant compte des interactions viscothermiques de l'onde avec les parois. Du fait que la configuration de sources excitatrices adoptée n'est pas précisée, cette résolution se limite à exprimer les composantes fluctuantes des champs de vitesse et de température en fonction du champ fluctuant de pression.

2.2.1 Interaction de l'onde acoustique avec les parois du conduit

Des ondes thermiques et visqueuses diffusent dans le fluide suite aux interactions viscothermiques de l'onde acoustique avec les parois du guide d'onde. Cette diffusion a lieu dans des couches fluides sur des distances limites suivant la direction normale à la paroi. En se limitant à un régime d'écoulement oscillatoire laminaire, les épaisseurs des couches limites visqueuse et thermique δ_ν et δ_k sont données respectivement par les relations [9,12] :

$$\delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega} \tag{2.2}$$

$$\delta_k = \sqrt{2\kappa/\omega} \tag{2.3}$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique, et $\kappa = \chi/(\rho c_p)$ est la diffusivité thermique. Pour des fluides dont le nombre de Prandtl σ est de l'ordre de l'unité, δ_ν et δ_k ont le même ordre de grandeur du fait que,

$$\delta_k = \delta_\nu / \sqrt{\sigma} \tag{2.4}$$

Le mode d'interaction entre l'onde acoustique et les parois du guide d'onde est défini selon la définition classique [9,12,25], par le rapport -dépendant de la fréquence- de l'épaisseur de la couche limite visqueuse au diamètre du guide d'onde (δ_ν / D). Les fluides considérés sont des fluides dans lesquels il n'y a pas de différence significative entre les épaisseurs des couches limites visqueuse et thermique ($\sigma \approx 1$). De ce fait, deux régimes limites se présentent : le régime pour lequel $\delta_\nu / D << 1$ dit quasi-adiabatique est spécifique à une faible interaction onde / paroi, et le régime pour lequel $(\delta_\nu / D)^2 >> 1$ dit quasi-isotherme caractérise une grande interaction onde / paroi [25,35].

2.2.2 Approximation couche limite

La considération d'une épaisseur de couche limite visqueuse δ_v ($\approx \delta_k$) en régime quasi-adiabatique ($\delta_v / D << 1$) ou bien d'un diamètre du conduit en régime quasi-isotherme ($(\delta_v / D)^2 >> 1$), faible devant la longueur caractéristique L_x correspondant à la variation du champ de pression suivant l'axe x ($\delta_v << L_x$ et $D << L_x$), permet de négliger les termes en $\partial / \partial x$ devant ceux en $\partial / \partial y$ dans les équations de conservation de quantité de mouvement correspondant à la composante axiale de la vitesse du fluide v_x (1.2) et de l'énergie (1.3),

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \quad , \tag{2.5}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 \quad . \tag{2.6}$$

où v_y désigne la composante transversale de la vitesse. En effet, d'une part, l'ordre de grandeur de l'opérateur $\partial / \partial x$ est de $1/L_x$ alors que celui de $\partial / \partial y$ est de $1/\delta_v$ en régime quasi-adiabatique et de $1/D$ en régime quasi-isotherme. D'autre part, l'ordre de grandeur de la composante de vitesse v_y est réduit de δ_v / L_x ou bien de D / L_x par rapport à celui de la composante v_x et ce, en vertu de la loi de conservation de masse (1.1). Il s'ensuit un gradient transversal de la pression hydrodynamique ($\partial p / \partial y$) négligeable devant le gradient axial ($\partial p / \partial x$),

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \quad . \tag{2.7}$$

2.2.3 Calcul du champ acoustique

En tenant compte des variations de l'entropie massique (1.7), de la relation thermodynamique des gaz parfaits $h = -1/\rho$ et de la célérité du son adiabatique $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$ (avec $\gamma = c_p / c_v$) [44,45], le développement au premier ordre des équations (2.5) et (2.6) et de l'équation de conservation de masse (1.1) mène aux système d'équations aux dérivées partielles linéaires en composantes fluctuantes $\tilde{v}_x$, $\tilde{T}$, $\tilde{v}_y$ et $\tilde{p}$ ci-dessous,

$$-i\omega\rho_0\widetilde{v}_x = -\frac{d\widetilde{p}}{dx} + \mu_0\frac{\partial^2\widetilde{v}_x}{\partial y^2} \quad , \tag{2.8}$$

$$-i\omega\rho_0 c_p\widetilde{T} + i\omega\widetilde{p} = \chi\frac{\partial^2\widetilde{T}}{\partial y^2} \quad , \tag{2.9}$$

$$i\omega\frac{\rho_0}{T_0}\widetilde{T} - \frac{i}{\omega}\left(\frac{\omega}{a_0}\right)^2\gamma\widetilde{p} + \rho_0\frac{\partial\widetilde{v}_x}{\partial x} + \rho_0\frac{\partial\widetilde{v}_y}{\partial y} = 0 \quad , \tag{2.10}$$

où les paramètres c_p et χ sont supposés implicitement indépendants de la température et $a_0 = \sqrt{\gamma\, p_0/\rho_0}$ est la célérité adiabatique du son aux conditions initiales de pression et de température (p_0 et T_0).

Avec la condition d'adhérence aux parois $v_x(y = \pm D/2) = 0$, des interfaces paroi-gaz isothermes $T(y = \pm D/2) = 0$ (capacité calorifique des parois importante devant celle du fluide) et la condition de symétrie par rapport à l'axe des du conduit $v_y(y = 0) = 0$, la résolution du système d'équations (2.8) et (2.9) et (2.10) donne les solutions suivantes en $\widetilde{p}$,

$$\widetilde{v}_x = \frac{1}{i\omega\rho_0}(1 - F_v)\frac{d\widetilde{p}}{dx} \quad , \tag{2.11}$$

$$\widetilde{T} = \frac{1}{\rho_0 c_p}(1 - F_k)\widetilde{p} \quad , \tag{2.12}$$

$$\widetilde{v}_\eta = -\frac{1}{i\omega\rho_0}\left(\frac{D}{2}\right)\left\{(\eta - \Phi_v)\frac{d^2\widetilde{p}}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{a_0}\right)^2[\eta + (\gamma - 1)\Phi_k]\widetilde{p}\right\} \quad , \tag{2.13}$$

où $\widetilde{v}_\eta$ désigne la composante de vitesse transversale dans le système d'axes (x,η). Les fonctions F_v et F_k décrivent respectivement, les distributions transversales des champs de vitesse et de température dans le conduit,

$$F_{v,k} = \frac{\cosh\left(\dfrac{D}{(1+i)\,\delta_{v,k}}\eta\right)}{\cosh\left(\dfrac{D}{(1+i)\,\delta_{v,k}}\right)} \quad . \tag{2.14}$$

L'intégration de $F_{v,k}$ entre 0 et η donne les fonctions $\Phi_{v,k}$,

$$\Phi_{v,k} = \frac{(1+i)\delta_{v,k}}{D}\frac{\sinh\left(\dfrac{D}{(1+i)\delta_{v,k}}\eta\right)}{\cosh\left(\dfrac{D}{(1+i)\delta_{v,k}}\right)} \quad . \tag{2.15}$$

2.3 Ondes progressives dans l'acoustitron

Dans un acoustitron (figure 2.3), la disposition d'un grand nombre de sources excitatrices équidistantes le long des parois donne lieu à un champ de vitesse fluctuant normal à celles-ci (les parois) et continu $v_a(x,t)$, caractérisé par une amplitude v_0, une fréquence f et un nombre d'onde k_a [41],

$$v_a(x,t)\big|_{\eta=\pm 1} = \mp\hat{\eta} v_0 \mathrm{Re}(e^{-i(\omega t - k_a x)}) \quad , \tag{2.16}$$

où $\hat{\eta}$ désigne un vecteur unitaire suivant la direction transversale. La propagation de l'excitation a lieu dans le sens positif des x à la vitesse c_a, telle que $k_a = \omega / c_a$. Les quantités v_0, f et k_a sont les paramètres de contrôle.

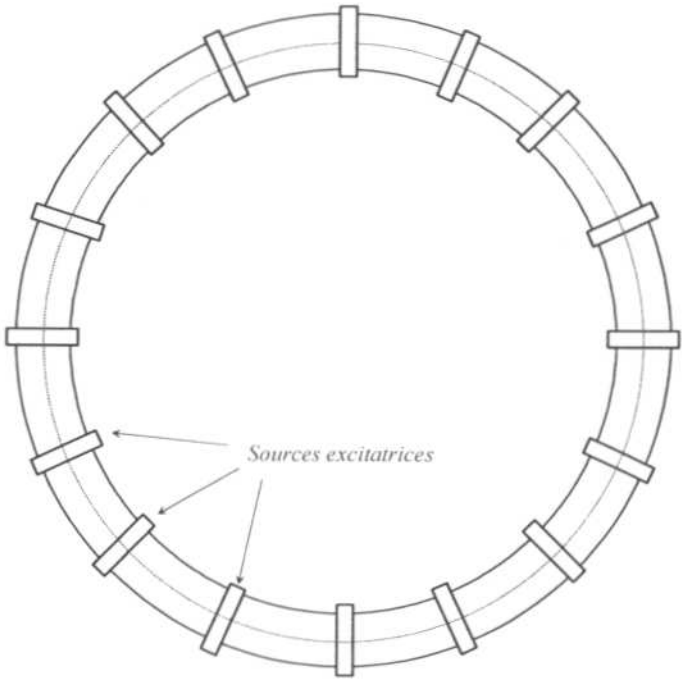


Fig. 2.3. Schéma de l'acoustitron.

2.3.1 Equation de propagation de la pression

Dans la théorie de la thermoacoustique, la substitution de la condition d'adhérence à la paroi $\tilde{v}_\eta(\eta = +1) = 0$ ou bien $\tilde{v}_\eta(\eta = -1) = 0$, dans l'expression de la vitesse transversale

(2.13) donne une équation différentielle linéaire homogène du second ordre pour la pression acoustique $\widetilde{p}$ (voir équation (54) dans la référence [12]),

$$\frac{d^2\widetilde{p}}{dx^2} + k_0^2\left(1 + \frac{1}{1-f_v}[f_v + (\gamma-1)f_k]\right)\widetilde{p} = 0 \quad , \tag{2.17}$$

où $k_0 = \omega/a_0$ est le nombre d'onde acoustique adiabatique. Les valeurs des fonctions $\Phi_{v,k}$ (2.15) pour $\eta=1$ correspondent à $f_{v,k}$,

$$f_{v,k} = \frac{(1+i)\delta_{v,k}}{D}\tanh\left(\frac{D}{(1+i)\delta_{v,k}}\right) \quad . \tag{2.18}$$

Les fonctions $f_{v,k}$ dépendent du rapport des épaisseurs de couches limites au diamètre du guide d'onde et permettent de tenir compte des dissipations viscothermiques dans le fluide. Ces dissipations, issues de l'interaction entre l'onde acoustique et les parois, sont représentées dans l'équation (2.17), par la partie imaginaire du nombre d'onde complexe k,

$$k = k_0\left(1 + \frac{1}{1-f_v}[f_v + (\gamma-1)f_k]\right)^{1/2} \quad . \tag{2.19}$$

Dans le cas de l'acoustitron, les vibrations normales des parois confèrent à la vitesse transversale des conditions aux limites différentes de celles des machines thermoacoustiques classiques,

$$v_{1\eta}(x,\eta,t)\big|_{\eta=\pm1} = v_a(x,t)\big|_{\eta=\pm1} \quad . \tag{2.20}$$

La substitution de $\widetilde{v}_\eta$ par sa valeur pour $\eta = +1$ ou bien $\eta = -1$ (2.20) à son expression (2.13) donne une équation différentielle non homogène pour la pression,

$$\frac{d^2\widetilde{p}}{dx^2} + k_0^2\left(1 + \frac{1}{1-f_v}[f_v + (\gamma-1)f_k]\right)\widetilde{p} = \frac{-2i\omega\rho_0 v_0}{D(1-f_v)}e^{ik_a x} \quad . \tag{2.21}$$

La solution de l'équation différentielle non homogène (2.21) se présente comme une somme de la solution de l'équation homogène (2.17) et d'une solution particulière de (2.21). Le champ de pression solution de (2.17) consiste en la superposition de deux ondes contre propagatives,

$$\widetilde{p} = \widetilde{p}^{+}e^{ikx} + \widetilde{p}^{-}e^{-ikx} \quad , \tag{2.22}$$

où $\widetilde{p}^{+}$ et $\widetilde{p}^{-}$ sont les amplitudes complexes respectives des ondes propagative (dans le sens positif des x) et contre propagative (en sens inverse). La solution particulière de l'équation (2.21), dite aussi solution forcée, est proportionnelle au terme inhomogène $e^{ik_a x}$.

Comme dans les travaux de Lawrenson *et coll.* [41], un champ de forces excitatrices périodique est considéré en régime acoustique établi. Ce qui correspond à une longueur de l'acoustitron (L) égale à un nombre entier (n) de longueurs d'onde associée à la vibration des parois ($\lambda_a = 2\pi / k_a$). Dans ces conditions, l'onde acoustique générée dans l'acoustitron est propagative pure et son amplitude est constante (indépendante de la coordonnée x). L'homogénéité de l'amplitude de l'onde provenant des périodicités du champ de forces excitatrices et de la géométrie de l'acoustitron, ne peut être satisfaite par la solution de l'équation homogène (2.22). Ainsi, seule la solution forcée est retenue dans la résolution de l'équation de pression (2.21),

$$\widetilde{p} = p_a e^{ik_a x} \quad . \tag{2.23}$$

L'amplitude p_a (constante en espace et en temps) est calculée en reportant l'expression (2.23) dans l'équation (2.21),

$$p_a = \frac{-2i\omega\rho_0 v_0}{D(1-f_v)(k_R^2 + 2ik_R k_I - k_I^2 - k_a^2)} \quad , \tag{2.24}$$

où $k_R = Re(k)$ et $k_I = Im(k)$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde acoustique k ($k = k_R + i\, k_I$).

Il est à noter que la longueur caractéristique L_x correspondant à la variation du champ de pression (2.24) suivant l'axe x peut être estimée par k_a^{-1} ($L_x \approx k_a^{-1}$). Et par conséquent, la condition de validité de cette solution (2.24) dérivée en adoptant l'approximation couche limite, est donnée par une épaisseur de la couche limite visqueuse δ_v (en régime quasi-adiabatique) ou bien un diamètre de l'acoustitron D (en régime quasi-isotherme) faible devant la longueur d'onde λ_a ($min(\delta_v, D) << k_a^{-1}$). Cette condition est complétée par la considération d'une amplitude des vibrations des parois v_0 / ω négligeable devant la longueur caractéristique des variations transversales du champ acoustique ($min(\delta_v, D)$).

2.3.2 Régimes d'interaction quasi-adiabatique et quasi-isotherme

Pour une valeur donnée de D et un gaz à viscosité cinématique ν connue, en fixant la fréquence d'oscillation des sources excitatrices, le régime d'interaction onde / paroi est alors identifié car le paramètre δ_v / D est fixé. Néanmoins, de l'équation (2.24), il découle que

même dans un régime d'interaction onde / paroi fixé, il est encore possible d'optimiser la vitesse $c_a = \omega / k_a$ de la propagation de la force excitatrice pour avoir une amplitude de pression maximale. L'amplitude de pression atteint son maximum quand le nombre d'onde k_a (et par suite $L = 2\pi n / k_a$) est choisi de façon à satisfaire la condition,

$$k_a^2 = k_R^2 - k_I^2 = Re(k^2) \quad . \tag{2.25}$$

Cette situation optimale correspond au rapport de la vitesse de propagation de la force excitatrice à la vitesse adiabatique du son (c_a / a_0),

$$\frac{c_a}{a_0} = \frac{k_0}{(k_R^2 - k_I^2)^{1/2}} = \left(Re\left(\frac{1 - f_v}{1 + (\gamma - 1) f_k} \right) \right)^{1/2} \quad . \tag{2.26}$$

L'amplitude de pression correspondant à la vitesse optimale est obtenue en tenant compte de la condition (2.25) dans l'expression (2.24),

$$p_a = \frac{-\omega \rho_0 v_0}{D(1 - f_v) k_R k_I} = -\left(\frac{Da_0}{v_0} \right) \left(\frac{(\delta_v / D)^2}{2(1 - f_v) k_{RN} k_{IN}} \right) p_c \quad , \tag{2.27}$$

où les quantités $k_{RN} = k_R / k_0$ et $k_{IN} = k_I / k_0$ sont les parties réelle et imaginaire adimensionnelles du nombre d'onde k et $p_c = \rho_0 a_0 v_0$ est la pression caractéristique.

Les dépendances de la vitesse normalisée (2.26), et de l'amplitude de pression maximale (2.27) - normalisée par rapport à la pression caractéristique p_c -, du régime d'interaction onde / paroi sont présentées en figures (2.4) et (2.5) pour de l'air ($\gamma = 1.4$ et $\sigma = 0.71$). Dans une transition du régime quasi-adiabatique au régime quasi-isotherme, la vitesse optimale diminue (figure 2.4) alors que le module de la pression maximale croît (figure 2.5).

Il est important de souligner ici, que par la suite (Chapitres 2, 3 et 5), dans l'exploration des variations des différents processus physiques en fonction du rapport (δ_v / D), la longueur du résonateur est supposée varier afin de continuer à satisfaire la condition optimale (2.25). De surcroît, le fluide considéré est de l'air ayant pour propriétés physiques $\gamma = 1.4$, $\sigma = 0.71$ et $\beta = 0.77$. Le paramètre spécifique au fluide utilisé β est défini ultérieurement (Chapitre 3).

En régime quasi-adiabatique, un développement asymptotique (pour $\delta_v / D << 1$) du nombre d'onde k (2.19) conduit à écrire,

$$k_{(\delta_v / D << 1)} \cong k_0 \left(1 + (1 + i) c \left(\frac{\delta_v}{D} \right) + \cdots \right) \quad , \tag{2.28}$$

où, c, la constante de Kirchhoff, est une fonction du rapport γ et du nombre de Prandtl σ ($c = (1 + (\gamma - 1)/\sqrt{\sigma})/2$). La partie imaginaire du nombre d'onde $k_I \cong k_0 c(\delta_v / D)$, associée aux dissipations viscothermiques, est négligeable devant sa partie réelle $k_R \cong k_0$; d'où $k_R^2 - k_I^2 \cong k_0^2$. Ainsi, la valeur du rapport de vitesse (c_a / a_0) avoisine l'unité (voir figure 2.4) et l'amplitude de pression (p_a) est une fonction linéaire du rapport (δ_v / D) (voir figure 2.5),

$$c_a / a_0 \cong 1 \quad , \tag{2.29}$$

$$p_a = -|p_a| \cong -\left(\frac{Da_0}{\nu_0}\right)\left(\frac{1}{2c}\right)\left(\frac{\delta_v}{D}\right)p_c \quad , \tag{2.30}$$

compte tenu du fait que ($1 - f_v \cong 1$) dans le développement de (2.27).

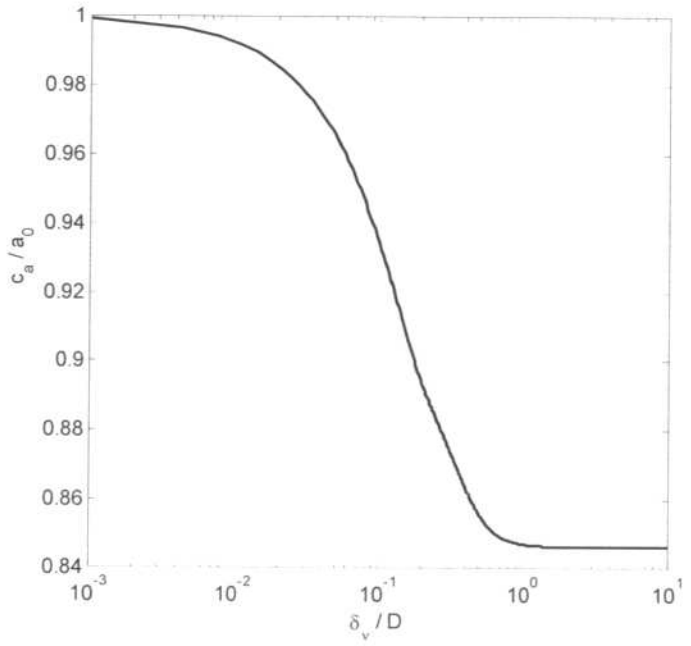


Fig. 2.4. Evolution du rapport de vitesses (c_a / a_0) en fonction du rapport (δ_v / D).

L'équation (2.29) correspond à un synchronisme entre la force excitatrice en mouvement et l'onde acoustique propagative dans le résonateur annulaire caractérisé par un grand facteur de qualité ($k_R >> k_I$). L'évolution linéaire du rapport de pression ($|p_a| / p_c$) (2.30) correspond à une pente de valeur ($+1$) pour $\delta_v / D \leq 10^{-1}$ dans la représentation logarithmique de la figure (2.5). L'amplitude de la pression s'approche du zéro quand le rapport (δ_v / D) tend vers zéro ; ce qui caractérise l'absence de l'interaction entre les parois et l'onde acoustique.

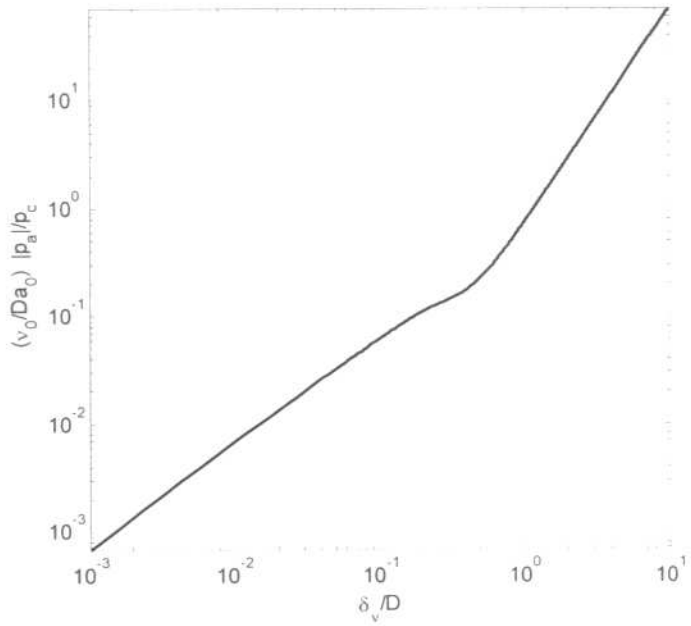


Fig. 2.5. Evolution du module de l'amplitude de pression p_a normalisée par rapport à la pression caractéristique p_c ($|p_a|/p_c$) en fonction du rapport (δ_v/D).

En réitérant les développements asymptotiques des variables ci-dessus en régime quasi-isotherme ($(\delta_v/D)^2 >> 1$), les expressions respectives suivantes sont obtenues,

$$k^2_{(\delta_v/D)^2>>1} \cong k_0^2\left(i6\gamma\left(\frac{\delta_v}{D}\right)^2 + (\sigma - \gamma(\sigma - 6/5)) + \cdots \right) , \tag{2.31}$$

$$c_a = \frac{a_0}{(\gamma(6/5-\sigma)+\sigma)^{1/2}} , \tag{2.32}$$

$$\frac{|p_a|}{p_c} \cong \left(\frac{Da_0}{v_0}\right)\left(\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{\delta_v}{D}\right)^2 , \tag{2.33}$$

puisque $(1 - f_v) \cong -i\,(D/\delta_v)^2/6$ et $k_R \cong k_I \cong k_0\sqrt{3\gamma}(\delta_v/D)$ pour $(\delta_v/D)^2 >> 1$.

Ainsi, en régime quasi-isotherme, la vitesse optimale s'approche d'une valeur constante (2.32) qui est différente des vitesses adiabatique et isotherme des ondes acoustiques se propageant en espace libre (voir figure 2.4). Il s'ensuit que dans ce régime, l'amplitude de pression est faiblement sensible à la vitesse de propagation de la force excitatrice.

Le rapport de pression ($|p_a|/p_c$) tend vers l'infini le long d'une parabole (2.33).caractérisée par une pente de valeur ($+2$) dans le représentation logarithmique de la figure (2.5). En effet, d'une part, les ondes acoustiques sont fortement atténuées ($k_R \cong k_I$), et d'autre part, l'excitation de l'onde perd en efficacité en raison de l'absence du synchronisme

entre la source excitatrice et l'onde acoustique ($k_a << k_R \propto (\delta_v / D)$). Néanmoins, ces deux facteurs sont compensés par l'augmentation de l'amplitude de la force excitatrice (partie droite de l'équation (2.21)) qui est proportionnelle au terme $(1 - f_v)^{-1} \propto (\delta_v / D)^2 >> 1$, l'amplitude v_0 de la vitesse d'oscillation des parois étant a priori fixée.

2.4 Ondes progressives dans le résonateur de Ceperley

Le résonateur de Ceperley [42] est un guide d'onde à géométrie toroïdale équipé de deux sources excitatrices de faible largeur d (sources ponctuelles) séparées d'une distance b (figure 2.6). Les vibrations normales aux parois introduites par ces sources sont décrites par les condition aux limites sur la composante fluctuante transversale du champ de vitesse $v_{1\eta}$,

$$v_{1\eta}(x,\eta,t)\Big|_{\eta=\pm 1} = \mp v_0[d \times \delta(x)\mathrm{Re}(e^{-i\omega t}) + d \times \delta(x+b)\mathrm{Re}(e^{-i(\omega t+\varphi)})] \quad , \tag{2.34}$$

où δ désigne la fonction de Dirac, $\omega = 2\pi f$ et v_0 sont respectivement la pulsation et l'amplitude du mouvement oscillatoire des parois, et φ est le déphase entre les excitations des sources. Ici, les paramètres de contrôle sont f, v_0 et φ.

2.4.1 Résolution de l'équation de propagation de l'onde

Dans le cas du résonateur de Ceperley, la composante fluctuante transversale du champ de vitesse $\tilde{v}_\eta$ est nulle le long des parois sauf aux positions $x = 0$ et $x = -b$ des sources excitatrices (voir équation (2.34)). En reportant les conditions aux limites (2.34) dans l'expression (2.13) de $\tilde{v}_\eta$, une équation d'onde inhomogène est obtenue pour la pression acoustique $\tilde{p}$,

$$\frac{d^2\tilde{p}}{dx^2} + k^2\tilde{p} = \frac{-2i\omega\rho_0 v_0 d(\delta(x) + \delta(x+b)e^{-i\varphi})}{D(1-f_v)} \quad . \tag{2.35}$$

La résolution de l'équation inhomogène de pression (2.35) consiste d'une part, en l'adoption de solutions, du type (2.22) de l'équation homogène (2.17), différentes selon le tronçon de conduit considéré :

$$\tilde{p}_s = \tilde{p}_s^{+} e^{ikx} + \tilde{p}_s^{-} e^{-ikx} \quad , \tag{2.36}$$

entre les sources excitatrices ($-b \le x \le 0$), et

$$\widetilde{p}_w = \widetilde{p}_w^{+} e^{ikx} + \widetilde{p}_w^{-} e^{-ikx} \quad , \tag{2.37}$$

dans la partie restante du guide d'onde ($0 \le x \le L - b$). Et d'autre part, ces solutions doivent vérifier les conditions aux limites de continuité de l'amplitude de pression ($\widetilde{p}$) et de discontinuité du gradient de celle-ci ($d\widetilde{p}/dx$) dans les sections transversales du guide d'onde $x = 0$ et $x = -b$. Ce qui correspond à écrire,

$$\widetilde{p}(x = 0^{+}) = \widetilde{p}(x = 0^{-}) \quad , \tag{2.38}$$

$$\left.\frac{d\widetilde{p}}{dx}\right|_{0^{+}} - \left.\frac{d\widetilde{p}}{dx}\right|_{0^{-}} = \frac{-2i\omega\rho_0 v_0 d}{D(1 - f_v)} \quad , \tag{2.39}$$

$$\widetilde{p}(x = (-b)^{+}) = \widetilde{p}(x = (-b)^{-}) \quad , \tag{2.40}$$

$$\left.\frac{d\widetilde{p}}{dx}\right|_{(-b)^{+}} - \left.\frac{d\widetilde{p}}{dx}\right|_{(-b)^{-}} = \frac{-2i\omega\rho_0 v_0 d e^{-i\varphi}}{D(1 - f_v)} \quad . \tag{2.41}$$

Les sauts de gradient de pression (2.39) et (2.41) sont calculés par intégration de l'équation de pression (2.35) aux voisinages immédiats des sources excitatrices.

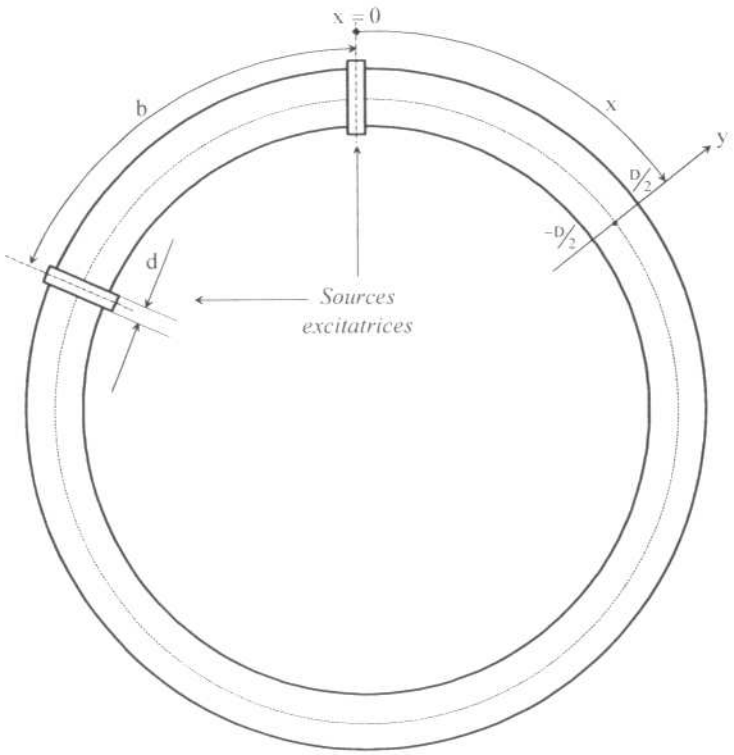


Fig. 2.6. Schéma du résonateur de Ceperley.

Le report des conditions aux limites (2.38) à (2.41) dans les expressions des amplitudes de pression (2.36) et (2.37) permet d'établir un système de quatre équations algébriques linéaires dont les inconnues sont les amplitudes des ondes propagatives dans le sens positif des x et contre propagatives correspondant aux deux tronçons de conduit distincts. Le système d'équations obtenu s'écrit sous la forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ e^{ik(L-b)} & e^{-ik(L-b)} & -e^{-ikb} & -e^{ikb} \\ e^{ik(L-b)} & -e^{-ik(L-b)} & -e^{-ikb} & e^{ikb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{p}_w^{+} \\ \widetilde{p}_w^{-} \\ \widetilde{p}_s^{+} \\ \widetilde{p}_s^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -p_v \\ 0 \\ p_v e^{-i\varphi} \end{bmatrix} , \tag{2.42}$$

où la variable complexe de pression p_v est donnée par la relation,

$$p_v = \frac{2\omega\rho_0 v_0 d}{k(1-f_v)D} . \tag{2.43}$$

La résolution du système d'équations (2.42) permet de définir le champ de pression et par suite, le champ acoustique dans le résonateur de Ceperley,

$$\widetilde{p}_w^{+} = \left(\frac{-ip_v}{4\sin(kL/2)}\right) e^{-ikL/2}\left(e^{-i(\varphi-kb)}+1\right) , \tag{2.44}$$

$$\widetilde{p}_w^{-} = \left(\frac{-ip_v}{4\sin(kL/2)}\right) e^{ikL/2}\left(e^{-i(\varphi+kb)}+1\right) , \tag{2.45}$$

$$\widetilde{p}_s^{+} = \left(\frac{-ip_v}{4\sin(kL/2)}\right) e^{ikL/2}\left(e^{-i(\varphi+k(L-b))}+1\right) , \tag{2.46}$$

$$\widetilde{p}_s^{-} = \left(\frac{-ip_v}{4\sin(kL/2)}\right) e^{-ikL/2}\left(e^{-i(\varphi-k(L-b))}+1\right) . \tag{2.47}$$

2.4.2 Solution propagative en régime quasi-adiabatique

Des niveaux élevés d'énergie acoustique sont obtenus pour de faibles dissipations viscothermiques, ce qui correspond à une partie imaginaire du nombre d'onde faible devant sa partie réelle ($k_R >> k_I$) caractéristique des régimes d'interaction onde / paroi quasi-adiabatiques (voir équation (2.28)). Au voisinage de la résonance au mode d'excitation fondamental ($L \cong \lambda$), un développement asymptotique faisant intervenir le paramètre de faible amplitude (k_I / k_R) (régime quasi-adiabatique), permet d'établir une formule approchée pour l'amplitude de l'onde propagative $\widetilde{p}_w^{+}$ (2.44),

$$\widetilde{p}_w^+ = -\frac{p_v}{2k_I L}(e^{-i(\varphi - k_R b)} + 1) - \frac{p_v}{2}\left(\frac{1}{2}(e^{-i(\varphi - k_R b)} + 1) - \frac{b}{L}\right) + \cdots \quad . \tag{2.48}$$

La contribution majeure (d'ordre supérieur) dans $\widetilde{p}_w^+$ provient du premier terme dans le développement (2.48) ($|p_v|/(k_I L) >> |p_v|$). Du fait que $f_v << 1$ et $k \cong k_R$ en régime quasi-adiabatique, la variable de pression p_v correspond à,

$$p_v \cong 2a_0\rho_0 v_0(d/D) \quad . \tag{2.49}$$

Il est à noter que les termes d'ordre inférieur dans le développement (2.48) assurent la continuité de la pression (équations (2.38) et (2.40)) et notamment, les discontinuités du gradient de pression (équations (2.39) et (2.41)).

L'application d'un développement asymptotique similaire à (2.48) aux amplitudes $\widetilde{p}_w^-$ (2.45), $\widetilde{p}_s^+$ (2.46) et $\widetilde{p}_s^-$ (2.47), tout en retenant les termes d'ordre supérieur, permet de démontrer que les champs de pression entre les sources excitatrices et dans le reste du guide d'onde sont identiques,

$$\widetilde{p} = \widetilde{p}^+ e^{ik_R x} + \widetilde{p}^- e^{-ik_R x} \quad , \tag{2.49}$$

pour $0 \le x \le L$, compte tenu du fait que $\widetilde{p}_w^+ \cong \widetilde{p}_s^+$ et $\widetilde{p}_w^- \cong \widetilde{p}_s^-$. Les amplitudes des ondes propagative et contre propagative $\widetilde{p}^+$ et $\widetilde{p}^-$ sont données par les relations,

$$\widetilde{p}^+ = -p_c(e^{-i(\varphi - k_R b)} + 1) \quad , \tag{2.50}$$

$$\widetilde{p}^- = -p_c(e^{-i(\varphi + k_R b)} + 1) \quad , \tag{2.51}$$

où $p_c = p_v / 2k_I L$ est une pression caractéristique,

$$p_c = \rho_0 a_0 v_0 (d/D)/(k_I L) \quad , \tag{2.52}$$

En approchant les amplitudes de pression $\widetilde{p}_w^+$, $\widetilde{p}_w^-$, $\widetilde{p}_s^+$ et $\widetilde{p}_s^-$, par leurs termes d'ordre supérieur dans le développement (2.48), la continuité de l'amplitude de pression aux sections transversales relatives aux sources excitatrices reste bien vérifiée ($\widetilde{p}_w^+ \cong \widetilde{p}_s^+$ et $\widetilde{p}_w^- \cong \widetilde{p}_s^-$). Par ailleurs, les termes d'ordre inférieur dans le développement asymptotique (2.48) rendent bien compte de la discontinuité des gradients d'amplitude de pression dans ces sections ($x = 0$ et $x = -b$).

Conformément au développement asymptotique (2.28) du nombre d'onde k, $k_R \cong k_0 = 2\pi/\lambda$. L'optimisation du module de l'amplitude de pression $|\widetilde{p}|$ (2.49) conduit à un maximum en fixant la distance séparant les sources excitatrices au quart d'onde,

$$b = \lambda/4 \quad . \tag{2.53}$$

En conséquence, l'amplitude de pression $\widetilde{p}$ est réécrite sous la forme compacte,

$$\widetilde{p} = \widetilde{p}^{+}(e^{ik_R x} + (R_\varphi e^{-i\pi/2})e^{-ik_R x}) \quad , \tag{2.54}$$

où le rapport des composantes stationnaire et propagative de l'onde acoustique R_φ est contrôlé en variant le déphasage φ,

$$R_\varphi = \cos(\varphi)/(1+\sin(\varphi)) \quad . \tag{2.55}$$

Pour des sources excitatrices oscillant en quadrature de phase ($\varphi = \pi/2$), le rapport R_φ s'annule ($R_\varphi = 0$). Une onde progressive unique est excitée dans la direction positive de l'axe des x,

$$\widetilde{p} = p_a e^{ik_R x} \quad , \tag{2.56}$$

ayant pour amplitude $p_a = -2p_c$. L'amplitude de pression p_a s'écrit,

$$p_a = -\frac{\rho_0 a_0 v_0}{\pi c}\left(\frac{d}{D}\right)\frac{1}{(\delta_v / D)} \quad , \tag{2.57}$$

compte tenu du fait que la longueur du résonateur (L) équivaut approximativement la longueur d'onde (λ) au voisinage de la résonance au mode d'excitation fondamental,

$$L \cong \lambda = \pi a_0 \delta_v^2 / v_0 \quad . \tag{2.58}$$

Les conditions de génération d'une onde progressive dans un résonateur annulaire à deux sources excitatrice ($b = \lambda/4$ et $\varphi = \pi/2$) furent émises et vérifiées expérimentalement pour la première fois par Ceperley [42]. Ce procédé d'excitation d'ondes acoustiques fut aussi breveté [47].

2.5 Conclusion

L'analyse de la génération d'ondes progressives dans l'acoustitron et le résonateur de Ceperley met en évidence deux procédés d'excitation d'ondes distincts. L'acoustitron fait intervenir un mécanisme d'excitation forcée alors que dans le résonateur de Ceperley, le mécanisme classique d'accumulation d'énergie acoustique, propre aux résonateurs fermés, est utilisé.

Pour l'acoustitron, en imposant un champ de vitesse fluctuant *d'amplitude constante* aux parois du résonateur, l'amplitude de l'onde de pression excitée croît pour des interactions *paroi / onde* devenant importantes, dans une transition du régime quasi-adiabatique au régime

quasi-isotherme. Ainsi, dans le cas où l'amplitude de la vitesse d'oscillation des parois n'est pas fixée alors que la puissance des transducteurs piézo-électriques (donnant lieu au mouvement oscillatoire des parois) est supposée constante, la dépendance de l'amplitude de pression en fonction du régime d'interaction *paroi / onde* doit être reconsidérée.

Pour le résonateur de Ceperley, d'une part, les déplacements associés aux vibrations localisées des sources excitatrices affectent les gradients de pression à des ordres de développement inférieurs. Conséquemment, ces déplacements sont supposés négligeables. D'autre part, l'énergie acoustique délivrée par la source excitatrice accumulée dans le résonateur, est d'autant plus importante que les dissipations viscothermiques sont faibles. En transitant d'un régime quasi-adiabatique modéré ($0.01 < \delta_v / D \leq 0.1$) à un régime quasi-adiabatique aigu ($\delta_v / D \leq 0.01$), l'amplitude de pression tend à croître infiniment en l'absence des pertes viscothermiques (phénomène de résonance).

Chapitre 3

Ecoulements redressés instationnaires dans l'acoustitron et le résonateur de Ceperley

L'approximation couche limite constitue un modèle adéquat pour la description des écoulements redressés dans des résonateurs annulaires (voir § 1.5 et § 2.2.2). En présence d'un champ acoustique propagatif, ce modèle met en évidence deux types de processus non linéaires dans les couches limites viscothermiques, associés à l'excitation de deux écoulements redressés distincts. Une solution analytique en termes de séries de Fourier est développée pour le calcul de ces écoulements partiels ainsi que de l'écoulement résultant total (§ 3.1). Les forces excitatrices des écoulements redressés découlent des contraintes de Reynolds dans les couches limites viscothermiques. L'examen des répartitions spatiales (le long de la section transversale du conduit) des forces excitatrices et des écoulements partiels stationnaires leur correspondant, pour différents rapports de l'épaisseur de la couche limite visqueuse au diamètre du conduit, permet de dissocier deux mécanismes d'influence du régime d'interaction onde / paroi (§ 3.1). Lié au procédé de génération de l'onde acoustique, le premier mécanisme consiste en la variation de l'amplitude de l'onde avec le régime d'interaction onde / paroi (voir § 2.3.2 et § 2.4.2). Les vitesses d'écoulements redressés sont proportionnelles au carré de l'amplitude de l'onde acoustique [1-9]. Les coefficients de proportionnalité reliant ces deux quantités dépendent aussi du régime d'interaction onde / paroi (second mécanisme).

La caractérisation des écoulements redressés dans l'acoustitron (§ 3.2) permet d'étudier l'influence du régime d'interaction / onde paroi sur les coefficients de proportionnalité relatives aux vitesses d'écoulements redressés (§ 3.2.1). En considérant la moyenne spatiale des vitesses d'écoulements suivant la section transversale du guide d'onde, la solution analytique stationnaire montre clairement des écoulements partiels de sens opposés, dont la résultante s'annule en un régime quasi-adiabatique dit critique (§ 3.2.2.1). Par ailleurs, la

solution analytique moyenne (en section) instationnaire révèle une évolution temporelle devenant non monotone en transitant par le régime critique vers des régimes quasi-adiabatiques aigus (§ 3.2.2.2). Cette analyse sommaire des écoulements redressés moyens en régimes d'écoulement stationnaire et transitoire, permet de délimiter plusieurs gammes de régimes d'interaction onde / paroi (§ 3.2.2). Les processus de stabilisation des écoulements redressés sont étudiés de façon détaillée pour ces différents intervalles du rapport de l'épaisseur de la couche limite visqueuse au diamètre du conduit (§ 3.2.3). Les temps caractéristiques à l'établissement des écoulements redressé moyens sont évalués et discutés au paragraphe 3.2.4.

En dépit des procédés de génération d'onde acoustique différents pour l'acoustitron (§ 3.2) et le résonateur de Ceperley (§ 3.3), le même modèle analytique établi pour le calcul des écoulements redressés dans l'approximation couche limite (voir § 1.5 et § 3.1) leur est appliqué. La génération d'un champ acoustique propagatif dans le résonateur de Ceperley n'est possible qu'en régime d'interaction onde / paroi quasi-adiabatique. Les écoulements redressés excités dans le résonateur de Ceperley en présence de ce type de champ acoustique présentent des dépendances spatiotemporelles (en fonction du rapport de l'épaisseur de la couche limite visqueuse au diamètre du conduit) identiques à celles de l'acoustitron. Suite à la dépendance des forces excitatrices et des écoulements redressés de l'amplitude de l'onde, l'influence du régime d'interaction onde / paroi sur celle-ci constitue le seul point différenciant les deux résonateurs annulaires (§ 3.3.1). La génération d'une onde acoustique à composantes propagative et stationnaire ainsi que le contrôle de leur rapport sont notamment simples dans un résonateur de Ceperley (voir § 2.4.2). L'écoulement redressé associé à la composante stationnaire de l'onde est similaire par sa périodicité le long du conduit aux écoulements de Rayleigh (§ 3.3.2).

Les temps caractéristiques d'établissement des écoulements redressés donnés par le modèle analytique sus désigné (pour le résonateur de Ceperley ou l'acoustitron) sont dans certaines conditions, de bonnes approximations pour le développement des écoulements redressés dans les machines thermoacoustiques annulaires (§ 3.4). La fin de ce chapitre porte sur l'impossibilité d'explorer l'écoulement redressé en dehors du régime d'interaction quasi-adiabatique dans le résonateur de Ceperley ainsi que sur les restrictions dimensionnelles imposées aux sources excitatrices pour éviter d'exciter les écoulements redressés associés au mouvement oscillatoire d'un corps solide dans un fluide ou au modes acoustiques évanescents (§ 3.5).

3.1 Modélisation analytique des écoulements redressés en présence d'un champ acoustique propagatif

Le champ acoustique propagatif dans un acoustitron ou un résonateur de Ceperley est calculé dans l'approximation de la couche limite (voir § 2.2.2). Cette approximation est aussi adoptée pour la mise en équation de l'écoulement redressé dans ces résonateurs annulaires (voir § 1.5). L'homogénéité des champs de température et de pression moyens ($T_m = T_0$ et $p_m = p_0$) implique des variations spatiales nulles pour les propriétés thermophysiques du fluide, notamment pour la masse volumique $\partial \rho_m / \partial x = 0$. Dans ces conditions, pour un champ acoustique établi, l'équation régissant les variations spatiotemporelles de l'écoulement redressé axial (1.66) s'écrit,

$$\rho_0 \frac{\partial v_{mx}}{\partial t} = -\frac{dp_m}{dx} + \rho_0 \nu_0 \frac{\partial^2 v_{mx}}{\partial y^2} + F_x \quad . \tag{3.1}$$

L'équation (3.1) relie la composante axiale de la vitesse de l'écoulement redressé v_{mx} au champ acoustique via la force volumique axiale F_x,

$$F_x = -\rho_0 \frac{\partial < v_{1x}^2 >}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial < v_{1x} v_{1y} >}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} < \mu_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} > \quad . \tag{3.2}$$

La viscosité dynamique de cisaillement μ est considérée comme étant indépendante de la pression p et fonction uniquement de la température T [9],

$$\mu = \mu_0 (T / T_0)^{\beta} \quad . \tag{3.3}$$

où β est un paramètre spécifique au fluide utilisé. La relation (3.3) est valable pour des fluides de faible viscosité. Un développement asymptotique de la viscosité μ au premier ordre de la perturbation acoustique (voir développement (1.9)) conduit à la relation,

$$\mu_1 = \beta \frac{\mu_0}{T_0} T_1 \quad , \tag{3.4}$$

dont la substitution dans l'expression de la force axiale conduit à écrire,

$$F_x = -\rho_0 \frac{\partial < v_{1x}^2 >}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial < v_{1x} v_{1y} >}{\partial y} + \beta \frac{\rho_0 \nu_0}{T_0} \frac{\partial}{\partial y} < T_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} > \quad , \tag{3.5}$$

puisque $\mu_0 = \rho_0 \nu_0$. L'intensité du champ acoustique propagatif (2.23) est indépendante de la coordonnée axiale x. Ce qui revient à écrire ;

$$\frac{\partial < v_{1x}^2 >}{\partial x} = 0 \quad , \tag{3.6}$$

Ainsi, la force axiale F_x se réduit à deux composantes ($F_x = F_{x1} + F_{x2}$) qui sont réécrites sous la forme,

$$F_{x1} = -\rho_0 \left(\frac{2}{D}\right) \frac{\partial < v_{1x} v_{1\eta} >}{\partial \eta} \quad , \tag{3.7}$$

$$F_{x2} = \beta \frac{\rho_0 v_0}{T_0} \left(\frac{2}{D}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} < T_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial \eta} > \quad , \tag{3.8}$$

compte tenu du changement de variable $y = (D/2)\eta$. La composante de force F_{x2} issue de la dépendance entre la viscosité et la température fut prise en compte dans le calcul des écoulements redressés pour la première fois par Rott [9]. Cette composante de force est en fait, de même ordre de grandeur que les autres composantes de la force F_x notamment la composante restante F_{x1}.

Suite à l'absence d'une force excitatrice dépendant de la coordonnée x (homogénéité de l'intensité acoustique) et à un conduit de géométrie annulaire (champ acoustique symétrique par rapport à l'axe du conduit et périodique suivant ce même axe), la pression hydrodynamique accompagnant l'écoulement redressé p_m est constante,

$$\frac{dp_m}{dx} = 0 \quad . \tag{3.9}$$

Une normalisation des variables temps, vitesse moyenne et force volumique conduit à une représentation adimensionnelle plus adéquate pour l'écoulement redressé. En introduisant le temps caractéristique à l'établissement de l'écoulement redressé transitoire $\tau_c = D^2 / \pi^2 \nu_0$, ainsi que les vitesse et force volumique caractéristiques $v_c = v_0^2 / a_0$ et $F_c = \rho_0 v_0^2 / D$, les variables adimensionnelles respectives suivantes sont obtenues,

$$\theta = \frac{t}{\tau_c} \quad , \tag{3.10}$$

$$v_{mx}^a = \frac{v_{mx}}{v_c} \quad , \tag{3.11}$$

$$F_x^a = \frac{F_x}{F_c} \quad . \tag{3.12}$$

La substitution des expressions (3.10) à (3.12) dans l'équation décrivant l'écoulement redressé (3.1) conduit à l'équation adimensionnelle de diffusion non homogène,

$$\frac{\partial v_{mx}^a}{\partial \theta} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\partial^2 v_{mx}^a}{\partial \eta^2} + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \left(\frac{Da_0}{\nu_0}\right) F_x^a \quad . \tag{3.13}$$

Les forces excitatrices des écoulements redressés sont des gradients spatiaux des contraintes de Reynolds [48]. Les contraintes $\sigma_{1,2}$ correspondant aux forces $F_{x1,2}$ ($F_{x1,2} = \partial\sigma_{1,2}/\partial y$) sont normalisées en introduisant la contrainte caractéristique $\sigma_c = \rho_0 v_0^2/2$. Les forces adimensionnelles $F^a_{x1,2}$ sont alors exprimées en fonction des contraintes adimensionnelles $\sigma^a_{1,2} = \sigma_{1,2}/\sigma_c$,

$$F^a_{x1,2} = \frac{\partial\sigma^a_{1,2}}{\partial\eta} \quad . \tag{3.14}$$

En considérant le champ de pression acoustique (2.23), les contraintes de Reynolds adimensionnelles $\sigma^a_{1,2}$ sont calculées, en substituant les composantes axiale v_{1x} et transversale $v_{1\eta}$ du champ de vitesse fluctuant ainsi que la température fluctuante T_1 par leur expressions respectives (2.11) à (2.13), dans leurs expressions issues de la normalisation,

$$\sigma^a_1 = -\frac{2 < v_{1x} v_{1\eta} >}{v_0^2} \quad , \tag{3.15}$$

$$\sigma^a_2 = \beta\frac{\nu_0}{DT_0}\left(\frac{2}{v_0}\right)^2 < T_1\frac{\partial v_{1x}}{\partial\eta} > \quad . \tag{3.16}$$

Les expressions analytiques obtenues pour $\sigma^a_{1,2}$ sont données en *annexe A*.

L'équation adimensionnelle (3.13) est résolue en tenant compte d'une condition initiale, de deux conditions aux limites et d'une condition de symétrie,

$$v_{mx}(\theta = 0) = 0 \quad , \tag{3.17}$$

$$v_{mx}(\eta = \pm 1) = 0 \quad , \tag{3.18}$$

$$\left.\frac{\partial v_{mx}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = 0 \quad . \tag{3.19}$$

La recherche des solutions possibles de l'équation (3.13), dans l'espace des fonctions orthogonales, satisfaisant les conditions aux limites et de symétrie ci-dessus (équations (3.18) et (3.19)), conduit à adopter les développements en séries de cosinus adaptés suivants,

$$v^a_{mx} = \sum_{n=1}^{\infty} v^a_n \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\eta\right) \quad , \tag{3.20}$$

$$F^a_x = \sum_{n=1}^{\infty} F^a_n \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\eta\right) \quad . \tag{3.21}$$

Les composantes spectrales spatiales v_n^a et F_n^a dépendent du nombre entier n et sont donnés successivement par les relations,

$$v_n^a = \int_{-1}^{1} v_{mx}^a \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\eta\right)d\eta \quad , \tag{3.22}$$

$$F_n^a = (F_{n1}^a + F_{n2}^a) = \int_{-1}^{1} (F_{x1}^a + F_{x2}^a)\cos\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\eta\right)d\eta \quad . \tag{3.23}$$

La substitution des relations (3.20) et (3.21) dans l'équation (3.13) permet d'établir une équation différentielle ordinaire inhomogène pour les composantes spectrales spatiales v_n^a,

$$\frac{\partial v_n^a}{\partial \theta} = -(2n-1)^2 v_n^a + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2\left(\frac{Da_0}{\nu_0}\right)F_n^a \quad . \tag{3.24}$$

L'équation ordinaire du premier degré en la variable de temps adimensionnelle θ (3.24) admet pour solution,

$$v_n^a = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2\left(\frac{Da_0}{\nu_0}\right)(F_{n1}^a + F_{n2}^a)\left(\frac{1-e^{-(2n-1)^2\theta}}{(2n-1)^2}\right) \quad , \tag{3.25}$$

en considérant la condition initiale $v_n^a(\theta=0)=0$. La vitesse moyenne de l'écoulement redressé v_{mx} (3.20) s'écrit compte tenu de l'équation (3.25),

$$v_{mx}^a = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2\left(\frac{Da_0}{\nu_0}\right)\sum_{n=1}^{\infty}(F_{n1}^a + F_{n2}^a)\left(\frac{1-e^{-(2n-1)^2\theta}}{(2n-1)^2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\eta\right) \quad . \tag{3.26}$$

La moyenne spatiale $\overline{v}_{mx}^a$ de la vitesse v_{mx}^a suivant la section transversale du conduit est donnée par la relation,

$$\overline{v}_{xm}^a = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2\left(\frac{Da_0}{\nu_0}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(F_{n1}^a + F_{n2}^a)\frac{(1-e^{-(2n-1)^2\theta})}{(2n-1)^3} \quad , \tag{3.27}$$

puisque $\overline{v}_{mx}^a = (1/2)\int_{-1}^{1} v_{mx}^a d\eta$.

L'écoulement redressé résulte de la superposition $\overline{v}_{mx}^a = \overline{v}_{mx1}^a + \overline{v}_{mx2}^a$ des écoulements partiels excités par les forces $F_{x1,2}^a$. Les vitesses adimensionnelles $\overline{v}_{mx1,2}^a$ sont, comme les forces adimensionnelles $F_{x1,2}^a$ (voir *annexe A*), des fonctions du rapport adimensionnel (δ_v / D), du nombre de Prandtl σ, et du rapport des capacités calorifiques massiques γ. La

force F_{x2}^{a} provient de la dépendance entre la viscosité dynamique du fluide et sa température. De ce fait, la force F_{x2}^{a} ainsi que la vitesse $\bar{v}_{mx2}^{a}$ de l'écoulement excité par celle-ci, dépendent aussi du paramètre β reliant la viscosité à la température (3.3).

Les composantes du champ acoustique v_{1x}, T_1 et $v_{1\eta}$ sont proportionnelles à l'amplitude de la pression acoustique p_a (voir équations (2.11) à (2.13)). Les distributions spatiales de ces composantes le long de la section transversale du conduit sont représentées respectivement par les fonctions F_v, F_k et une combinaison linéaire des fonctions $\Phi_{v,k}$. Les composantes v_{1x}, T_1 et $v_{1\eta}$ ou leur dérivées par rapport à la variable adimensionnelle η interviennent dans les moyennes temporelles correspondant aux forces $F_{x1,2}$ (voir équations (3.7) et (3.8)). Les forces $F_{x1,2}$ sont ainsi proportionnelles au carré du module de l'amplitude de pression ($|p_a|^2$),

$$F_{x1,2} = |p_a|^2 C_{F1,2}(\eta) \quad , \tag{3.28}$$

alors que leurs distributions spatiales transversales sont données par les coefficients de proportionnalité (dépendant de η) $C_{F1,2}$. La solution obtenue pour la vitesse de l'écoulement redressé sous sa forme analytique (3.26) permet d'établir la relation,

$$v_{mx1,2} = |p_a|^2 C_{v1,2}(\eta, t) \quad , \tag{3.29}$$

où, en plus de la variable η, les coefficients de proportionnalité spécifiques à la vitesse de l'écoulement redressé $C_{v1,2}$ dépendent du temps. La proportionnalité entre la vitesse de l'écoulement redressé linéaire et le carré du module de l'amplitude de l'onde est un résultat bien connu en littérature [1-9]. Un écoulement redressé linéaire est un écoulement dans lequel le rôle de la non linéarité hydrodynamique liée au terme convectif de l'équation de Navier-Stokes est négligeable [49].

Les équations (3.28) et (3.29) mettent en évidence une influence, de l'interaction onde / paroi sur les forces et les vitesses, suivant deux mécanismes multiplicatifs. Le premier mécanisme, consistant en la dépendance entre l'amplitude p_a et le régime d'interaction onde / paroi, a été étudié au chapitre précédent (voir § 2.3.2 et § 2.4.2). Le second mécanisme, consistant en la dépendance des coefficients de proportionnalité $C_{F1,2}$ et $C_{v1,2}$ du régime d'interaction onde / paroi, est analysé dans le sous paragraphe 3.2.1.

3.2 Ecoulements redressés dans l'acoustitron

3.2.1 Distributions spatiales des forces et des vitesses

3.2.1.1 Profils des forces excitatrices

La figure (3.1) présente les profils de forces adimensionnelles $F^a_{x1,2}$ le long de la section de l'acoustitron, pour quatre valeurs différentes du rapport de l'épaisseur de la couche limite visqueuse au diamètre de l'acoustitron (δ_v / D). Ces profils sont symétriques par rapport à l'axe de l'acoustitron et ont une moyenne spatiale nulle ($\overline{F}^a_{x1,2} = (1/2)\int_{-1}^{1} F^a_{x1,2} d\eta = 0$).

Le profil de la force F^a_{x1} met en évidence une valeur négative très importante sur les parois de l'acoustitron ($\eta = \pm 1$). En régime quasi-adiabatique (figures 3.1.a et 3.1.b), cette force s'atténue et s'annule rapidement en s'écartant de la paroi, puis croît pour atteindre une valeur positive à de grandes distances par rapport aux parois. Pour de faibles valeurs du rapport (δ_v / D) (figure 3.1.a), la force F^a_{x1} décroît jusqu'à ce qu'elle atteigne un minimum négatif, croît vers une valeur nulle et reste constante le long de la majeur partie de la section transversale de l'acoustitron. Par ailleurs, pour des valeurs modérées du rapport (δ_v / D), en s'éloignant des parois (figure 3.1.b), la force F^a_{x1} atteint un maximum (valeur positive loin des parois), puis décroît et prend une valeur négative constante faible au voisinage de l'axe de l'acoustitron. En conséquence, dans la transition du rapport $\delta_v / D \approx 10^{-2}$ à $\delta_v / D \approx 10^{-1}$, le nombre d'extremums le long de la section transversale du conduit est réduit de 7 à 5 (les extremum aux parois étant inclus). Il est important de noter le fait que les profils de force sont de plus en plus confinés au voisinage des parois quand le rapport (δ_v / D) tend vers zéro.

En régime quasi-isotherme (figure 3.1.d), F^a_{x1} s'atténue de façon graduelle et s'annule en s'écartant loin des parois, puis atteint une valeur maximale sur l'axe. Dans la transition du rapport $\delta_v / D \approx 10^{-1}$ à $\delta_v / D \geq 1$, le nombre d'extrema le long de la section transversale passe de 5 à 3 (les extrema aux parois étant inclus).

La force adimensionnelle F^a_{x2} présente le même profil que F^a_{x1}, sauf que les amplitudes de F^a_{x2} le long de la section transversale sont relativement faibles par rapport à celles de F^a_{x1}.

Pour les propriétés thermophysiques de l'air, le maximum de la force $|F^a_{x2}|$ équivaut approximativement à 10% ou 20% du maximum de $|F^a_{x1}|$.

Les forces axiales $F^a_{x1,2}$ sont de sens opposés pour toute position η de la section transversale, sauf aux voisinages des points annulant ces forces. Les faibles écarts séparant les points annulant les forces $F^a_{x1,2}$ proviennent d'un nombre de Prandtl σ différant faiblement de l'unité pour de l'air.

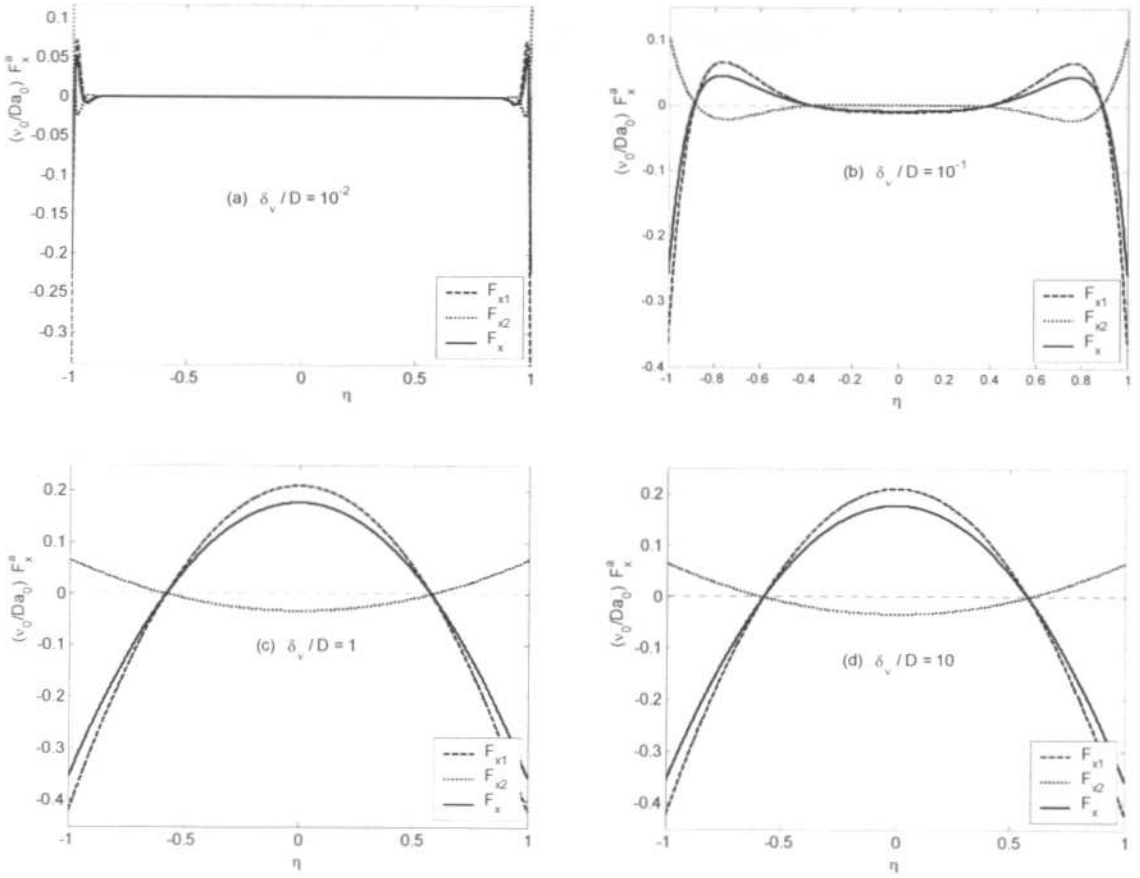


Fig. 3.1. Profils des forces adimensionnelles F^a_{x1}, F^a_{x2} et F^a_x pour différentes valeurs du rapport (δ_v / D).

(a) $\delta_v / D = 10^{-2}$. (b) $\delta_v / D = 10^{-1}$. (c) $\delta_v / D = 1$. (d) $\delta_v / D = 10$.

Il est important de souligner qu'il est difficile de différencier les profils des forces correspondant respectivement aux rapports $\delta_v/D \approx 1$ et $\delta_v/D \approx 10$ (voir figures 3.1.c et 3.1.d). A cet effet, le régime d'interaction onde / paroi quasi-isotherme se manifeste pratiquement pour un rapport $\delta_v/D \geq 1$.

3.2.1.2 Analyse spectrale des profils de force

La figure (3.2) présente les spectres de Fourier $F^a_{n1,2}$ (composantes spectrales spatiales données par l'équation (3.23)) correspondant aux distributions spatiales des forces adimensionnelles $F^a_{x1,2}$ en fonction du rapport (δ_v / D). Dans ce qui suit, les modes correspondant à des échelles spatiales réduites sont dits modes à "courte période (spatiale)" ou à "grand-n" ($n >> 1$) alors que, les modes correspondant à de grandes échelles spatiales sont dits modes à "longue période (spatiale)" ou à "petit-n" ($n \leq 10$).

En régime quasi-adiabatique, les distributions spatiales $F^a_{x1,2}$ et F^a_{x2} sont en grande partie localisées dans une zone étroite au voisinage des parois de l'acoustitron (figures 3.1.a et 3.1.b). Dans ce cas, une décomposition spectrale de $F^a_{x1,2}$ fait intervenir les composantes correspondant aux modes à courte période. Ceci explique les valeurs élevées des composantes spectrales relatives aux modes à courte période spatiale ($n > 10$ avec un maximum au voisinage de $n = 20$) sur les figures 3.2.a et 3.2.b pour $\delta_v / D = 10^{-2}$.

En régime quasi-isotherme, les distributions spatiales $F^a_{x1,2}$ présentent des profils paraboliques réguliers suivant la section de l'acoustitron (figures 3.1.c et 3.1.d) ; par conséquent, et comme le montrent les figures 3.2.a et 3.2.b, une décomposition spectrale sur la base des modes à longue période spatiale ($n \leq 10$) suffit largement pour un $\delta_v / D = 10$.
Les décompositions spectrales (figure 3.2.1) mettent aussi en évidence l'influence du régime d'interaction onde / paroi sur l'amplitude des forces $F_{x1,2}$ pour une transition du régime quasi-adiabatique au régime quasi-isotherme. Pour une valeur donnée de la viscosité cinématique ν_0 et un diamètre de l'acoustitron D, cette transition correspond à une réduction de la fréquence f des sources excitatrices et conduit à une amplification des amplitudes des spectres de Fourier $F^a_{n1,2}$. Conformément à la relation (3.28), les forces $F^a_{x1,2}$ sont proportionnelles au carré du module de l'amplitude de la pression. Cette amplitude croît avec le rapport (δ_v/D) (voir figure 2.5) entraînant ainsi l'amplification sus désignée de $F^a_{n1,2}$. Néanmoins, cette amplification a lieu dans la gamme des valeurs du rapport (δ_v / D) inférieures à $\delta_v / D \approx 1$. En effet, dans les figures (3.1.c) et (3.1.d), les amplitudes des forces le long de la section transversale tendent vers des valeurs constantes pour $(\delta_v / D \geq 1)$.

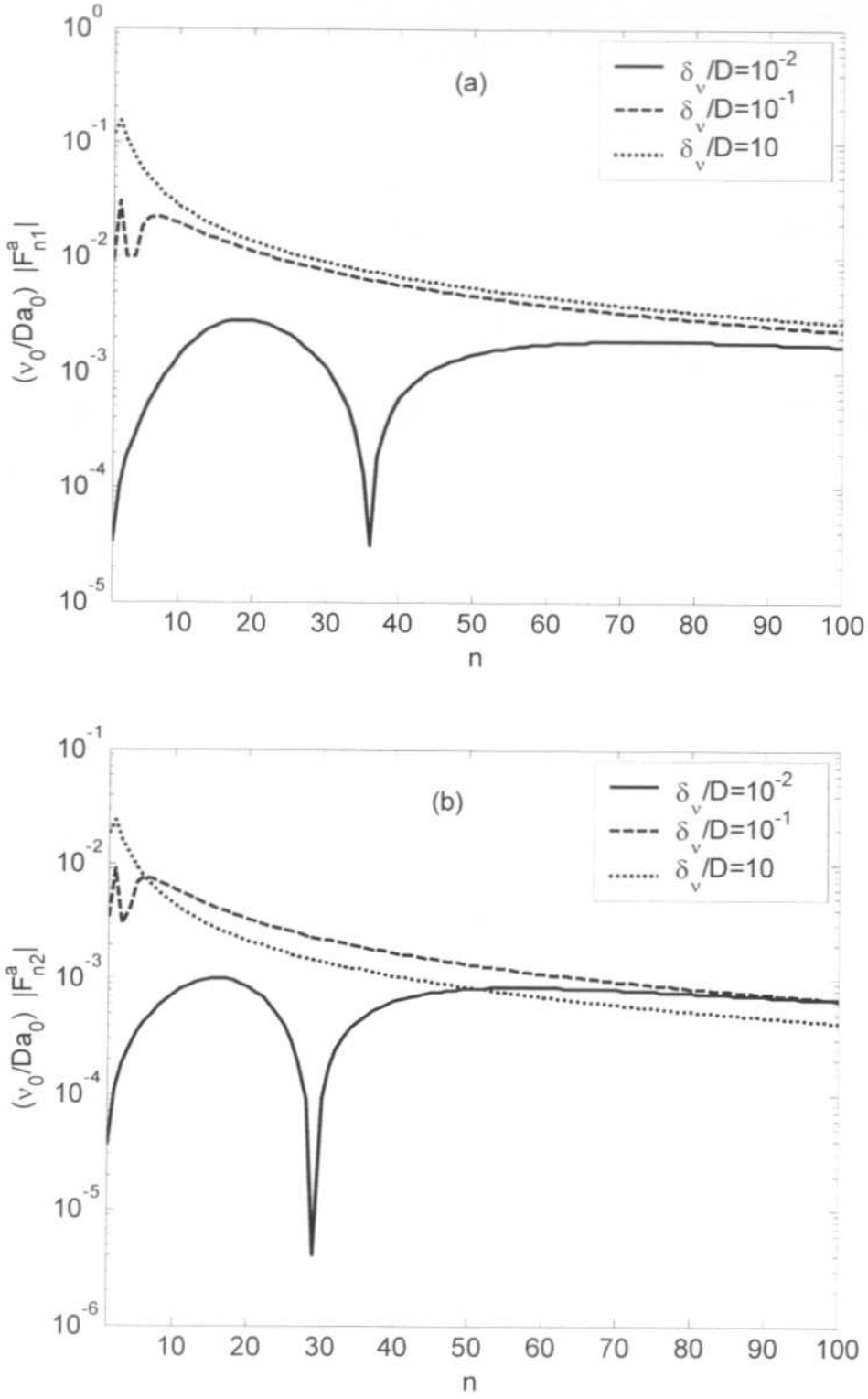


Fig. 3.2. Spectres spatiaux des forces adimensionnelles F^a_{x1} et F^a_{x2} pour différentes valeurs du rapport (δ_ν / D).

Les figures (a) et (b) correspondent respectivement à F^a_{x1} et F^a_{x2} .

Il s'ensuit un coefficient de proportionnalité $C_{Fl,2} = F_{xl,2} / |p_a|^2$ diminuant dans la transition du régime quasi-adiabatique au régime quasi-isotherme. De plus, en régime quasi-isotherme ($\delta_v / D \geq 1$), le coefficient $C_{Fl,2} = F_{xl,2} / |p_a|^2$ se présente sous la forme,

$$C_{Fl,2} = \frac{C'_{Fl,2}(\eta)}{(\delta_v / D)^4} \quad , \tag{3.30}$$

où le coefficient $C'_{Fl,2}$ correspond à un profil indépendant du rapport (δ_v / D), alors que la quantité $(\delta_v / D)^4$ provient de la proportionnalité $p_a \propto (\delta_v / D)^2$ en régime quasi-isotherme (voir équation (2.33) ou figure 2.5).

Les figures 3.2.a et 3.2.b montrent aussi des valeurs nulles pour les fonctions $F^a_{nl,2}$ aux points correspondant approximativement aux "pics" (minimums locaux). Pour une valeur donnée du rapport (δ_v / D), les fonctions $F^a_{nl,2}$ s'annulent pour des valeurs du nombre entier vérifiant la relation approchée,

$$(\delta_v / D)^{-1} \cong \frac{\pi}{2}(2n-1) \quad . \tag{3.31}$$

La relation "empirique" (obtenue numériquement) (3.31) montre l'existence de minima locaux dans les spectres spatiaux des forces uniquement en régime quasi-adiabatique ($(\delta_v / D) << 1$). Formellement, l'apparition de ces minimums est due au caractère oscillatoire des distributions transversales des force (voir figures 3.1.a et 3.1.b). L'intégrale du produit d'une distribution changeant de signe (suivant la coordonnée η) et de la fonction cosinus de période spatiale ($4/(2n-1)$) peut donner des valeurs proche de zéro pour certains modes (valeurs de n).

3.2.1.3 Analyse spectrale des profils de vitesse stationnaire

La figure 3.3 présente les composantes spectrales spatiales $v^a_{nl,2}$ associées aux distributions spatiales des vitesses adimensionnelles stationnaires $v^a_{mxl,2}$ (limite de l'équation (3.26) quand le temps adimensionnel θ tend vers l'infini).

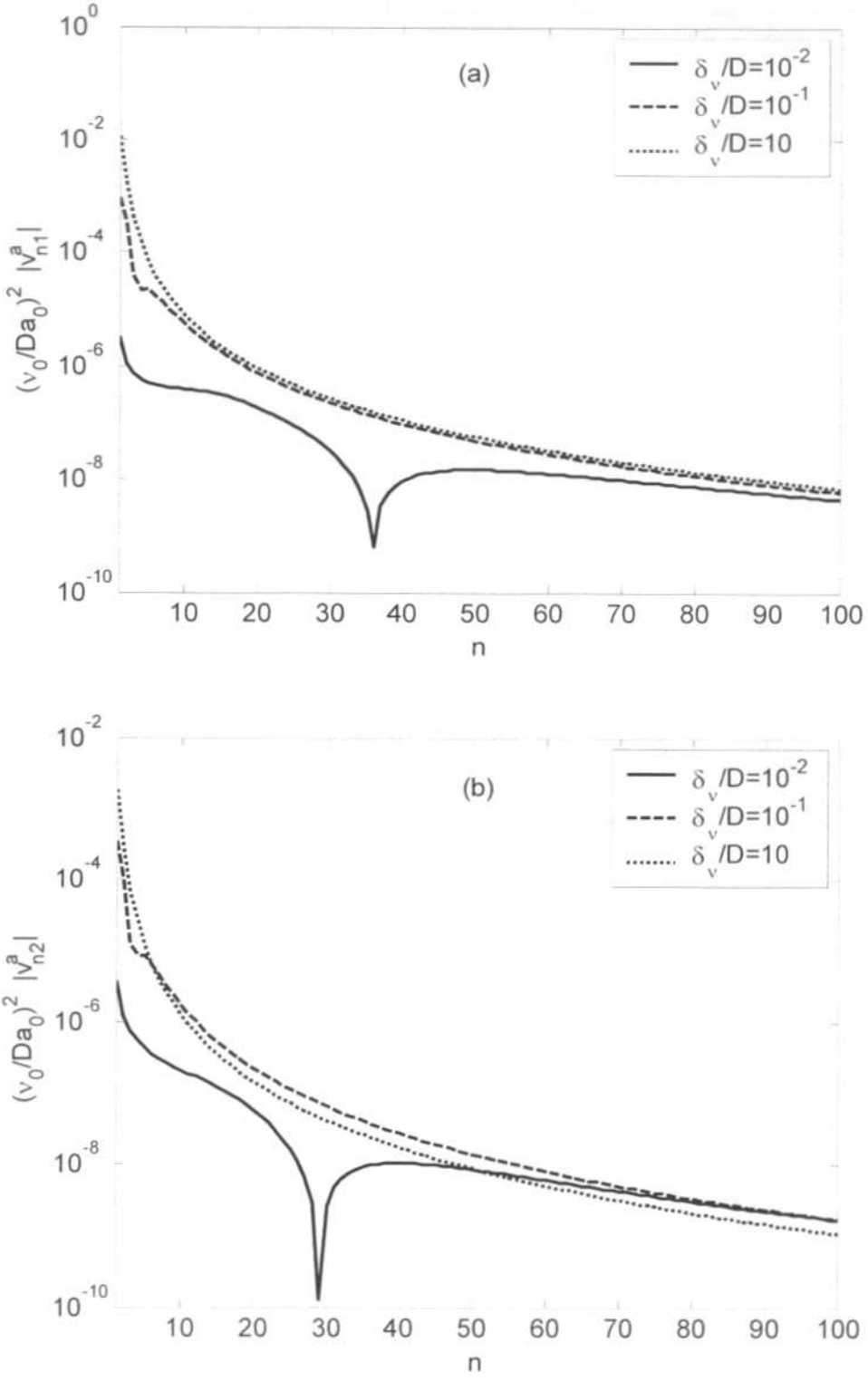


Fig. 3.3. Spectres spatiaux des vitesses adimensionnelles stationnaires v^a_{mx1} et v^a_{mx2} pour différentes valeurs du rapport (δ_ν / D). Les figures (a) et (b) correspondent respectivement à v^a_{mx1} et v^a_{mx2}.

En régime quasi-adiabatique ($\delta_v / D = 10^{-2}$), le nombre de modes à période courte apportant une contribution significative dans le spectre des vitesses stationnaires v^a_{mx1} est réduit considérablement en comparaison avec les forces adimensionnelles $F^a_{x1,2}$. D'après l'équation (3.26), les composantes spectrales $v^a_{n1,2}$ sont proportionnelles aux composantes spectrales $F^a_{n1,2}$ et inversement proportionnelles à $(2n-1)^2$. Le terme $1/(2n-1)^2$, issu de l'opérateur de Laplace $\partial^2/\partial\eta^2$ dans l'équation (3.13), traduit l'influence de la viscosité sur l'écoulement redressé. Cette influence se manifeste par une atténuation des composantes spectrales correspondant aux modes à période courte, ce qui réduit l'effet des composantes à grand-n de la force $F_{x1,2}$ sur l'écoulement.

En régime quasi-isotherme ($\delta_v / D = 10$), la viscosité réduit considérablement les valeurs des composantes spectrales à grand-n des forces $F_{x1,2}$. Ainsi, dans ce cas limite ($(\delta_v / D)^2 >> 1$), la composante spectrale fondamentale ($n = 1$) suffit pour une description approximative des distributions spatiales stationnaires $v^a_{mx1,2}$.

Les amplitudes des spectres spatiaux de Fourier $v^a_{n1,2}$, comme leurs similaires de $F^a_{n1,2}$ (voir figure 3.2), croissent dans une transition du régime quasi-adiabatique au régime quasi-isotherme. La croissance des vitesses de l'écoulement redressé $v^a_{mx1,2}$ avec le rapport (δ_v / D) est due à leur dépendance des forces $F^a_{x1,2}$, qui sont proportionnelles au carré du module de l'amplitude de pression ($|p_a|^2$). Aussi, le coefficient de proportionnalité relative aux vitesses stationnaires $C_{v1,2} = v_{mx1,2} / |p_a|^2$ (pour un temps t tendant vers l'infini), comme le coefficient de proportionnalité relative aux forces $C_{F1,2} = F_{x1,2} / |p_a|^2$ (voir analyse de la figure 3.2), diminue avec le rapport (δ_v / D).

3.2.2 Moyenne spatiale des vitesses d'écoulement

Dans le paragraphe précédant (§ 3.2), l'influence du régime d'interaction onde / paroi sur les distributions spatiales des forces et des vitesses est analysée. Ici, sont considérées les moyennes spatiales (le long de la section transversale de l'acoustitron) des vitesses des

écoulements redressés. L'influence du régime d'interaction onde / paroi sur ces vitesses est étudiée en détails en régime d'écoulement stationnaire et sommairement en régime transitoire. Cette étude donnera un aperçu sur la complexité des phénomènes intervenant dans le processus de stabilisation des écoulements redressés dans un acoustitron.

3.2.2.1 Régime d'écoulement stationnaire

Dans la limite ($\partial/\partial\theta=0$) correspondant au régime stationnaire, l'équation décrivant l'écoulement redressé (3.13) prend une forme similaire à l'équation de Rott (voir équation (1.67)),

$$\frac{\partial^2 v_{mx}^a}{\partial \eta^2} = -\frac{Da_0}{4\nu_0} F_x^a \quad . \tag{3.32}$$

L'absence de la variable temps dans l'équation (3.32) permet une intégration directe (sans recours aux développements en séries de Fourier). Les composantes du champ acoustique v_{1x}, $v_{1\eta}$ et T_1 incluant la pression acoustique (2.23), sont substituées par leur expressions (2.11) à (2.13) dans les composantes (3.7) et (3.8) de la force axiale totale F_x^a. En tenant compte des conditions aux limites $v_{1x}(\eta=-1)=T_1(\eta=-1)=0$, l'équation (3.32) est intégrée deux fois par rapport à la variable muette η' dans l'intervalle allant de -1 à η. La solution obtenue se présente sous la forme compacte,

$$\bar{v}_{mx}^a = \frac{1}{4\rho_0^2 a_0 c_a \nu_0^2} \frac{|p_a|^2}{(\delta_\nu/D)^2} \left[\left(\frac{a_0}{c_a}\right)^2 E_1 - E_2 + \beta \left(\frac{a_0^2}{T_0 c_p}\right) E_3 \right] \quad . \tag{3.33}$$

Les intégrales des moyennes incluant les composantes du champ acoustique ou leurs dérivées spatiales, conduisant à la solution (3.33) sont présentées dans l'*annexe B* de la référence [25]. Les termes E_1 et E_2 correspondent aux contributions de la force F_{x1} dans l'excitation de l'écoulement redressé,

$$E_1 = -Im(f_\nu) + 5(1-Re(f_\nu)) \left(\frac{\delta_\nu}{D}\right)^2 \quad , \tag{3.34}$$

$$E_2 = -Im(f_\nu) - \left(\frac{\gamma-1}{\sigma-1}\right) Im(f_\nu f_k^*) + 4\left(1+\frac{\gamma-1}{(\sigma+1)^2}\right)(1-Re(f_\nu)) \left(\frac{\delta_\nu}{D}\right)^2 - 2\left(\frac{(\gamma-1)(3\sigma+1)}{\sigma(\sigma+1)^2}\right)(1-Re(f_k)) \left(\frac{\delta_\nu}{D}\right)^2 \quad . \tag{3.35}$$

Le terme E_3 correspondant aux contributions de la force F_{x2} est donné par l'expression,

$$E_3 = \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)\mathrm{Im}(f_v f_k^*) - 2\left(\frac{\sigma(\sigma+3)}{(\sigma+1)^2}\right)(1-\mathrm{Re}(f_v))\left(\frac{\delta_v}{D}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma}{(\sigma+1)^2}\right)(1-\mathrm{Re}(f_k))\left(\frac{\delta_v}{D}\right)^2 \quad , \tag{3.36}$$

alors que, le coefficient l'affectant dans l'équation (3.33) s'écrit sous la forme $\beta(\gamma-1)$, compte tenu de la relation thermodynamique des gaz parfaits $a_0^2/(T_0 c_p) = \gamma - 1$ [44].

La direction de la vitesse moyenne de l'écoulement redressé $\bar{v}^a_{mx}$ dépend de l'importance relative des contributions partielles des forces F_{x1} et F_{x2} dans l'expression (3.33). La force F_{x1} excite un écoulement moyen ($\bar{v}^a_{mx1}$) de sens positif, alors que la force F_{x2} excite un écoulement moyen ($\bar{v}^a_{mx2}$) de sens négatif.

Provenant de la dépendance de la viscosité dynamique avec la température du fluide, l'écoulement redressé caractérisé par la vitesse $\bar{v}^a_{mx2}$ (tout comme la force F^a_{x2}), est contrôlé par le paramètre β reliant ces deux quantités (équation (3.3)). Ce paramètre β figure dans l'expression de la force F_{x2} (3.8) ainsi que dans le coefficient associé à la contribution de celle-ci dans l'expression (3.33). Dans le cas d'une onde adiabatique purement progressive, les fluctuations de la pression et de la vitesse sont en phase [45,50]. Contrairement aux liquides, l'élévation de la température d'un gaz au cours d'une compression adiabatique induit une augmentation de sa viscosité [44,46]. Pour une onde progressive, le mouvement d'une particule fluide dans la direction de propagation de l'onde s'accompagne d'une compression alors qu'une dépression accompagne son mouvement dans la direction opposée. La viscosité du fluide et par suite, la contrainte visqueuse naissant de la condition d'adhérence du fluide aux parois, est plus élevée dans le parcours de la particule fluide dans la direction de propagation de l'onde par rapport à son parcours dans la direction opposée. Au cours d'une période acoustique, la quantité de masse transportée dans la direction de propagation de l'onde est moins importante que celle transportée dans la direction opposée. Il s'ensuit un écoulement de fluide à vitesse négative.

Le développement asymptotique des fonctions $f_{v,k}$ dans le cas limite d'un rapport (δ_v / D) tendant vers l'infini, permet d'approcher les termes entre crochets dans (3.33) par l'expression,

$$\left[(a_0/c_a)^2 E_1 - E_2 + \beta(\gamma-1)E_3\right] \cong \frac{\gamma}{30}\left[1-\beta\frac{\sigma(\gamma-1)}{\gamma}\right]\left(\frac{\delta_v}{D}\right)^2 \quad . \tag{3.37}$$

Le nombre de Prandtl $\sigma<1$ pour de l'air alors que le rapport des capacités calorifiques massiques $\gamma>1$ indépendamment du gaz considéré. Il s'ensuit qu'en régime d'interaction onde / paroi quasi-isotherme, la contribution de F_{x1} dans l'excitation de l'écoulement redressé total est dominante, ce qui correspond à une vitesse moyenne totale $\bar{v}^a_{mx}$ positive ($\bar{v}^a_{mx}(\theta=\infty,(\delta_v/D)^2 >> 1) > 0$). Par ailleurs, le développement asymptotique des fonctions $f_{v,k}$ dans le cas limite d'un rapport (δ_v / D) tendant vers zéro, permet d'écrire,

$$\left[(a_0/c_a)^2 E_1 - E_2 + \beta(\gamma-1)E_3\right] \cong \frac{\gamma-1}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{2}{\sqrt{\sigma}(\sigma+1)}-1\right)\left[1-\beta\frac{2\sigma^2}{2-\sqrt{\sigma}(\sigma+1)}\right]\left(\frac{\delta_v}{D}\right)^2 \quad . \tag{3.38}$$

Pour de l'air, l'évaluation de l'expression entre crochets dans (3.33) donne une valeur négative. Il s'ensuit qu'en régime quasi-adiabatique aigu ($(\delta_v / D) \to 0$), la contribution de la force F_{x2} dans l'excitation de l'écoulement redressé total est dominante, ce qui correspond à une vitesse moyenne totale $\bar{v}^a_{mx}$ négative ($\bar{v}^a_{mx}(\theta=\infty,(\delta_v/D)\to 0) < 0$).

Les développements asymptotiques ci-dessus mettent en évidence un changement de direction pour l'écoulement redressé moyen total dans une transition de l'interaction onde / paroi d'un régime quasi-isotherme ($(\delta_v/D)^2 >> 1$) à un régime quasi-adiabatique aigu ($(\delta_v / D) \to 0$). Il est important de noter qu'en régime quasi-adiabatique aigu, en dépit de ses faibles amplitudes (le long de la section transversale) en comparaison de celles de la composante de force F_{x1} (voir analyse de la figure 3.1), la force F_{x2} apporte, en moyenne sur la section transversale, une contribution comparable et même supérieure à la contribution de F_{x1}.

Le changement de signe de $\bar{v}^a_{mx}$ avec le rapport (δ_v/D) est confirmé par la représentation graphique (figure 3.4) de la solution stationnaire (3.27) issue des développements en séries de Fourier. La figure (3.4) présente les vitesses moyennes spatiales stationnaires $\bar{v}^a_{mx1}$, $\bar{v}^a_{mx2}$ et $\bar{v}^a_{mx}$ (équation (3.27) pour un temps adimensionnel θ tendant vers l'infini) pour des valeurs du rapport (δ_v / D) allant d'un régime quasi-adiabatique aigu au régime quasi-isotherme. Les amplitudes de vitesses en régime quasi-isotherme sont importantes en regard de celles du régime quasi-adiabatique. La tendance vers une valeur

constante en régime quasi-isotherme suggère des moyennes spatiales des coefficients de proportionnalité $C_{v1,2} = v_{mx1,2} / |p_a|^2$ proportionnelles à $(\delta_v / D)^{-4}$ du fait que $|p_a|^2 \propto (\delta_v / D)^4$ pour $(\delta_v / D)^2 >> 1$ (voir figure 2.5). La figure (3.4) ainsi que l'expression de la vitesse de l'écoulement redressé stationnaire (3.33), présentent un changement de signe de la direction de l'écoulement redressé total en régime quasi-adiabatique, au voisinage d'un régime dit critique correspondant à $(\delta_v/D) \approx 1.3\ 10^{-2} = (\delta_v/D)_{cr}$.

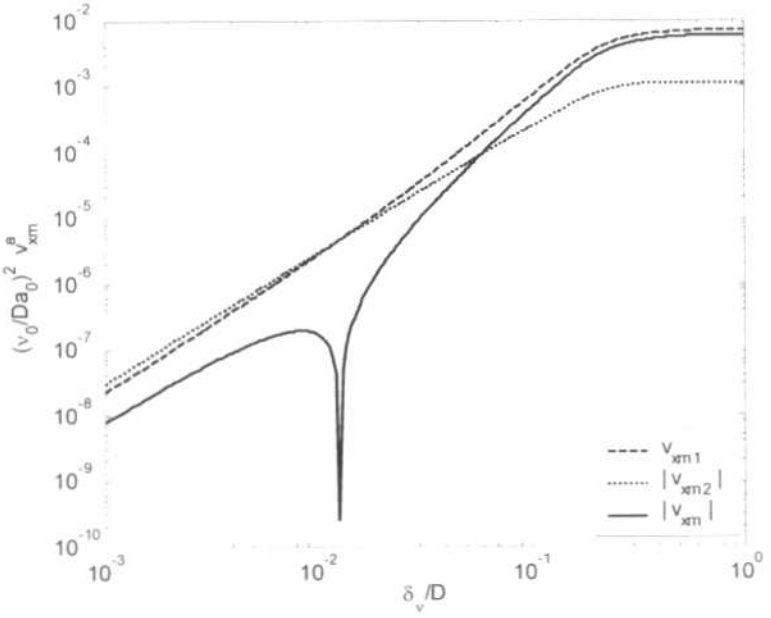


Fig. 3.4. Evolution des vitesses moyennes adimensionnelles stationnaires $\bar{v}^a_{mx1}$, $\bar{v}^a_{mx2}$ et $\bar{v}^a_{mx}$ en fonction du rapport (δ_v / D).

3.2.2.2 Régime d'écoulement transitoire

L'étude de la dépendance de l'écoulement stationnaire moyen du régime d'interaction onde / paroi (§ 3.3.1) a mis en évidence, en plus des régimes asymptotiques quasi-adiabatique et quasi-isotherme, un régime intermédiaire dit critique pour lequel l'écoulement s'annihile. De plus, une exploration du comportement de la vitesse moyenne $\bar{v}^a_{mx}$ en régime transitoire (équation (3.27)) pour différentes valeurs du rapport (δ_v / D) (voir courbe correspondant à $(\delta_v / D) = 10^{-2}$ dans la figure 3.5.b), montre une évolution temporelle non monotone pour les

régimes quasi-adiabatiques aigus caractérisés par $(\delta_v / D) < (\delta_v / D)_{cr}$. Par contre, dans la transition d'un régime quasi-adiabatique aigu tel que $(\delta_v / D) > (\delta_v / D)_{cr}$, tout en passant par un régime quasi-adiabatique modéré vers un régime quasi-isotherme (voir les courbes correspondant respectivement à $(\delta_v / D) = 2 \cdot 10^{-2}, 10^{-1}$ et 3 dans la figure 3.5), l'évolution temporelle de $\bar{v}^a_{mx}$ est monotone.

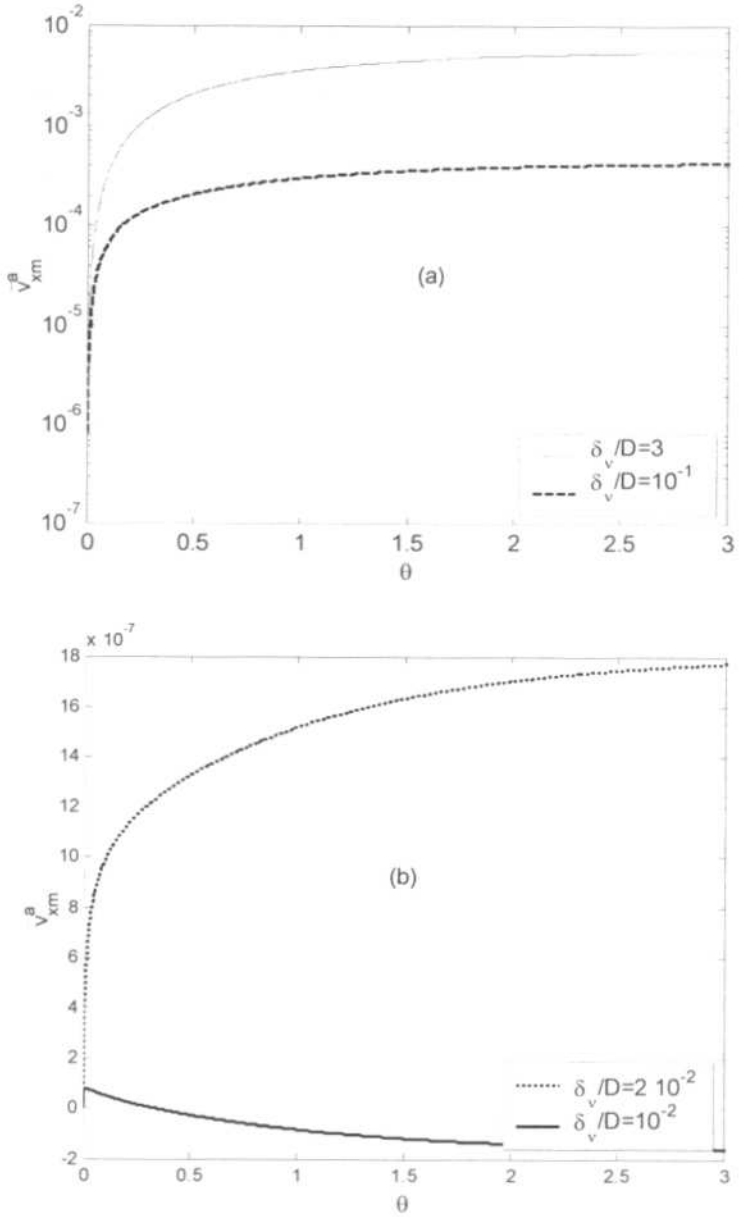


Fig. 3.5. Evolution temporelle des vitesses adimensionnelles $\bar{v}^a_{mx}$. Evolution monotone en régimes quasi-isotherme ($(\delta_v / D) = 3$) et quasi-adiabatique ($(\delta_v / D) = 0.1$ et $(\delta_v / D) = 2 \cdot 10^{-2}$).
Evolution non monotone en régime quasi-adiabatique aigu ($(\delta_v / D) = 10^{-2}$).

Le régime critique ($(\delta_v / D)_{cr}$) constitue une singularité dans la dépendance entre la vitesse *stationnaire* $\bar{v}^a_{mx}$ et le régime d'interaction onde / paroi ($\bar{v}^a_{mx} = 0$ pour $(\delta_v / D) \approx (\delta_v / D)_{cr}$). Cette singularité affecte l'évolution temporelle de $\bar{v}^a_{mx}$ conduisant ainsi à des processus de stabilisation non monotones pour l'écoulement total v^a_{mx}. Le comportement non monotone de $\bar{v}^a_{mx}$ est lié à la compétition des contributions des forces F_{x1} et F_{x2} autour du point critique (avec une importance prononcée au voisinage immédiat de ce point). En conséquence, au prochain paragraphe (§ 3.4), l'analyse des processus de stabilisation de l'écoulement redressé est faite en observant deux domaines distincts pour le régime d'interaction onde / paroi. Le domaine des régimes d'écoulement moyen *monotones* inclut les régimes quasi-adiabatiques modérés ($(\delta_v / D) << 1$ et $(\delta_v / D) > (\delta_v / D)_{cr}$) ainsi que les régimes quasi-isothermes ($(\delta_v / D) >> 1$). Le domaine des régimes d'écoulement moyen *non monotones* inclut les régimes quasi-adiabatique aigus ($(\delta_v / D) < (\delta_v / D)_{cr}$) ainsi que les régime quasi-adiabatique proche du régime critique ($(\delta_v / D) \approx (\delta_v / D)_{cr}$).

3.2.3 Investigation des processus de stabilisation de l'écoulement redressé

3.2.3.1 Régimes d'écoulement moyen monotones

La solution analytique instationnaire de la vitesse adimensionnelle de l'écoulement redressé v^a_{xm} (3.26) est représentée graphiquement (figures 3.6 et 3.7) pour des régimes d'interaction (onde / paroi) quasi-adiabatique modéré ($\delta_v / D = 10^{-1}$) et quasi-isotherme ($\delta_v / D = 3$). La figure (3.6) présente l'évolution au cours du temps adimensionnel θ de la vitesse v^a_{xm} en différents points de la section de l'acoustitron. La figure (3.7) présente l'évolution temporelle des profils de vitesse v^a_{xm} le long de la section transversale de l'acoustitron. La vitesse adimensionnelle v^a_{max} est introduite dans ces représentations graphiques (voir figures (3.6) et (3.7)), afin de normaliser la vitesse adimensionnelle v^a_{xm} à l'unité pour le régime d'interaction considéré. La vitesse v^a_{max} est définie comme étant le

maximum de la valeur absolue du profil stationnaire adimensionnel v^a_{xm} le long de la section transversale.

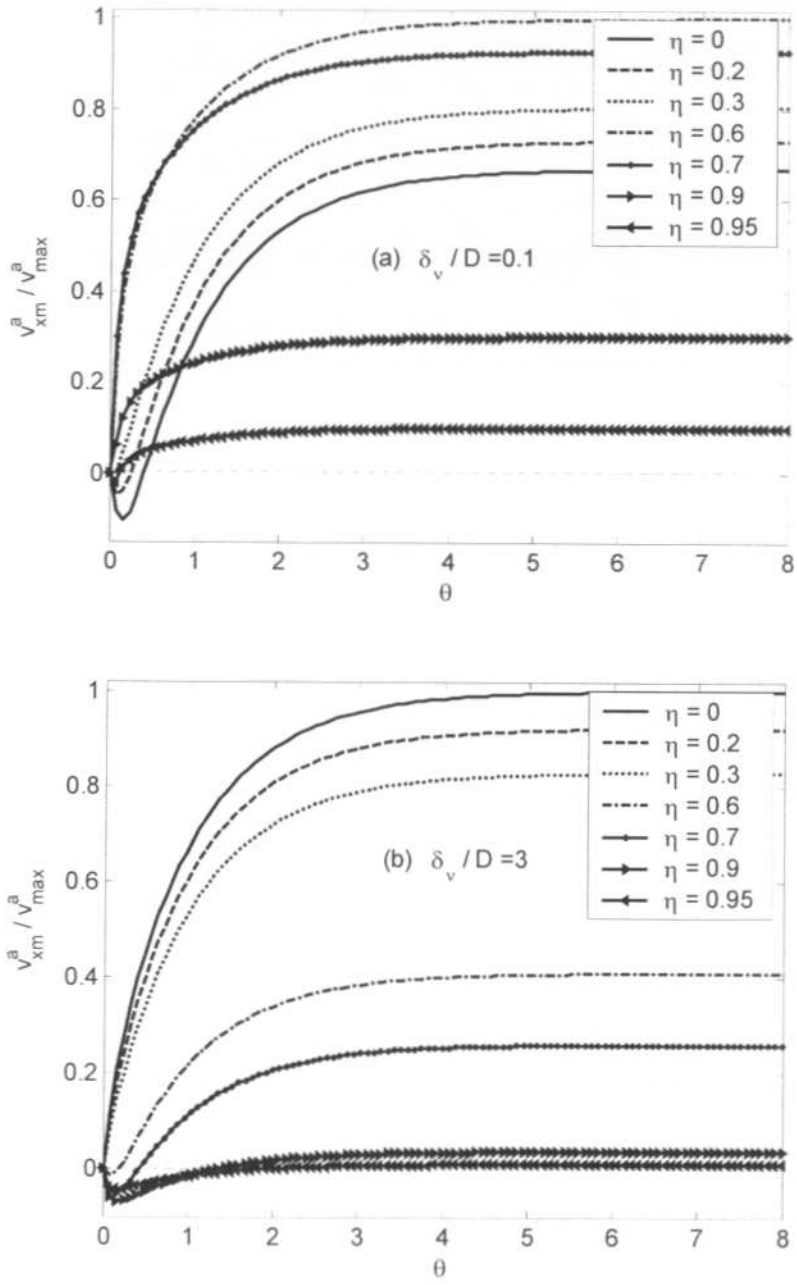


Fig. 3.6. Evolution de la vitesse moyenne adimensionnelle v^a_{mx} en fonction du temps adimensionnel θ en différents points η de la section transversale de l'acoustitron. Deux cas limites sont considérés : (a) le régime quasi-adiabatique ($\delta_v / D = 0.1$), (b) le régime quasi-isotherme ($\delta_v / D = 3$). La vitesse adimensionnelle v^a_{max} est le maximum de la valeur absolue des vitesses adimensionnelles stationnaires v^a_{mx} le long de la section transversale du guide d'onde.

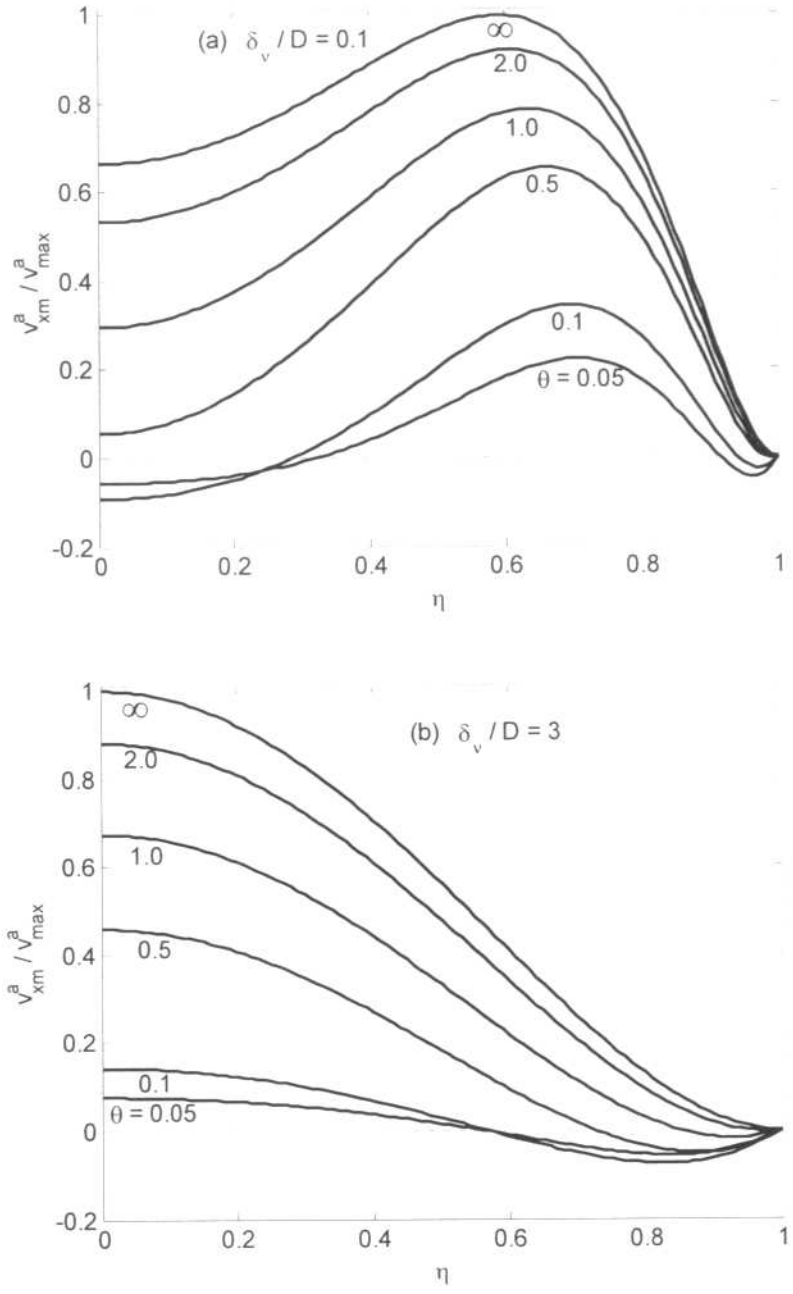


Fig. 3.7. Profils de la vitesse adimensionnelle v^a_{mx} en différentes valeurs du temps adimensionnel θ. Deux cas limites sont considérés : (a) le régime quasi-adiabatique ($\delta_v / D = 0.1$), (b) le régime quasi-isotherme ($\delta_v / D = 3$). La vitesse adimensionnelle v^a_{max} est le maximum de la valeur absolue des vitesses adimensionnelles stationnaires v^a_{mx} le long de la section transversale du guide d'onde.

En régime quasi-adiabatique (figures 3.6.a et 3.7.a), pour un point η de la section transversale situé dans la région $0.3 < |\eta| < 0.9$, la vitesse adimensionnelle v^a_{xm} croît de façon monotone pour atteindre un point de saturation. Par ailleurs, en considérant un point situé au

voisinage de l'axe ($|\eta| \leq 0.3$) ou des parois ($|\eta| \geq 0.9$), v_{xm}^{a} décroît vers des valeurs négatives, puis croît pour atteindre un point de saturation positif. Un tel comportement s'explique par une accélération du fluide relativement faible aux voisinages des parois et de l'axe. Au voisinage des parois, la faible accélération du fluide est due à des contraintes visqueuses relativement importantes associées aux importants gradients de vitesse imposés par la condition aux limites (résistance des parois au mouvement du fluide). Au voisinage de l'axe, la faible accélération est due à des forces excitatrices relativement faibles (voir figure 3.1.b). Le fluide est effectivement accéléré dans une région intermédiaire entre les parois et l'axe où l'influence des parois est suffisamment faible alors que l'amplitude de la force excitatrice est suffisamment importante. La quantité de mouvement communiquée au fluide dans cette région, la plus favorable, est transportée dans un processus de diffusion (par viscosité) simultanément dans les directions des parois et de l'axe. En conséquence, la diffusion continue de la quantité de mouvement de la région optimale ($0.3 < |\eta| < 0.9$) vers les régions contiguës ($|\eta| \leq 0.3$ et $|\eta| \geq 0.9$) induit un accroissement des amplitudes de vitesse conduisant à un changement de direction de la vitesse suivi en final d'une saturation des amplitudes de vitesse.

En régime quasi-isotherme (figures 3.6.b et 3.7.b), dans la région centrale du conduit ($|\eta| < 0.6$), la vitesse adimensionnelle v_{xm}^{a} croît de façon monotone pour atteindre un point de saturation. Par ailleurs, dans les régions contiguës aux parois ($|\eta| \geq 0.6$), v_{xm}^{a} décroît en prenant des valeurs négatives, puis croît pour atteindre un point saturation positif. Initialement, le profil de vitesse coïncide avec celui de la force excitatrice F_{x}^{a} (voir figure 3.1.d) sauf aux parois où la vitesse est nulle suite à la condition d'adhérence. Du fait que l'accélération des particules fluides est compromise par la résistance des parois, il s'ensuit de faibles vitesses négatives dans la région $|\eta| \geq 0.6$ au début du développement de l'écoulement redressé. Suite à la diffusion de quantité de mouvement de la région correspondant à l'accélération effective du fluide (au voisinage de l'axe) vers les parois, le processus de stabilisation de l'écoulement redressé conduit à un profil stationnaire où les vitesses des particules fluides sont de même direction en tous points de la section transversale.

Le développement de l'écoulement redressé dans les régimes d'interaction (onde / paroi) réguliers ($(\delta_v / D) > (\delta_v / D)_{cr}$) est caractérisé par une accélération effective du fluide dans une région située suffisamment loin des parois (entre les parois et l'axe en régime quasi-adiabatique modéré et sur l'axe en régime quasi-isotherme). La quantité de mouvement

introduite dans la section transversale du guide d'onde est redistribuée par effet de diffusion visqueuse par rapport à cette région optimale. Dans le processus de stabilisation de l'écoulement redressé, les profils de vitesse bidirectionnels (voir les profils correspondant à $\theta = 0.05$ dans la figure 3.7) conduisent en régime stationnaire à des profils unidirectionnels (voir les profils correspondant à $\theta = \infty$ dans la figure 3.7). Bien qu'en certains points de la section transversale du guide d'onde, la variation dans le temps de la vitesse d'écoulement v^a_{xm} est non monotone (voir les courbes correspondant à $\eta = 0.95$ dans la figure 3.6), l'évolution temporelle de la moyenne de la vitesse par rapport à la section transversale (équation (3.27)) est monotone (voir les courbes correspondant à $(\delta_v / D) = 3,\ 10^{-1}$ et $2 \cdot 10^{-2}$ dans la figure 3.5).

3.2.3.2 Régimes d'écoulement moyen non monotones

La figure (3.8) présente séparément les évolutions temporelles des profils de vitesse d'écoulement redressé v^a_{mx1} (figure 3.8.a) et v^a_{mx2} (figure 3.8.b) pour un régime d'interaction (onde / paroi) irrégulier ($(\delta_v / D) = 10^{-2}$). Ces écoulements partiels correspondent aux contributions respectives des composantes de force F_{x1} et F_{x2} dans l'écoulement redressé total ($v^a_{mx} = v^a_{mx1} + v^a_{mx2}$). Considérés séparément, les écoulements partiels présentent un processus de stabilisation notamment simple. Ce processus est caractérisé par une accélération effective du fluide au voisinage immédiat du point $|\eta| \approx 0.95$ (ce point, assez proche de la paroi, est suffisamment loin de la couche limite occupant la région $0.98 \leq |\eta| \leq 1$ pour $(\delta_v / D) = 10^{-2}$). La diffusion de quantité de mouvement à partir de cette région optimale réduite a lieu dans la direction de l'axe. En se référant à la figure (3.8), le développement des profils des écoulements partiels est monotone dans les régions $|\eta| < 0.83$ et $0.93 \leq |\eta| < 0.99$ et non monotone dans les régions $0.83 \leq |\eta| < 0.93$ et $|\eta| \geq 0.99$. Les profils stationnaires sont toutefois unidirectionnels le long de toute la section transversale.

Par ailleurs, le processus de stabilisation de l'écoulement total ($v^a_{mx} = v^a_{mx1} + v^a_{mx2}$), présenté dans la figure (3.9), revêt des aspects notamment compliqués. L'écoulement redressé bidirectionnel à faibles échelles de temps $\theta \leq 0.003$ est caractérisé d'une part, par une

accélération du fluide positive et dominante aux bords des couches limites ($|\eta| \approx 0.95 \div 0.96$) et d'autre part, par une accélération négative faible au voisinage immédiat du point $|\eta| \approx 0.92 \div 0.93$. La diffusion de la quantité de mouvement à partir de cette région optimale réduite ($|\eta| \approx 0.92 \div 0.93$) en direction de l'axe contrôle le développement de l'écoulement à des échelles de temps larges $\theta \geq 0.05$ et conduit à un écoulement stationnaire négatif en moyenne sur la section transversale.

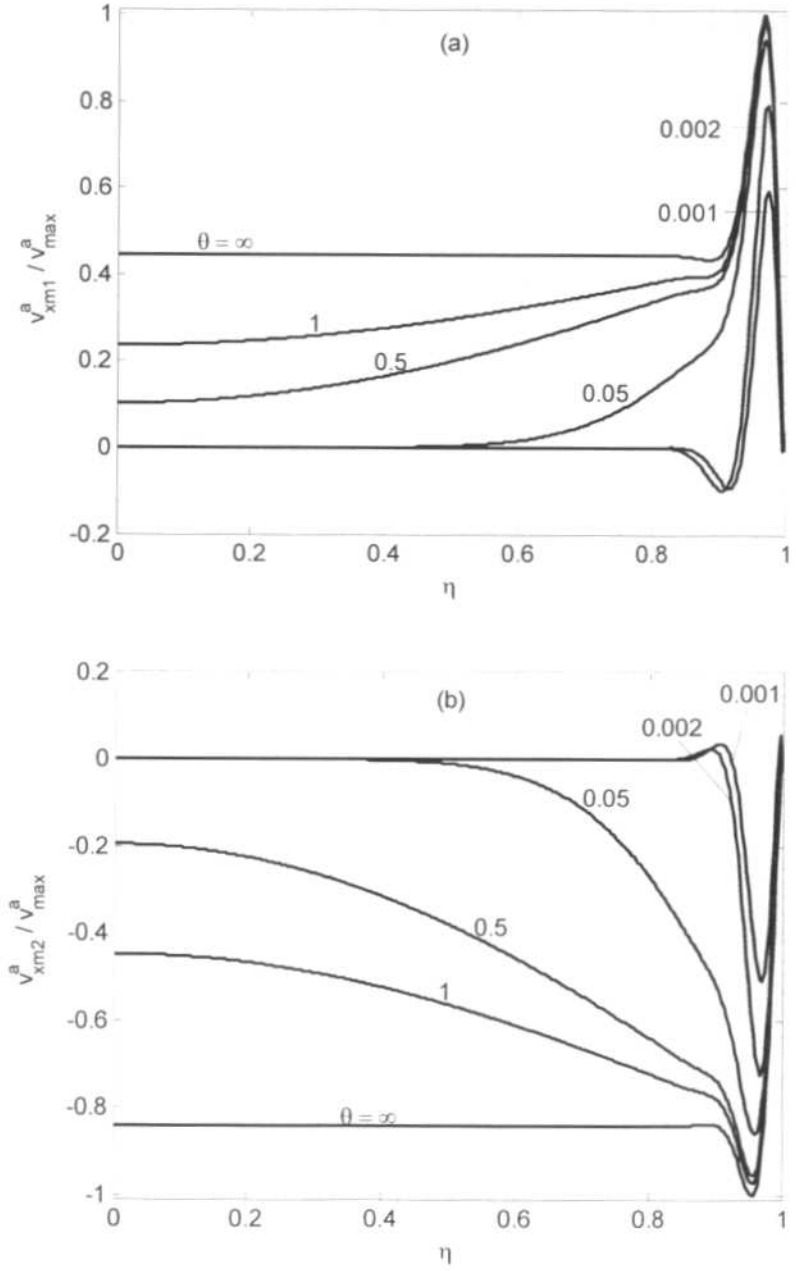


Fig. 3.8. Profils des vitesses adimensionnelles $v^a_{mx1,2}$ normalisés à l'unité, en différents temps adimensionnels θ, en un régime quasi-adiabatique et non monotone ($\delta_v / D = 10^{-2}$).

Le processus de stabilisation de l'écoulement total est non monotone, aussi bien en certains points de la section transversale du conduit (voir la région $|\eta| \approx 0.9$ dans la figure 3.9) qu'en moyenne sur la section (voir la courbe correspondant à $(\delta_\nu / D) = 10^{-2}$ dans la figure 3.5). Il est toutefois important de souligner le fait qu'en ce régime irrégulier ($(\delta_\nu / D) < (\delta_\nu / D)_{cr}$), l'écoulement moyen change de direction au cours de son évolution non monotone (voir la courbe correspondant à $(\delta_\nu / D) = 10^{-2}$ dans la figure 3.5). De surcroît, le profil de l'écoulement stationnaire (voir la courbe correspondant à $\theta = \infty$ dans la figure 3.9) est bidirectionnel.

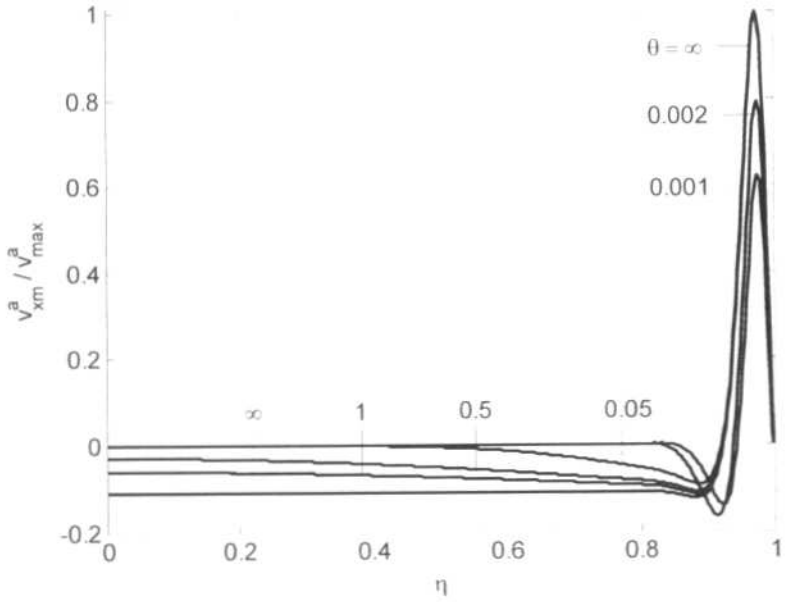


Fig. 3.9. Profils des vitesses adimensionnelles v^a_{mx} normalisés à l'unité, en différents temps adimensionnels θ, en un régime quasi-adiabatique et non monotone ($\delta_\nu / D = 10^{-2}$).

Les régimes d'interaction (onde / paroi) irréguliers sont caractérisés par un écoulement total à profil de vitesse stationnaire bidirectionnel et à évolution temporelle non monotone de la vitesse moyenne. Ces comportements de l'écoulement redressé total sont dus à la grande compétition entre les contributions excitatrices correspondant aux forces F_{x1} et F_{x2}. Cette compétition est plus prononcée aux abords du régime critique.

La figure (3.10) présente l'évolution temporelle de la vitesse moyenne $\overline{v}^a_{mx}$ dans une transition des régimes d'écoulement moyen monotones ($(\delta_\nu / D) > (\delta_\nu / D)_{cr}$) vers les

régimes d'écoulement moyen non monotones ($(\delta_\nu / D) < (\delta_\nu / D)_{cr}$). Pour ce fait, l'intervalle $10^{-2} \le (\delta_\nu / D) \le 1.7 \cdot 10^{-2}$ est considéré. La figure (3.10) montre que la transition de l'excitation d'un écoulement stationnaire de direction positive (pour $(\delta_\nu / D) > (\delta_\nu / D)_{cr}$) à l'excitation d'un écoulement stationnaire de direction négative (pour $(\delta_\nu / D) < (\delta_\nu / D)_{cr}$) passe inévitablement par l'excitation d'un écoulement pulsé au voisinage immédiat du régime critique $(\delta_\nu/D) \approx (\delta_\nu/D)_{cr} = 1.27 \cdot 10^{-2} \cong 1.3 \cdot 10^{-2}$ (figure 3.10). Le régime d'excitation d'un écoulement pulsé est du à une compensation mutuelle des écoulements moyens partiels correspondant aux forces F_{x1} et F_{x2}.

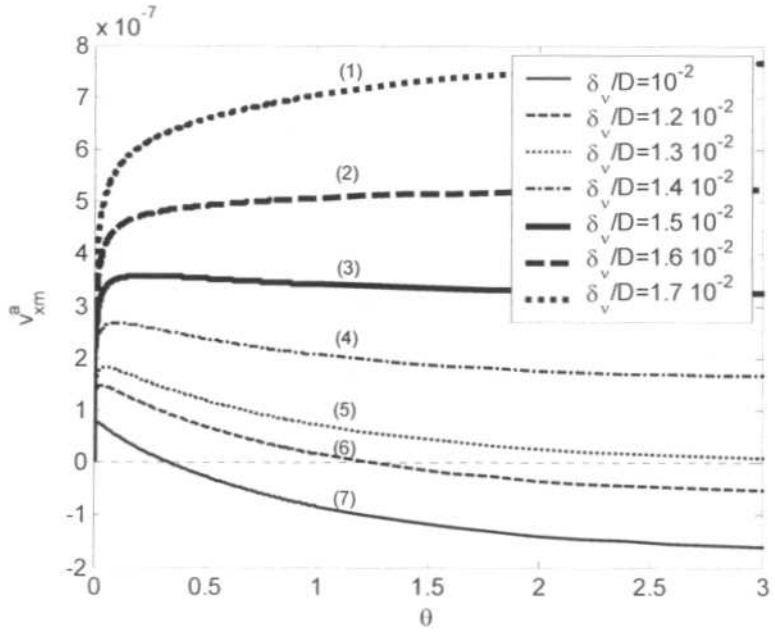


Fig. 3.10. Evolution temporelle de la vitesse moyenne adimensionnelles $\overline{v}^a_{mx}$ dans une transition d'un régime monotone à un régime non monotone au voisinage de la valeur critique $(\delta_\nu / D)_{cr} \approx 1.3 \cdot 10^{-2}$.

3.2.4 Temps caractéristique de l'établissement de l'écoulement redressé

Le temps caractéristique de stabilisation de l'écoulement redressé est évalué à partir des courbes relatives à l'évolution temporelle de leurs vitesses moyennes (courbes des figures 3.5 et 3.10 par exemple), d'où la nécessité de définir une valeur de vitesse spécifique à laquelle correspond le temps caractéristique. La simplicité de cette définition pour les écoulements partiels est liée à la monotonie de leurs développements (§ 3.5.1). L'écoulement redressé total

suscite néanmoins l'adoption d'une définition du temps caractéristique adaptée à son développement non monotone (§ 3.5.2).

3.2.4.1 Ecoulements redressés partiels

Pour les écoulements redressés partiels, Le temps caractéristique adimensionnel θ_c est défini comme étant le temps pour lequel la vitesse moyenne $\overline{v}^a_{mx1,2}$ atteint $(1-e^{-1})$ de sa valeur stationnaire $\overline{v}^a_{xm1,2}(\theta=\infty)$ (figure 3.11). Les résultats de l'évolution de $\theta_{c1,2}$ en fonction du régime d'interaction (δ_v / D) sont présentés dans la figure (3.12) respectivement par des tirets (1) et des points (2). Il est à noter que d'une part, l'écart en temps caractéristique entre les deux écoulements partiels est faible ($|\theta_{c2}-\theta_{c1}|/\theta_{c1} << 1$). D'autre part, les temps caractéristiques $\theta_{c1,2}$ sont de l'ordre de l'unité ($\theta_{c1,2} \approx 1$). Ce qui pour $\theta_{c1,2}$ équivaut à une dépendance relativement faible du régime d'interaction onde / paroi ainsi qu'à la possibilité de faire l'estimation $\theta_{c1,2} \approx 1$ ($t_{c1,2} \approx \tau_c = D^2/\pi^2\nu_0$ en variables dimensionnées).

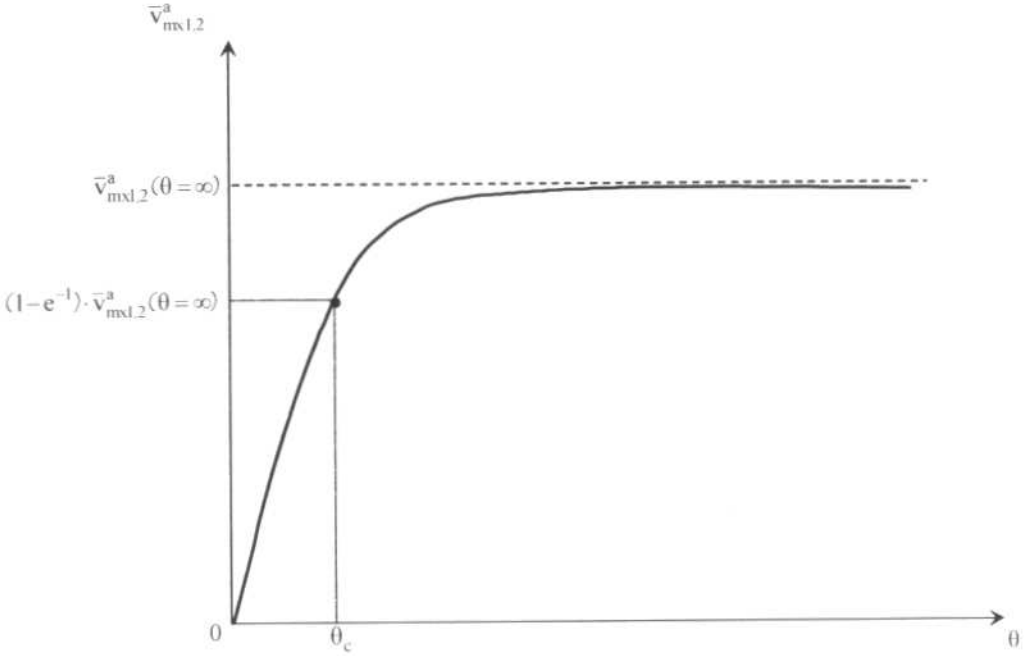


Fig. 3.11. Définition du temps caractéristique pour une stabilisation *monotone* de l'écoulement redressé.

Dans une transition du régime quasi-adiabatique au régime quasi-isotherme, les temps caractéristiques adimensionnels $\theta_{c1,2}$ croissent pour atteindre une valeur de saturation. Ce comportement des écoulements redressés instationnaire constitue un paradoxe puisque les forces confinées au voisinage des parois du guide d'onde (figure 3.1.a) donnent une stabilisation de l'écoulement redressé plus rapide que celle donnée par une force à distribution spatiale plus homogène le long de la section transversale (figure 3.1.d).

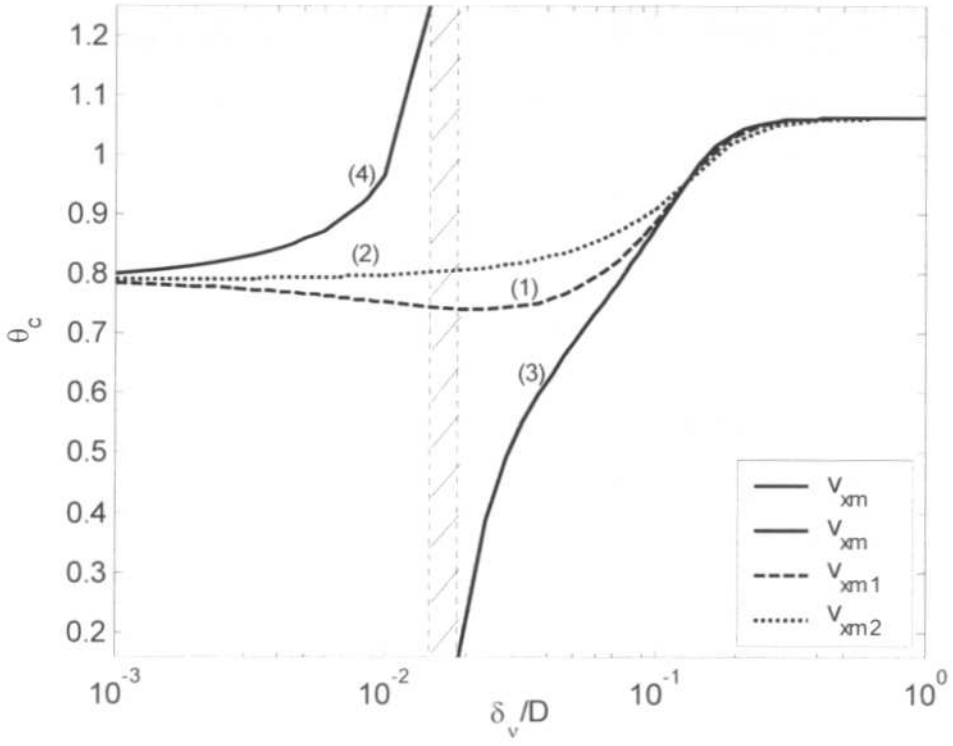


Fig. 3.12. Evolution du temps caractéristique adimensionnel de la stabilisation de l'écoulement redressé θ_c en fonction du rapport (δ_v / D): pour l'écoulement partiel monotone excités par F_{x1} (1), pour l'écoulement partiel monotone excités par F_{x2} (2), pour l'écoulement total monotone (3), pour l'écoulement total non monotone (4).

D'un point de vue physique, cette évolution est due au fait que l'augmentation du rapport (δ_v / D) supprime un nombre relativement important de composantes spectrales à courte période spatiale (grand- n) correspondant aux distributions spatiales des vitesses des écoulement partiels. Ce qui équivaut à un renforcement des composantes spectrales à longue période spatiale (petit- n). D'après l'expression (3.27), les composantes spectrales à longue période correspondent à des régimes d'établissement relativement lents.

L'évolution des temps caractéristiques adimensionnels $\theta_{c1,2}$ avec le rapport (δ_ν / D) est aussi expliquée (explication équivalente à la précédente) comme étant due à une diminution de la vitesse de propagation de l'onde de diffusion visqueuse avec la croissance de la période du mode spatial (c'est-à-dire en diminuant n). Autrement dit, le processus de diffusion de la quantité de mouvement dans la direction transversale est plus lent pour de faibles gradients. En fixant le diamètre D et la viscosité cinématique ν_0, le régime quasi-adiabatique, obtenu pour des fréquences importantes, est caractérisé par un nombre important de composantes spectrales à courte période spatiale (petit-n), ce qui correspond à de grandes vitesses de propagation pour les ondes de diffusion visqueuse donnant lieu à un temps d'établissement court pour l'écoulement redressé. Par ailleurs, le régime quasi-isotherme, obtenu pour des fréquences faibles, est caractérisé par le rôle important des modes à longue période (petit-n), ce qui correspond à de faibles vitesses de propagation des ondes de diffusion visqueuse donnant lieu à temps d'établissement lent pour l'écoulement redressé.

3.2.4.2 Ecoulement redressé total

La définition du temps de stabilisation pour l'écoulement redressé total est moins simple que pour les écoulements partiels. La courbe (3) dans la figure (3.12) présente les résultat de l'évolution de θ_c pour l'écoulement total ($\overline{v}^a_{xm} = \overline{v}^a_{xm1} + \overline{v}^a_{xm2}$), évalués en utilisant la définition du temps caractéristique des écoulements partiels (figure 3.11). L'anomalie dans la dépendance de θ_c du rapport (δ_ν / D) au voisinage de $(\delta_\nu / D) \approx (\delta_\nu / D)_{cr}$ est due à l'application d'une définition spécifique à un développement monotone (figure 3.11) à des processus de stabilisation non monotone et pulsé (figure 3.10).

En dépit de l'anomalie qui la caractérise, l'allure générale de la courbe (3) de la figure (3.12) présente des aspects physiques intéressants. La description du développement de l'écoulement redressé total $\overline{v}_{mx}$ comme étant la superposition de deux écoulements partiels monotones conduit à écrire,

$$\overline{v}_{mx} = \overline{v}_{mx1} + \overline{v}_{mx2} = \overline{v}_{mx1}(\theta = \infty)[1 - e^{-\theta/\theta_{c1}}] + \overline{v}_{mx2}(\theta = \infty)[1 - e^{-\theta/\theta_{c2}}] \quad , \qquad (3.39)$$

compte tenu du fait que $\overline{v}_{mx1}(\theta = \infty) + \overline{v}_{mx2}(\theta = \infty) \cong 0$ au voisinage immédiat du régime critique ($(\delta_\nu / D) \approx (\delta_\nu / D)_{cr}$). En introduisant les notations simplifiées $\overline{v}_{mx1}(\theta = \infty) = \overline{v}_\infty$

et $\bar{v}_{mx2}(\theta=\infty)=-\bar{v}_{\infty}+\Delta\bar{v}$ tel que $|\Delta\bar{v}|/\bar{v}_{\infty}<<1$ et en considérant l'inégalité établie précédemment $|\theta_{c2}-\theta_{c1}|/\theta_{c1}\equiv\Delta\theta_c/\theta_{c1}<<1$, l'équation (3.39) est approchée par la relation,

$$\bar{v}_{mx}\cong\Delta\bar{v}[1-e^{-\theta/\theta_c}]+\bar{v}_{\infty}\left(\frac{\Delta\theta_c}{\theta_c}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_c}\right)e^{-\theta/\theta_c}\quad , \tag{3.40}$$

où seuls les termes du premier ordre en $|\Delta\bar{v}/\bar{v}_{\infty}|<<1$ et $|\Delta\theta_c/\theta_{c1}|<<1$ sont retenus et la notation $\theta_c\equiv\theta_{c1}\approx\theta_{c2}$ est adoptée. La présentation du développement de l'écoulement redressé sous la forme (3.39) met en évidence la présence d'un processus monotone de stabilisation monotone ($\propto[1-e^{-\theta/\theta_c}]$) auquel se superpose un processus pulsé ($\propto(\theta/\theta_c)e^{-\theta/\theta_c}$). La comparaison des amplitudes de ces deux contributions indique que d'un point de vue formel, la définition du temps de stabilisation de la figure (3.11) n'est applicable que si $|\Delta\bar{v}|/\bar{v}_{\infty}>>|\Delta\theta_c|/\theta_c$ (c'est à dire quand la première contribution domine). Dans ce cas limite, le temps caractéristique de l'établissement de l'écoulement redressé total est approximativement le même que celui des écoulements partiels ($\theta_c\equiv\theta_{c1}\approx\theta_{c2}$). Néanmoins, la définition de la figure (3.11) reproduit correctement les prévisions physiques attendues pour un écart $\Delta\bar{v}$ positif même pour un écart relatif $\Delta\bar{v}/\bar{v}_{\infty}\approx\Delta\theta_c/\theta_c$, c'est-à-dire quand le comportement non monotone introduit dans le processus de stabilisation total par la contribution du processus pulsée n'est pas encore assez prononcé.

La courbe (3) de la figure (3.12) constitue l'exemple typique d'un tel comportement. Dans cette situation (voir les courbes (1) et (2) aussi dans la figure 3.12), le mode pulsé dans l'équation (3.40) contribue en phase (pour $\Delta\bar{v}>0$) à la croissance du mode monotone. Ce qui induit une diminution effective du temps de stabilisation de l'écoulement total (voir la pente des courbes transitoires de la figure (3.10) devenant de plus en plus accentuée avec la diminution de (δ_v/D) - courbes (1), (2) et (3) - et donnant lieu à une diminution significative de $\Delta\bar{v}$ dans l'équation (3.40) en accord avec la figure 3.4). Ainsi, la diminution du temps caractéristique d'établissement de l'écoulement total pour un rapport (δ_v/D) juste au dessus de $(\delta_v/D)_{cr}$ (prédit par la courbe (3) dans la figure 3.12) n'est pas un aspect artificiel issu de la définition de θ_c.

Néanmoins, quand le mode pulsé dans l'équation (3.40) donne lieu à un développement non monotone pour l'écoulement total (voir les courbes (4)–(6) dans la figure 3.10), la

définition de θ_c donnée par la figure (3.11) devient inapplicable. Il est à noter que pour tout $\Delta\bar{v} < 0$ tel que $|\Delta\bar{v}|/\bar{v}_\infty < \Delta\theta_c/\theta_c$ la modélisation de l'écoulement par l'équation (3.39) reproduit le processus de stabilisation non monotone ainsi que le changement de direction de l'écoulement moyen au cours de son développement (pour des temps adimensionnels $\theta << \theta_c$, $\bar{v}_{xm}(\theta) \cong [\Delta\bar{v} + \bar{v}_\infty(\Delta\theta_c/\theta_c)](\theta/\theta_c) > 0$ tandis que pour $\theta >> \theta_c$, $\bar{v}_{xm}(\theta) \cong \Delta\bar{v} < 0$). Ce type de comportement transitoire est dû au fait qu'à de faibles échelles de temps, la contribution des force est moins contrainte par la résistance des parois, et d'autre part, à ce que l'amplitude de la force F_{x1} est plus importante que celle de F_{x2}, ce qui contribue à l'excitation d'un écoulement de direction positive ($\bar{v}_{xm} > 0$). Toutefois, à de grandes échelles de temps, le rôle de la force F_{x2} est dominant (voir § 3.4.2), ce qui provoque le changement de direction de l'écoulement.

Une définition du temps caractéristique θ'_c adaptée aux processus de stabilisation non monotone consiste à le considérer comme étant la somme de deux contributions,

$$\theta'_c = \theta'_1 + \theta'_2 \quad , \tag{3.41}$$

où θ'_1 est le temps nécessaire à l'écoulement pour atteindre $(1 - e^{-1})$ de sa vitesse maximale alors que θ'_2 est le temps caractéristique du processus transitoire correspondant à $\theta \geq \theta_{max}$. Le temps caractéristique θ'_2 est défini de façon similaire à $\theta_{c1,2}$ (figure 3.11). Le temps caractéristique θ'_2 correspond à l'intervalle (considéré dans le domaine $\theta \geq \theta_{max}$) tel que la différence entre la vitesse $\bar{v}_{mx}$ et la vitesse stationnaire $\bar{v}_{mx}(\theta = \infty)$ diminue e fois en comparaison avec la différence $\bar{v}_{mx}(\theta = \theta_{max}) - \bar{v}_{mx}(\theta = \infty)$. Le temps caractéristique aux processus de stabilisation non stationnaires θ'_c est donné par la relation,

$$\bar{v}_{mx}(\theta_{max} + \theta'_2) - \bar{v}_{mx}(\infty) = [\bar{v}_{mx}(\theta_{max}) - \bar{v}_{mx}(\infty)]/e \quad , \tag{3.42}$$

et illustré par la figure (3.13).

Cette définition permet d'obtenir la durée caractéristique de l'écoulement pulsé dans le cas d'un processus de stabilisation purement pulsé ($(\delta_v/D) = (\delta_v/D)_{cr}$). La courbe (4) de la figure (3.12) présente la dépendance de θ'_c du (δ_v/D) pour les régimes d'interaction (onde / paroi) irréguliers (évolution temporelle non monotone de $\bar{v}_{mx}$) localisés par simulation numérique dans l'intervalle $(\delta_v / D) \leq 1.55 \cdot 10^{-2}$.

La transition de la courbe (3) à la courbe (4) (appelée précédemment anomalie) dans la figure (3.12) est ambiguë. D'un point de vue physique, cette transition a lieu quelque part dans l'intervalle $1.4\cdot10^{-2} \le (\delta_\nu/D) \le 1.5\cdot10^{-2}$ (intervalle hachure dans la figure 3.12) et non précisément au point $(\delta_\nu/D) = 1.55\cdot10^{-2}$. Indépendamment de la transition précise entre les courbes (3) et (4), l'étude présente prévoit une diminution significative (4 à 8 fois) du temps de stabilisation de l'écoulement total en approchant du régime critique par diminution du rapport (δ_ν/D).

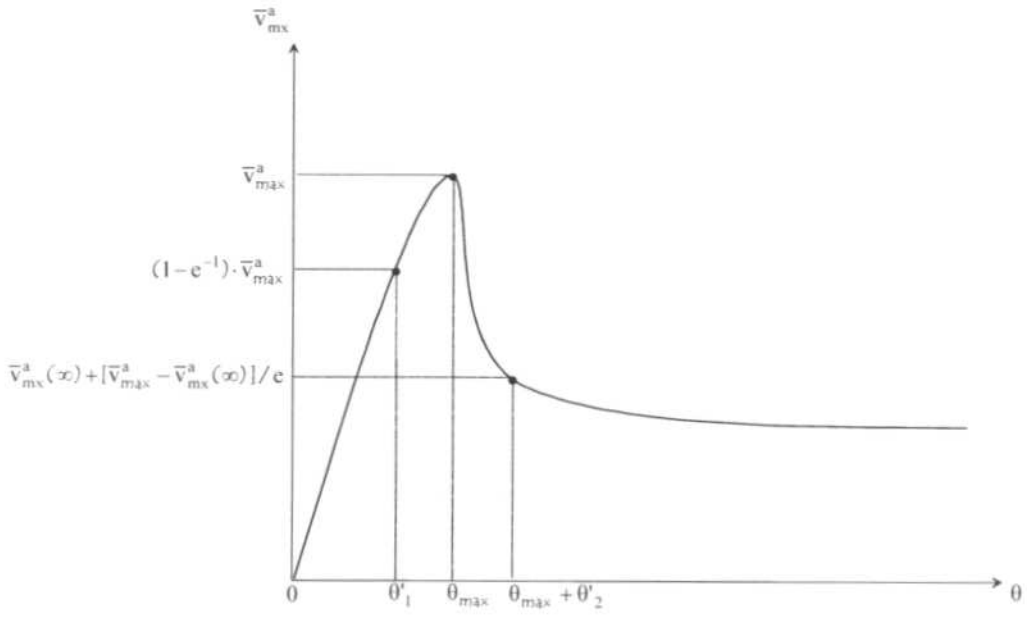


Fig. 3.13. Définition du temps caractéristique pour une stabilisation *non monotone* de l'écoulement redressé.

Il est important de souligner que l'écart entre θ'_c et $\theta_c \equiv \theta_{c1} \approx \theta_{c2}$ diminue rapidement en diminuant (δ_ν/D) en dessous de $(\delta_\nu/D)_{cr}$ (figure 3.12). L'analyse du modèle représenté par l'équation (3.39) montre que la diminution de cet écart est due à une décroissance progressive de la phase positive dans le développement de l'écoulement total (voir courbes (5), (6) et (7) dans la figure 3.10). Conséquemment, la définition de θ_c dans la figure (3.11) est presque valable pour les régimes $(\delta_\nu/D) < (\delta_\nu/D)_{cr}$ bien que le développement de l'écoulement total est non monotone dans ces régimes.

3.3 Ecoulements redressés dans le résonateur de Ceperley en présence de champs acoustiques propagatif et stationnaire

3.3.1 Champ acoustique propagatif pur

Le champ acoustique généré dans le résonateur de Ceperley est calculé en considérant l'approximation couche limite (voir § 2.2.2). Le modèle analytique développé au paragraphe 3.1 est ainsi adopté pour la caractérisation des écoulements redressés excités en présence d'un champ acoustique purement propagatif. Les expressions analytiques adimensionnelles des contraintes de Reynolds sont données pour le résonateur de Ceperley en *annexe A*. La présence du rapport de la largeur des sources excitatrices au diamètre du résonateur (d/D) dans ces expressions (A6) et (A7) est issu de l'amplitude de pression p_a (2.57). Dans ce qui suit, les forces excitatrices et les vitesses d'écoulements sont évaluées pour un rapport $d/D = 10^{-3}$.

Les profils (le long de la section transversale du résonateur de Ceperley) des forces excitatrices adimensionnelles $F^a_{x1,2}$ (voir figures 3.14.a et 3.14.b) sont similaires aux profils des forces leur correspondant dans l'acoustitron pour le régime d'interaction onde / paroi considéré (voir figures 3.1.a et 3.1.b). En fait, les vibrations transversales des parois de l'acoustitron n'apportent pas de contribution spatiale (≡pas de modification des profils de force) supplémentaire dans l'excitation des écoulements redressés par rapport aux parois rigides du résonateur de Ceperley. Les fluctuations spatiales des parois de l'acoustitron induisent un déphasage dépendant du rapport (δ_v / D) dans l'amplitude de la pression acoustique p_a (équation (2.27)), contrairement à une amplitude p_a (2.57) réelle dans le cas du résonateur de Ceperley. Dans le calcul des forces excitatrices, seul le module de l'amplitude de l'onde acoustique est considéré.

La représentation de l'évolution des spectres spatiaux des forces adimensionnelles $F^a_{x1,2}$ (voir figures 3.15.a et 3.15.b) ainsi que des vitesses adimensionnelles $v^a_{mx1,2}$ (voir figures 3.16.a et 3.16.b) en fonction du régime d'interaction onde / paroi met en évidence l'influence de l'amplitude de l'onde acoustique sur les amplitudes des forces et des vitesses d'écoulement.

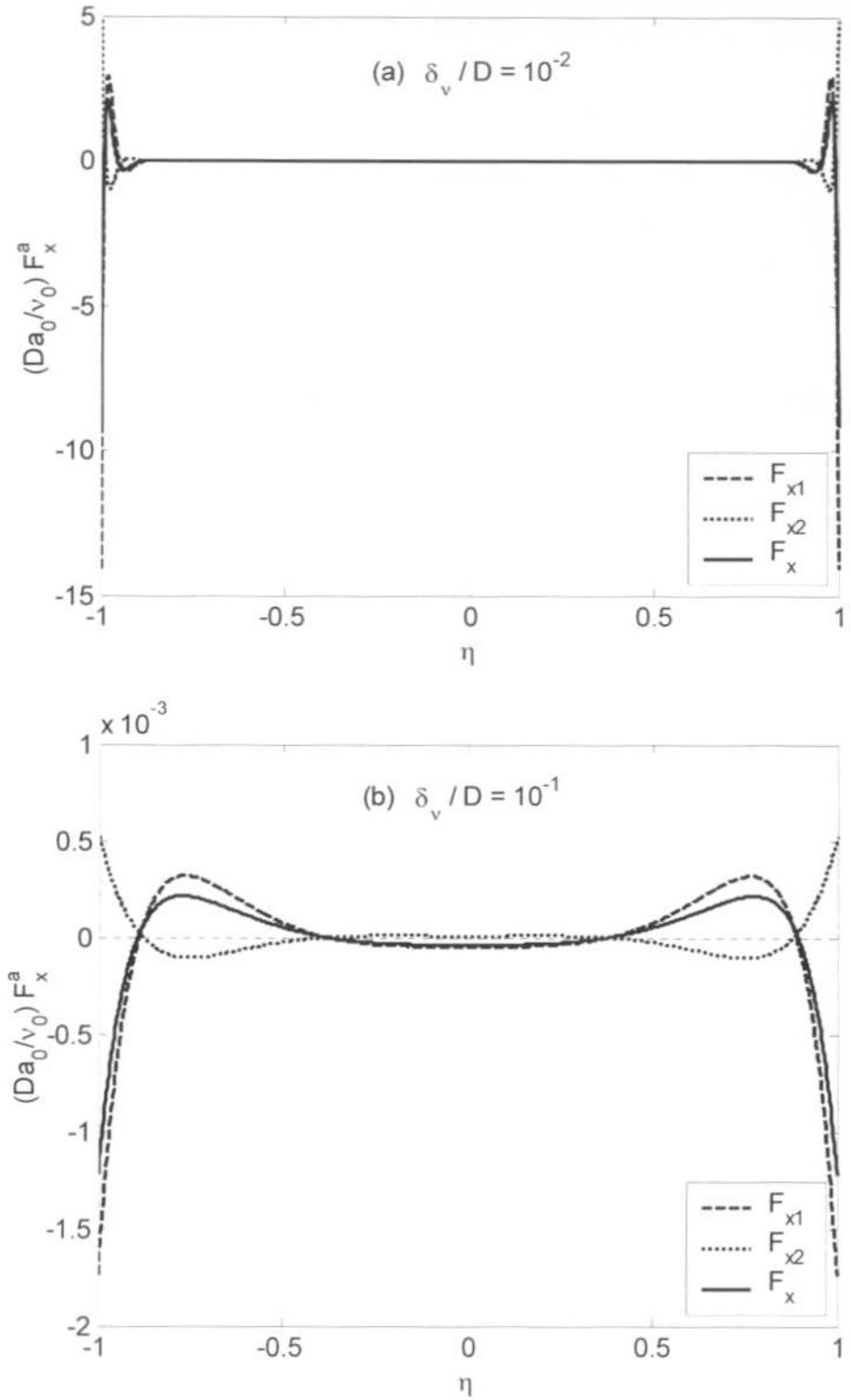


Fig. 3.14. Profils des forces adimensionnelles F_{x1}^a, F_{x2}^a et F_x^a pour différentes valeurs du rapport (δ_v / D).

(a) $\delta_v / D = 10^{-2}$. (b) $\delta_v / D = 10^{-1}$.

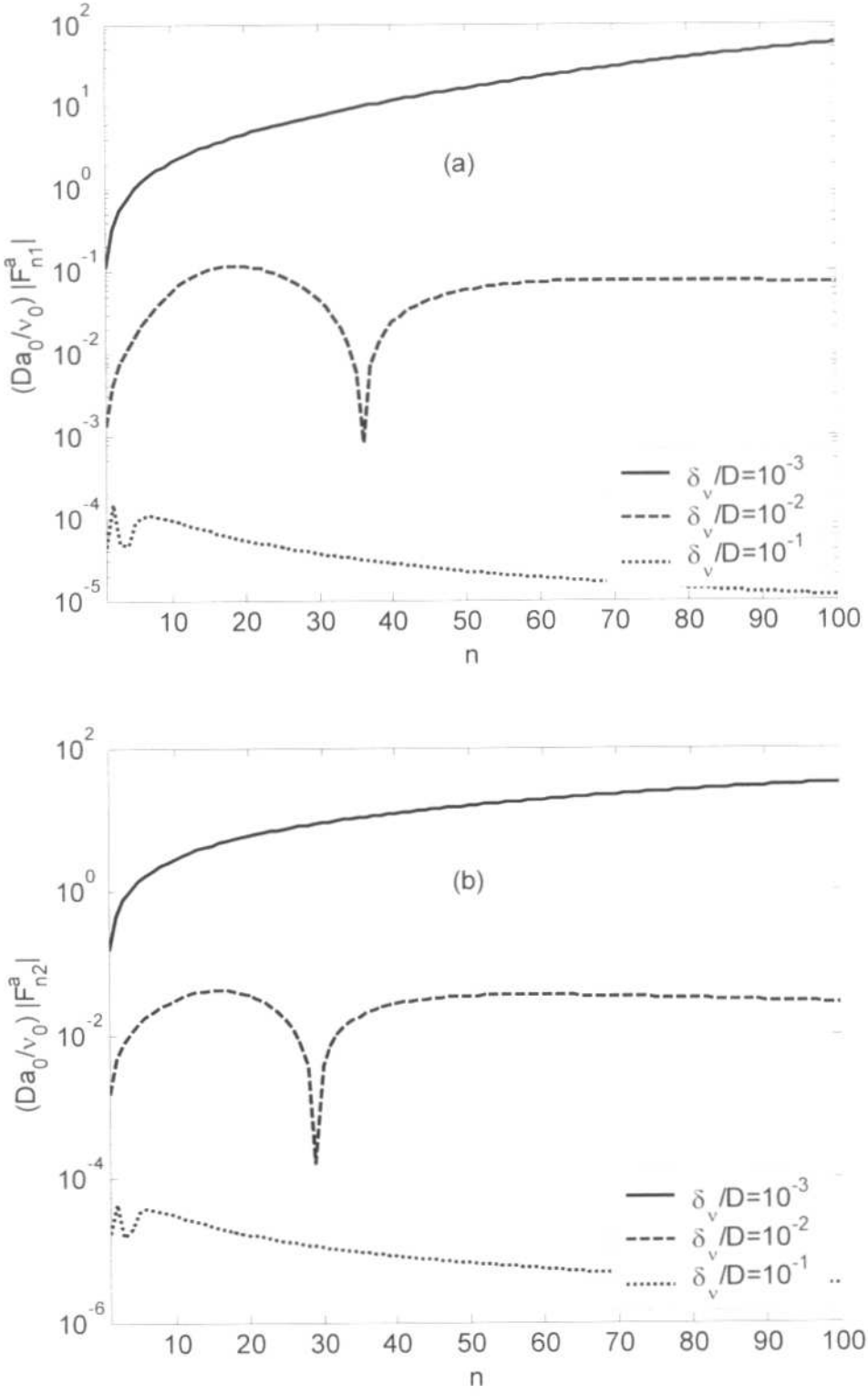


Fig. 3.15. Spectres spatiaux des forces adimensionnelles F^a_{x1} et F^a_{x2} pour différentes valeurs du rapport (δ_v / D). Les figures (a) et (b) correspondent respectivement à F^a_{x1} et F^a_{x2} .

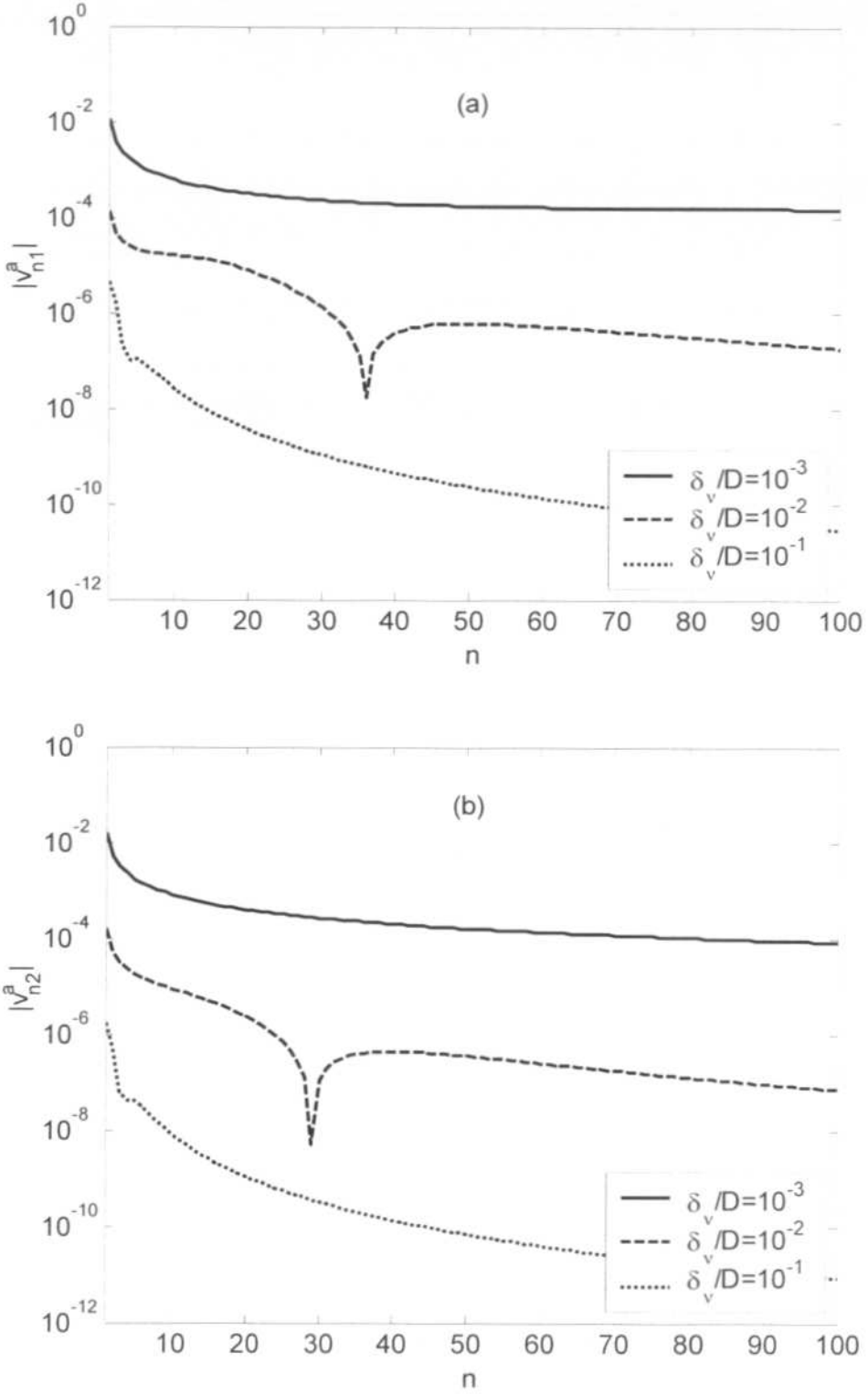


Fig. 3.16. Spectres spatiaux des vitesses adimensionnelles stationnaires v^a_{mx1} et v^a_{mx2} pour différentes valeurs du rapport (δ_ν / D). Les figures (a) et (b) correspondent respectivement à v^a_{mx1} et v^a_{mx2}.

Dans une transition d'un régime quasi-adiabatique modéré ($\delta_v / D \approx 10^{-1}$) à un régime quasi-adiabatique aigu ($\delta_v / D \approx 10^{-3}$), le module de la pression acoustique $|p_a|$ croît suivant la relation (2.57). Il s'ensuit une augmentation de l'ordre de $|p_a|^2$ pour les amplitudes des forces excitatrices et des vitesses d'écoulement puisque celles-ci sont proportionnelles à $|p_a|^2$. Cette croissance hyperbolique due à $|p_a|^2 \propto 1/(\delta_v / D)^2$ est accentuée suite à l'augmentation des amplitudes des coefficients de proportionnalité relatives aux forces $C_{F1,2}$ (3.28) et aux vitesses $C_{v1,2}$ (3.29) avec la diminution du rapport (δ_v / D). La figure (3.17) présentant l'évolution des vitesses moyennes adimensionnelles stationnaires $\overline{v}^a_{mx1,2}$ avec (δ_v / D), illustre la combinaison des deux mécanismes d'influence du régime d'interaction onde / paroi sur les amplitudes des vitesses d'écoulement.

Il est à noter que le régime critique ($(\delta_v / D)_{cr} \approx 1.3 \cdot 10^{-2}$) pour lequel l'écoulement stationnaire total ($\overline{v}^a_{mx} = \overline{v}^a_{mx1} + \overline{v}^a_{mx2}$) s'annule (voir figure 3.17) ainsi que les temps caractéristiques de stabilisation de l'écoulement total moyen dépendant de (δ_v / D) (voir figure 3.18) sont identiques à ceux de l'acoustitron (voir respectivement les figures 3.4 et 3.12).

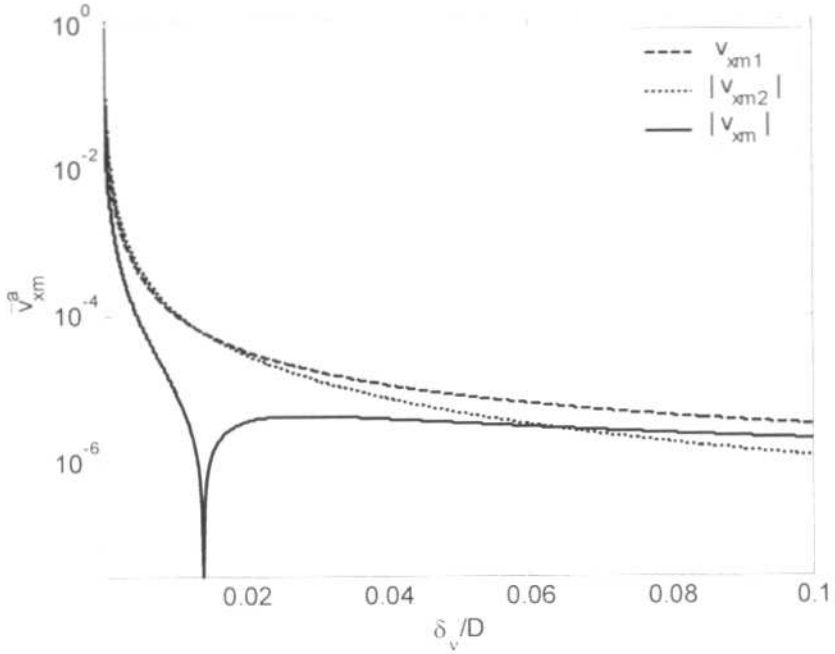


Fig. 3.17. Evolution des vitesses moyennes adimensionnelles stationnaires $\overline{v}^a_{mx1}$, $\overline{v}^a_{mx2}$ et $\overline{v}^a_{mx}$ en fonction du rapport (δ_v / D).

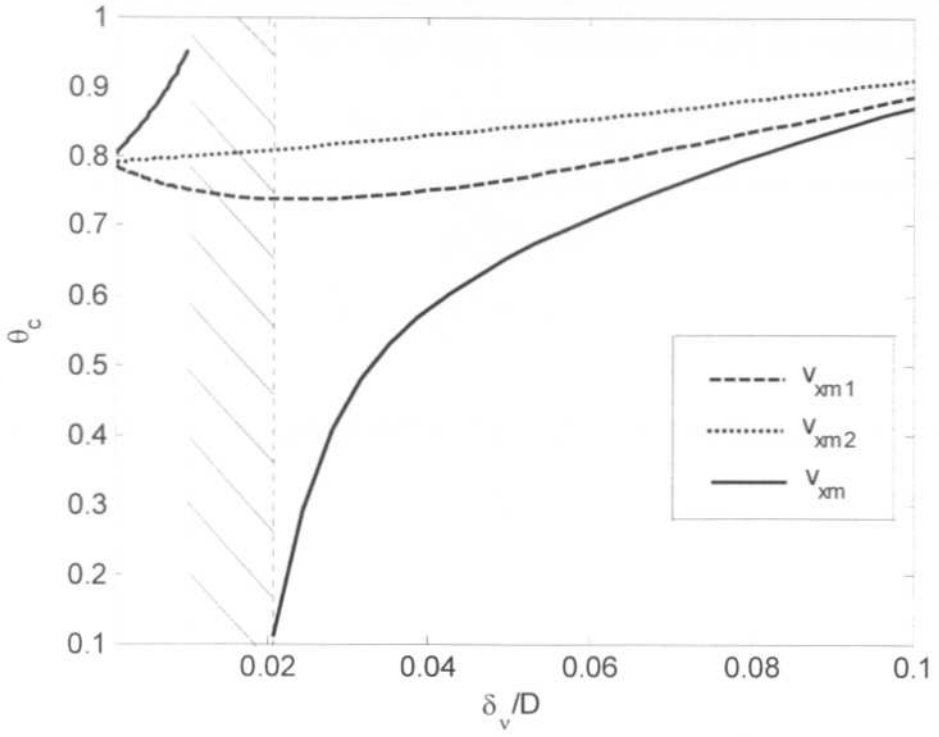


Fig. 3.18. Evolution du temps caractéristique adimensionnel (θ_c) de la stabilisation des écoulement redressés partiels et total en fonction du rapport (δ_v / D).

3.3.2 Champ acoustique à composantes propagative et stationnaire

En présence d'un champ acoustique comportant une composante stationnaire, les écoulements redressés excités dans le résonateur annulaire de Ceperley s'accompagnent d'un gradient axial non nul pour la pression hydrodynamique ($dp_m / dx \neq 0$). Aussi la contribution issue de la variation axiale de la contrainte de Reynolds correspondant aux fluctuations de la composante axiale de la vitesse particulaire $\widetilde{v}_x$ (voir équation (3.2)),

$$F_{x3} = -\rho_0 \frac{\partial < v_{1x}^2 >}{\partial x} \quad , \tag{3.43}$$

est différente de zéro. La force F_{x3} est réécrite sous la forme,

$$F_{x3} = -\frac{1}{\omega^2 \rho_0} \left|1 - F_v\right|^2 \frac{d}{dx}\left(\left|\frac{d\widetilde{p}}{dx}\right|^2\right) \quad , \tag{3.44}$$

compte tenu de l'expression de v_{1x} (2.11).

La dépendance de l'intensité acoustique axiale I_a de la coordonnée x est à l'origine des variations axiales des composantes de force F_{x1} et F_{x2}. L'intensité acoustique I_a correspond à la moyenne temporelle du produit de la vitesse particulaire v_{1x} et de la pression acoustique p_1 [45,50],

$$I_a = < v_{1x} p_1 > = \frac{-1}{2\omega\rho_0} Re\left(i(1-F_v)\left(\frac{d\tilde{p}}{dx}\tilde{p}^*\right)\right) \quad . \tag{3.45}$$

Un développement des expressions (3.7) et (3.8) permet d'écrire les forces F_{x1} et F_{x2} en fonction du terme de pression $((d\tilde{p}/dx)\tilde{p}^*)$ de l'équation (3.45),

$$F_{x1} = \frac{-1}{2\omega^2\rho_0}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{ Re\left((1-F_v)(-k_R^2(\eta-\Phi_v^*)+k_0^2[\eta+(\gamma-1)\Phi_k^*])\left(\frac{d\tilde{p}}{dx}\tilde{p}^*\right)\right)\right\} \quad , \tag{3.46}$$

$$F_{x2} = -\beta\frac{(\gamma-1)}{\rho_0 a_0^2}\left(\frac{\delta_v}{D}\right)^2\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{ Re\left((1-F_k)\frac{\partial(iF_v)^*}{\partial\eta}\left(\frac{d\tilde{p}}{dx}\tilde{p}^*\right)^*\right)\right\} \quad . \tag{3.47}$$

La vitesse adiabatique du son a_0 et le rapport de la couche limite visqueuse au diamètre du conduit (δ_v/D) sont introduits dans l'équation (4.7) en tenant compte de la relation thermodynamique $(a_0^2/(T_0 c_p) = \gamma - 1)$ [44] et de l'expression de δ_v (2.2).

Les termes de pression $(d\tilde{p}/dx)\tilde{p}^*$, $((d\tilde{p}/dx)\tilde{p}^*)^*$ et $|d\tilde{p}/dx|^2$ dans les composantes de forces F_{x1}, F_{x2} et F_{x3} (équations (3.46), (3.47) et (3.44)) sont données successivement par les relations,

$$(d\tilde{p}/dx)\tilde{p}^* = k_R(1+\sin(\varphi))[-2R_\varphi\cos(2k_R x)+i(1-R_\varphi^2)]p_a^2/2 \quad , \tag{3.48}$$

$$((d\tilde{p}/dx)\tilde{p}^*)^* = k_R(1+\sin(\varphi))[-2R_\varphi\cos(2k_R x)-i(1-R_\varphi^2)]p_a^2/2 \quad , \tag{3.49}$$

$$|d\tilde{p}/dx|^2 = k_R^2(1+\sin(\varphi))(1+R_\varphi^2+2R_\varphi\sin(2k_R x))p_a^2/2 \quad , \tag{3.50}$$

compte tenu de l'expression de la pression acoustique (2.54) établie dans le cas général de deux ondes acoustiques se propageant en sens opposés dans le résonateur de Ceperley.

La substitution de la quantité $|d\tilde{p}/dx|^2$ par son expression (3.50) dans la composante de force F_{x3} permet d'écrire,

$$F_{x3} = -\frac{2k_R^3}{\omega^2 \rho_0} |1 - F_v|^2 (1 + \sin(\varphi)) R_\varphi \cos(2k_R x) p_a^2 \quad . \tag{3.51}$$

La contribution partielle de la force F_{x3} dans l'excitation de l'écoulement redressé total consiste en un écoulement de vitesse v_{mx3} périodique le long de l'axe des x. Présentant la même période spatiale ($\lambda/2$) que les écoulements de Rayleigh, cet écoulement s'annihile pour une valeur nulle du rapport R_φ, ce qui correspond à l'absence de la composante stationnaire de l'onde ($\varphi = \pi/2$).

La substitution des quantités $(d\widetilde{p}/dx)\widetilde{p}^*$ et $((d\widetilde{p}/dx)\widetilde{p}^*)^*$ par leur expressions respectives (3.48) et (3.49) permet d'écrire les composantes de force F_{x1} et F_{x2} sous la forme générale compacte,

$$F_{x1} = \frac{k_R p_a^2 (1 + \sin(\varphi))}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} Re\left\{\Theta_1 \times [-2R_\varphi \cos(2k_R x) + i(1 - R_\varphi^2)]\right\} \quad , \tag{3.52}$$

$$F_{x2} = \frac{k_R p_a^2 (1 + \sin(\varphi))}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} Re\left\{\Theta_2 \times [-2R_\varphi \cos(2k_R x) - i(1 - R_\varphi^2)]\right\} \quad , \tag{3.53}$$

où les fonctions Θ_1 et Θ_2 correspondent respectivement à,

$$\Theta_1 = \frac{-1}{2\omega^2 \rho_0} (1 - F_v) \times (-k_R^2 (\eta - \Phi_v^*) + k_0^2 [\eta + (\gamma - 1)\Phi_k^*]) \quad , \tag{3.54}$$

$$\Theta_2 = -\beta \frac{(\gamma - 1)}{\rho_0 a_0^2} \left(\frac{\delta_v}{D}\right)^2 (1 - F_k) \frac{\partial (iF_v)^*}{\partial \eta} \quad . \tag{3.55}$$

Pour un champ acoustique purement propagatif ($R_\varphi(\varphi = \pi/2) = 0$), les composantes de force F_{x1} et F_{x2} se réduisent à,

$$F_{x1} = k_R p_a^2 \frac{\partial}{\partial \eta} Re\{i \times \Theta_1\} \quad , \tag{3.56}$$

$$F_{x2} = -k_R p_a^2 \frac{\partial}{\partial \eta} Re\{i \times \Theta_2\} \quad . \tag{3.57}$$

Il est à noter que les expressions analytiques des contraintes de Reynolds adimensionnelles σ_1^a et σ_2^a données en *annexe A*, sont établies en développant et en normalisant (par rapport à la contrainte caractéristique $\sigma_c = \rho_0 v_0^2 / 2$) les contraintes de Reynolds,

$$\sigma_1 = k_R p_a^2 \mathrm{Re}\{i \times \Theta_1\} \quad , \tag{3.58}$$

$$\sigma_2 = -k_R p_a^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \mathrm{Re}\{i \times \Theta_2\} \quad . \tag{3.59}$$

Les contraintes de Reynolds σ_1 et σ_2 excitent les écoulements redressés partiels directionnels (c'est-à-dire constant le long du guide d'onde) étudiés au paragraphe précédent (§ 4.1). Les amplitudes de vitesses de ces écoulements sont proportionnelles à l'intensité acoustique I_a de l'onde purement propagative ($I_a \propto p_a^2$).

Par ailleurs, pour un champ acoustique comportant une composante d'onde stationnaire, chaque écoulement redressé partiel comporte une composante d'écoulement directionnelle à laquelle se superpose une composante d'écoulement périodique le long du conduit. Les amplitudes de vitesse des écoulements redressés (de période spatiale $\lambda / 2$) excités par les contributions périodiques dans les forces F_{x1} et F_{x2} (termes proportionnelles à la fonction $\cos(2 k_R x)$ dans les équations (3.52) et (3.53)) sont proportionnelles au rapport des amplitudes de pression de la composante stationnaire à celle de la composante propagative (R_φ). Les contributions directionnelles des forces F_{x1} et F_{x2} sont proportionnelles à la différence des intensités acoustiques correspondant aux deux ondes contre propagatives dans le résonateur ($I_a^+ - I_a^- \propto (1 - R_\varphi^2) p_a^2$). Les expressions des forces F_{x1} et F_{x2} montrent clairement que pour des ondes contre propagatives de même amplitude, un champ acoustique stationnaire s'établit dans le résonateur ($R_\varphi(\varphi = 0) = 1$ et $I_a^+ - I_a^- = 0$) donnant lieu à des écoulements redresses partiels totalement périodiques similaires aux écoulements de Rayleigh.

3.4 Application aux machines thermoacoustiques annulaires

L'excitation des écoulements redresses partiels dans le résonateur de Ceperley (ou l'acoustitron) est due aux phénomènes non linéaires dans les couches limites viscothermiques.

L'écoulement redressé total (somme des écoulements partiels) donne lieu à un flux de masse non nul (sauf en régime d'interaction onde / paroi critique) dans le circuit en boucle fermée du résonateur.

Les mécanismes physiques excitant les écoulements redressés ainsi que la géométrie des machines thermoacoustiques annulaires sont similaires à ceux du résonateur de Ceperley (ou de l'acoustitron). En conséquence, les temps caractéristiques de stabilisation des écoulements redressés dans le résonateur de Ceperley (ou l'acoustitron) constituent de bonnes estimations pour le développement des écoulements redressés dans ces machines.

Penelet *et coll.* [36] étudièrent expérimentalement le seuil de développement de l'instabilité thermoacoustique ainsi que le processus de saturation des ondes acoustiques dans un moteur thermoacoustique annulaire. Le résonateur annulaire considéré est un conduit cylindrique de rayon $r = 2.65\text{cm}$ rempli d'air (de viscosité cinématique $\nu_0 \approx 0.14\,\text{cm}^2/\text{s}$) et fonctionnant en régime d'interaction onde / paroi quasi-adiabatique (fréquence $f = 153\text{Hz}$). Compte tenu de ses données expérimentales, le rapport de la couche limite visqueuse au diamètre du conduit et le temps caractéristique sont approximativement de l'ordre de ($\delta_\nu / D \approx 0.005$) et $\tau_c = D^2/\pi^2\nu_0 \approx 20\text{s}$ respectivement. Pour la stabilisation du processus de saturation des ondes acoustiques, les échelles de temps rapportées par ces auteurs ont un ordre de grandeur compris dans un intervalle s'étendant approximativement de 10 à 100 secondes.

L'utilisation des résultats illustrés par la figure (4.5) ou encore ceux présentés pour l'acoustitron en figure (3.12) et discutés au paragraphe (3.5), permettent d'estimer le temps caractéristique de stabilisation t_c des écoulements redressés dans le résonateur sus désigné approximativement à $t_c \approx \tau_c \approx 20\ \text{s}$. En se référant aux résultants présentés dans la figure (3.12) ou aux commentaires du paragraphe (3.5), pour un régime d'interaction onde / paroi correspondant au rapport $\delta_\nu / D \approx 0.15$ (la largeur des pores du stack étant de 0.09cm [26, 36]), le temps caractéristiques de stabilisation des écoulements redressés dans le stack est légèrement supérieur à t_c. En conséquence, le temps caractéristique de stabilisation de l'écoulement redressé annulaire total (circulant dans le guide d'onde et dans le stack) est supérieur à $20\,\text{s}$.

Conformément aux résultats expérimentaux [36] et analytiques (voir figure 3.12), les ordres de grandeur des temps de développement de l'instabilité thermoacoustique et de l'écoulement redressé sont comparables. Les contraintes de Reynolds évoluent dans le temps

suite à la variation de l'intensité du champ acoustique au cours du développement de l'instabilité thermoacoustique. Ces contraintes excitent un écoulement redressé dont le développement est relativement lent en comparaison avec le développement de l'instabilité thermoacoustique. En conséquence, l'écoulement redressé ne peut être considéré comme étant quasi-stationnaire dans les machines thermoacoustiques annulaires. Il est donc nécessaire de tenir compte de la convection thermique induite par l'écoulement redressé dans l'étude du processus de développement et de saturation des ondes acoustiques. Aussi, l'analyse du processus de stabilisation de l'écoulement redressé dans des résonateurs annulaires (l'acoustitron ou le résonateur de Ceperley) équipés d'un stack (auquel il est possible d'imposer un gradient de température) est susceptible de donner des estimations précises pour les variations spatiotemporelles des écoulements redressées et des champs de pression et de température dans les machines thermoacoustiques annulaires. La complexité de telles configurations ne permet pas une investigation analytique, le recours à la modélisation numérique s'impose.

3.5 Discussion des limites d'applicabilité du modèle analytique proposé

Pour le résonateur de Ceperley, la séparation des sources excitatrices (de pression) d'une distance $\lambda/4$ est une configuration qui correspond à un apport d'énergie optimum (amplitude maximale pour l'onde acoustique). Par ailleurs, le déphasage entre les sources excitatrices fixe le rapport des intensités acoustiques I_a^- et I_a^+ associées aux deux directions propagatives (respectivement, sens négatif et positif des x). D'après l'équation (3.45), les intensités acoustiques axiales I_a^+ et I_a^- correspondant aux champs contre propagatifs $\widetilde{p}^+$ et $\widetilde{p}^-$ sont données par les relations,

$$I_a^+ = < v_{1x}^+ p_1^+ > = \frac{1}{2\omega\rho_0} Re(1 - F_v) |\widetilde{p}^+|^2 \quad . \tag{3.60}$$

$$I_a^- = < v_{1x}^- p_1^- > = \frac{-k_R}{2\omega\rho_0} Re(1 - F_v) |\widetilde{p}^-|^2 \quad . \tag{3.61}$$

Les intensités acoustiques axiales I_a^+ et I_a^- sont proportionnelles aux carrés des modules des amplitudes de pression acoustique ($I_a^+ \propto |\widetilde{p}^+|^2$ et $I_a^- \propto |\widetilde{p}^-|^2$). Pour un déphasage nul

($\varphi = 0$), deux ondes acoustiques de même intensité se propagent en sens opposés donnant lieu à une onde stationnaire alors que pour des excitations en quadrature de phase ($\varphi = \pi/2$), une seule onde acoustique progressive est générée dans le sens positif des x. En d'autres termes, le déphasage contribue à la répartition spatiale (le long du conduit) de l'énergie acoustique apportée par les deux sources excitatrices au résonateur de Ceperley. Il est possible d'obtenir une répartition homogène de cette énergie (un seul mode propagatif) dans le cas d'un fonctionnement du résonateur de Ceperley en régime d'interaction onde / paroi quasi-adiabatique (voir § 2.4.2). Néanmoins, dans une transition d'un régime d'interaction onde / paroi quasi-adiabatique à un régime quasi-isotherme, les dissipations d'énergie acoustique dans les couches limites viscothermiques deviennent relativement importantes. La disposition dissymétrique des sources excitatrices dans le résonateur induit une dissymétrie des distributions des pertes viscothermiques correspondant aux tronçons de conduit ($-b \leq x \leq 0$) et ($0 \leq x \leq L - b$). Ce qui ne permet pas d'avoir une répartition homogène de l'énergie acoustique dans le résonateur. En fait, l'homogénéisation de la répartition de l'énergie acoustique est conditionnée par des pertes viscothermiques négligeables (régime d'interaction onde / paroi quasi-adiabatique).

Pour l'acoustitron, la répartition homogène donnant lieu à une onde acoustique progressive unique, est due à la continuité (pas de dissymétrie) et à la périodicité spatiales des forces excitatrices le long des parois ($L = n\lambda_a$). Le sens de propagation de l'onde acoustique générée est fixé par le sens de propagation des l'excitation des parois. Une distribution spatiale non périodique des forces excitatrices le long des parois ($L \neq n\lambda_a$) est susceptible de donner lieu à une composante d'onde stationnaire en plus d'une composante propagative [41].

Il est important de souligner le fait que pour le résonateur de Ceperley et l'acoustitron, les amplitudes des déplacements (induits par les sources excitatrices) sont considérés comme étant négligeables par rapport au $\min(\delta_v, D)$. De plus, pour le résonateur de Ceperley les largeurs des sources excitatrices sont supposées faibles devant le diamètre du conduit. Ces considérations indiquent clairement que l'écoulement redressé excité est à caractère purement acoustique (vent acoustique).

Le dispositif conçu par Nguyen *et coll.* [32-33] pour le pompage des fluides à des échelles microscopiques présente une géométrie similaire à celle de l'acoustitron. Le profil ondulatoire de la paroi inférieure de la pompe de Nguyen *et coll.* (la paroi supérieure étant rigide) est obtenu suite à la propagation d'une onde ultrasonore de flexion dans la plaque constituant la paroi flexible. Les déplacements longitudinaux et transversaux de la plaque sont

de même ordre de grandeur que le diamètre du conduit. En conséquence, deux types d'écoulements redressés sont excités [51]. Différant des vents acoustiques, l'écoulement redressé correspondant aux déplacements longitudinaux de la plaque est similaire aux écoulements redressés excités dans le fluide au voisinage d'un corps solide en mouvement oscillatoire [52]. L'écoulement redressé correspondant aux déplacements transversaux de la plaque est dû à une onde acoustique évanescente. Cet écoulement redressé à caractère acoustique diffère des écoulements redressés dans le résonateur de Ceperley et l'acoustitron. Ces derniers sont dus à des modes acoustiques propagatifs et non évanescents.

3.6 Conclusion

Les fluctuations de la viscosité dues à la dépendance de la composante thermique du champ acoustique apportent une contribution supplémentaire dans l'excitation de l'écoulement redressé. Cette contribution qui ne fut prise en compte que tardivement par Rott [9], est susceptible d'annihiler en moyenne (sur la section transversale du conduit) l'écoulement redressé total pour un régime d'interaction onde / paroi quasi-adiabatique aigu dit critique. Un fonctionnement des machines thermoacoustiques annulaires en ce régime particulier est supposé réduire considérablement la convection thermique associée à ce type d'écoulement de Gedeon. Néanmoins, l'établissement de l'écoulement redressé est caractérisé par une transition brutale au voisinage du rapport de l'épaisseur de la couche limite visqueuse au diamètre du conduit caractéristique au régime *critique* ($(\delta_v / D)_{cr}$). En effet (voir figure 3.12), en diminuant le rapport (δ_v / D) au voisinage du point $(\delta_v / D)_{cr}$, le temps de stabilisation de l'écoulement redressé total passe d'un régime d'écoulement pulsé à un régime notamment lent ($\theta_c > 1$). Il est important de souligner le fait que pour des régimes d'interaction onde / paroi éloignés du régime critique, les temps caractéristiques adimensionnels du développement de l'écoulement redressé total sont de l'ordre de l'unité.

Chapitre 4

Modélisation numérique des écoulements redressés instationnaires dans des résonateurs annulaires

La considération de la convection thermique due à l'écoulement redressé dans le processus de développement et de saturation de l'instabilité thermoacoustique consiste en un couplage des équations décrivant les évolutions temporelles de l'écoulement redressé et de l'amplitude de l'onde acoustique. Inclure ce couplage dans une simulation numérique des machines thermoacoustiques suscite le développement d'un modèle numérique susceptible de reproduire correctement les variations spatiotemporelles de l'écoulement redressé. L'utilisation de temps de calcul et de capacités en ressources mémoire importants sont des contraintes inhérentes aux simulations des machines thermoacoustiques. Ces contraintes liées à une intégration multidimensionnelle directe des équations de la thermomécanique sont discutées en présentant des modèles numériques conçus auparavant pour la description des écoulements redressés (§ 4.1). Un modèle numérique présentant moins de contraintes numériques est proposé et validé par rapport aux résultats obtenus pour l'acoustitron (§ 4.2). Par la suite, ce modèle est amélioré pour simuler l'écoulement redressé dans un résonateur de Ceperley équipé d'un stack fin (§ 4.3).

4.1 Contraintes numériques en simulation des machines thermoacoustiques

Une simulation numérique des écoulements redressés dans une machine thermoacoustique suscite au préalable le calcul du champ acoustique par intégration numérique multidimensionnelle des équations de la thermomécanique. Les éléments composant une machine thermoacoustique présentent des échelles spatiales différant de plusieurs ordres de grandeur. En effet, la longueur du guide d'onde est de l'ordre de grandeur

de la longueur d'onde alors que la largeur des pores du stack est comparable aux épaisseurs des couches limites viscothermiques. Les conditions de stabilité pour une résolution conforme du champ acoustique dans les pores du stack imposent des pas de temps faibles par rapport à la période acoustique. Il s'ensuit un temps de calcul dont l'importance est accentués par les raffinements de maillages aux voisinages des entrées des pores. Par ailleurs, ce raffinement de maillage lié aux largeurs différentes du guide d'onde et des pores conduit à l'utilisation de ressources mémoire considérables. Les composantes de vitesse de l'écoulement redressé sont données par les moyennes sur une période acoustique des composantes de densité de quantité de mouvement leur correspondant. Il est à noter que l'évolution temporelle de la moyenne de la quantité de mouvement est relativement lente par rapport aux oscillations acoustiques.

En s'affranchissant des contraintes numériques sus désignées, Hamilton *et coll.* ont pu simuler les écoulements redressés dans les machines thermoacoustiques [53]. Dans leur modèle numérique unidimensionnel, les équations de la thermomécanique sont simplifiées en adoptant l'approximation des couches limites ($\delta_v << \lambda$) ; le domaine d'intégration des équations a été réduit à un canal rectangulaire ayant pour dimensions la longueur du résonateur et la moitié de la distance séparant deux plaques (d'épaisseurs négligeables) consécutives du stack, une périodicité spatiale étant supposée dans la direction transversale d'un résonateur à section variable. De plus, aucune restriction sur la longueur du stack ni sur sa position dans le résonateur n'est considérée. En adoptant l'approximation couche limite, Hamilton *et coll.* ont dissocié la condition de stabilité de la faible échelle spatiale des pores du stack. Ce modèle numérique non linéaire a été validé par rapport au modèle classique de la thermoacoustique linéaire. Le processus de développement et de saturation de l'instabilité thermoacoustique ainsi que la distorsion des ondes acoustiques constituent les *deux premiers phénomènes non linéaires* analysés. Ce modèle présente de bonnes performances numériques mais il est conçu pour le calcul des machines thermoacoustiques à ondes stationnaires.

Le code numérique bidimensionnel non linéaire (basé sur la méthode des différences finies) développé par Hamilton *et coll.* a été utilisé par la suite pour le calcul des écoulements redressés stationnaires (*troisième phénomène non linéaire* s'ajoutant aux deux précédents) dans les pores du stack et dans leur voisinage [54]. La dépendance de la viscosité du fluide à la température a été considérée. Les simulations ont mis en évidence en particulier, l'extension des vortex dans les couches limites à l'extérieur du stack d'une distance de l'ordre de l'amplitude du déplacement particulaire. En passant outre le stack et la dépendance entre la viscosité et la température, la simulation des écoulements redressés entre deux parois séparées

d'une distance quelconque a reproduit précisément l'évolution des vortex de Rayleigh et les vortex dans les couches limites en fonction du régime d'interaction onde / paroi donnée par le modèle analytique de ces auteurs [22]. Il est à noter que la focalisation sur les simulations associées au modèle sus désigné [53] est due au fait qu'il présente certains similitudes avec le modèle proposé au paragraphe (4.2) et amélioré au paragraphe (4.3).

Stansell *et coll.* [55] ont utilisé un modèle de gaz sur réseau (Lattice gas automaton) pour la simulation des écoulements redressés bidimensionnels. Cette technique inventée par Frisch *et coll.* [56], consiste en la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles représentant les interactions à l'échelle microscopique d'un ensemble de particules fluide (réel) disposées aux nœuds d'un système de treillis. Le système d'équations comporte une équation similaire à la loi de conservation de masse et deux équations correspondant aux équations de Navier-Stokes. L'application de cette technique dans la simulation des écoulements redressés excités en présence d'un champ acoustique stationnaire, a reproduit qualitativement les écoulements de Rayleigh. Stansell *et coll.* ont attribué l'écart entre les solutions données par Rayleigh et leur modèle à un choix d'un treillis à larges dimensions ou encore aux contributions des termes d'ordre supérieur. En fait, la technique du modèle de gaz sur réseau est caractérisée par un taux de bruit élevé. Ainsi, l'apparition des écoulements redressés nécessite la considération d'amplitudes d'onde et de viscosité relativement importantes. Haydock *et coll.* ont utilisé une version améliorée de cette technique dite gaz sur réseau de Boltzmann [57]. Ces auteurs sont parvenus à approcher les écoulements de Rayleigh pour certaines valeurs du rapport du diamètre du conduit à la longueur d'onde. Lallemand et coll. démontrèrent que les simulations utilisant l'automate à treillis de Boltzmann sont numériquement instables [58].

4.2 Modèle proposé et validation

L'écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible de vitesse $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ est décrit par les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement [44-46],

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad , \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad , \tag{4.2}$$

où **F** désigne le vecteur des sources de force. L'approximation couche limite (§ 3.1) et une composante de force transversale nulle ($F_y = 0$) permettent de décrire l'écoulement redressé par sa composante de valeur significative axiale u_x,

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_x = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} - \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial^2 y} + F_x \quad , \tag{4.3}$$

compte tenu du fait que $u_x >> u_y$ selon l'équation de conservation de masse (4.1). En considérant des vitesses d'écoulement d'amplitudes relativement faibles, le terme convectif $(\mathbf{u}\cdot\nabla)u_x$ dans l'équation (4.3) peut être négligé (écoulements de Stokes). Enfin, la périodicité spatiale de la pression dans un conduit à géométrie annulaire ($p(x=0) = p(x=L)$) dénué de toute installation supplémentaire conduit à écrire,

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial^2 y} + F_x \quad , \tag{4.4}$$

compte tenu de ($dp/dx = 0$).

L'équation (4.4) se présente sous la même forme que l'équation de l'écoulement redressé (3.13). Cette similitude permet le calcul de l'écoulement redressé par un code numérique semi-ouvert de mécanique des fluides incompressibles en considérant une géométrie bidimensionnelle au rapport des dimensions transversale et axiale spécifiques aux couches limites ($D << L$), en y intégrant la condition de périodicité de pression spécifique aux géométries annulaires et en implémentant le terme source de force F_x par une fonction externe (User Defined Function). Le terme force F_x dans le cas de l'écoulement correspond à la somme des forces excitatrices F_{x1} (3.7) et F_{x2} (3.8) issues des gradients transversaux des contraintes de Reynolds. Les amplitudes des forces F_{x1} et F_{x2} implémentées dans le code sont suffisamment faibles pour n'exciter que des écoulements de faibles vitesses, rendant les termes convectifs de l'équation (4.2) négligeables. En intégrant dans le code numérique les conditions initiales ($\mathbf{u}(t=0) = 0$) et d'adhérence du fluide aux parois ($\mathbf{u}(y = \pm D/2) = 0$) pour le champ de vitesse $\mathbf{u} = (x, y, t)$, la solution numérique du système d'équations (4.1) et (4.2) pour la géométrie considérée est une approximation de la solution analytique (3.26).

Le code numérique choisi utilise la méthode des volumes finis (Fluent 6.0 [59]). L'écart entre les solutions analytique et numérique dépend étroitement de la structure du maillage ainsi que du nombre de cellules dans les directions transversale et axiale de la géométrie considérée. L'homogénéité du champ de force suivant la direction axiale et la périodicité axiale de la pression permettent de réduire le nombre de cellules suivant l'axe des x à une

seule cellule. Par ailleurs, le maillage adopté suivant la direction transversale du guide d'onde dépend du régime d'interaction onde / paroi. Des forces excitatrices confinées au voisinage des parois en régime quasi-adiabatique impose un maillage irrégulier, alors que pour des forces uniformément réparties le long de la section transversale du conduit en régime quasi-isotherme, un maillage régulier est plus adapté (voir figure 4.1). Il est à noter que l'inclusion de la condition de symétrie par rapport à l'axe du résonateur ($\partial u_y(y=0)/\partial y = 0$) réduit considérablement le temps de calcul. La prise en compte de cette condition dans le code numérique revient à considérer le domaine d'intégration ($0 \le x \le L$ et $0 \le y \le D/2$) ou bien ($0 \le x \le L$ et $-D/2 \le y \le 0$) tout en spécifiant l'axe de symétrie.

Une validation du modèle proposé consiste à comparer les résultats des simulations numériques d'un acoustitron aux résultats du modèle analytique pour le même résonateur annulaire (Chapitre 3). La fréquence d'excitation est fixée à $f = 1000\,Hz$ permettant ainsi le contrôle du régime d'interaction onde / paroi (δ_v / D) en variant le diamètre D de l'acoustitron. Le gaz remplissant l'acoustitron est de l'air considéré aux conditions initiales de pression et de température $p_0 = 1.013 \cdot 10^5\,Pa$ et $T_0 = 224.11K$ et ayant pour valeurs des propriétés thermophysiques $\rho = 1.225 kg/m^3$, $\mu = 1.7894 \cdot 10^{-5} kg/(ms)$, $c_p = 1004\ J/(kgK)$, $\gamma = 1.4$ et $\sigma = 0.71$ et pour la valeur du paramètre spécifique $\beta = 0.77$. L'amplitude de la vitesse d'oscillation des sources excitatrices équivaut à $v_0 = 0.2\,m/s$. Ce qui conduit au niveau de pression $p_a = 472.6\,Pa$ pour un rapport ($\delta_v / D = 3$).

La figure (4.2) présente l'évolution temporelle des profils de vitesse de l'écoulement redressé total le long de la section transversale obtenus analytiquement (ligne continue) et numériquement (ligne discontinue) pour deux régimes d'interaction onde / paroi distincts. Les régimes quasi-adiabatique ($\delta_v / D = 0.1$) et quasi-isotherme ($\delta_v / D = 3$) sont établis pour les diamètres respectifs $D = 0.0682cm$ et $D = 0.00227cm$. La figure (4.3) présente les temps adimensionnels caractéristiques à l'établissement de l'écoulement redressé total donnés par les modèles analytique et numérique pour des rapports (δ_v / D) variant de ($\delta_v / D = 2 \cdot 10^{-2}$) à ($\delta_v / D = 1$), ce qui correspond à un diamètre variant de $D = 0.341cm$ à $D = 0.00682cm$. Les résultats des figures (4.2) et (4.3) montrent un bon accord entre les modèles analytique et numérique, validant ainsi ce dernier.

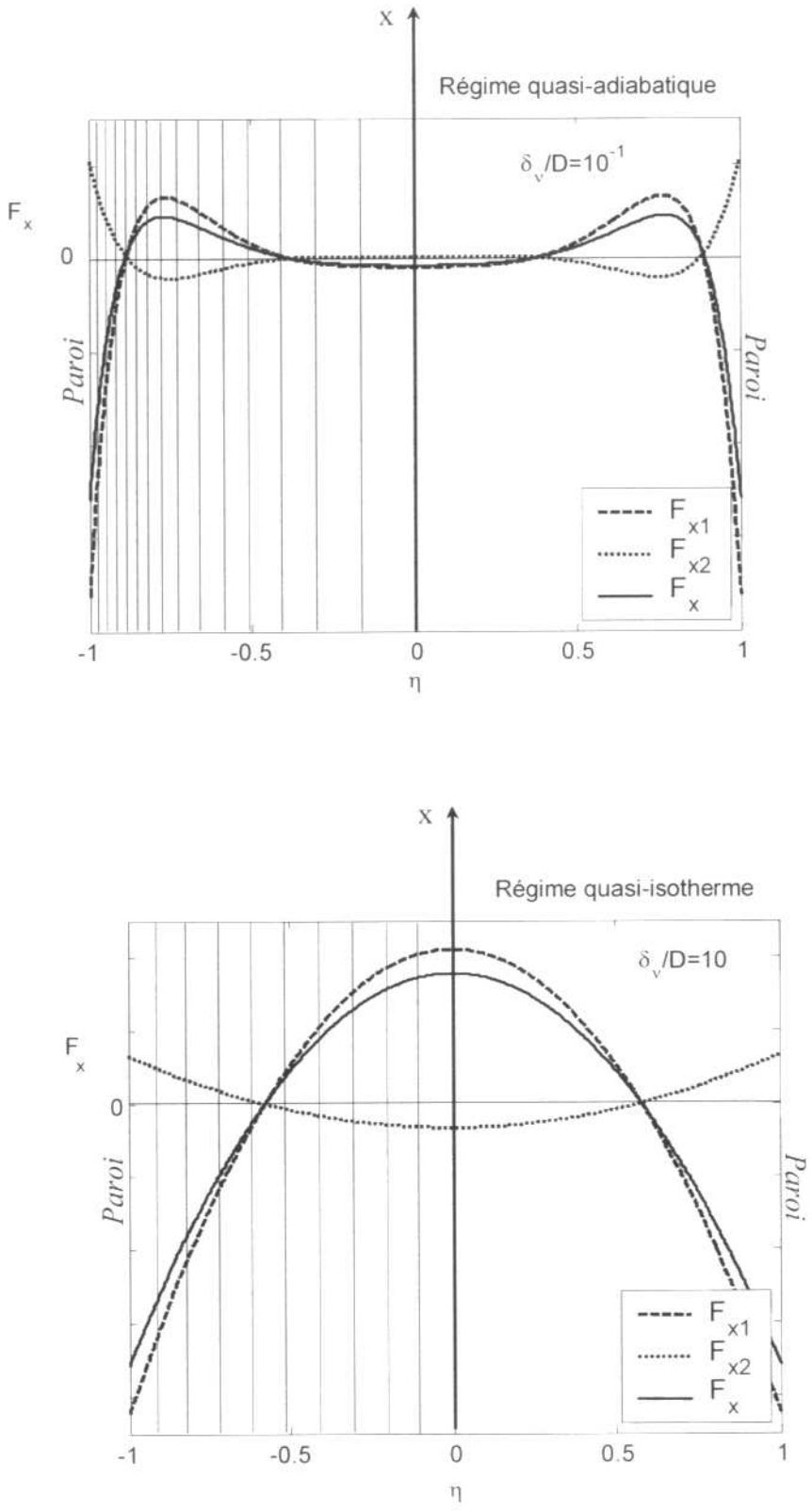


Fig. 4.1. Choix du type de maillages selon le régime d'interaction onde / paroi.

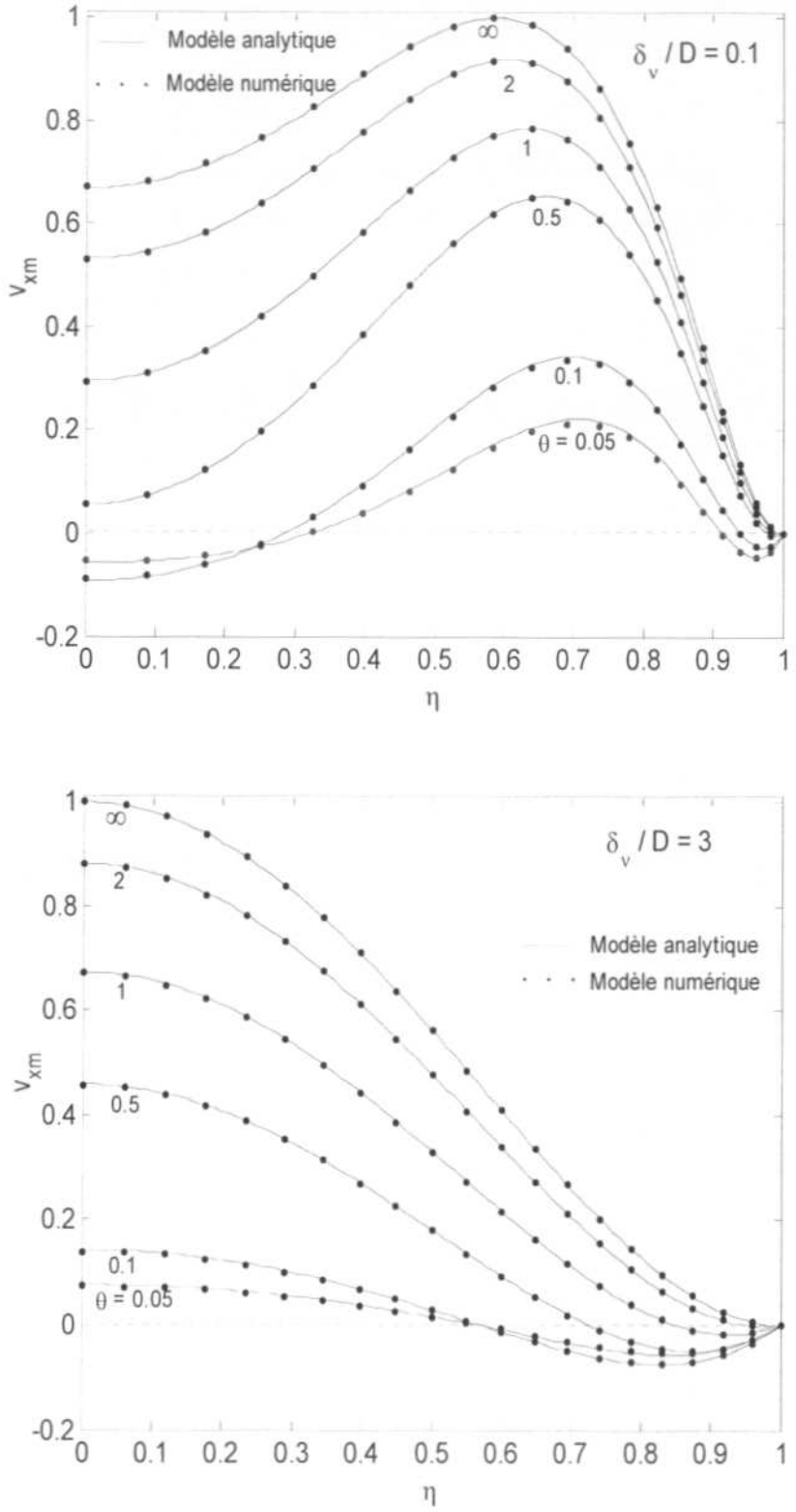


Fig. 4.2. Evolution des profils de vitesse normalisés à l'unité en fonction du temps adimensionnel (θ).

Il est à noter que l'écart de temps caractéristiques entre ces deux modèles au point ($\delta_v / D = 2 \cdot 10^{-2}$) est dû à des dimensions transversales des cellules contiguës aux parois qui ne sont pas suffisamment petites, ce qui ne permet pas par conséquent de rendre compte des importants gradients de force au voisinage des parois (interpolation grossière des profils de force dans cette région). Il est possible de remédier à cet écart pour ($\delta_v / D = 2 \cdot 10^{-2}$) en raffinant davantage le maillage au voisinage des parois. Toutefois, pour des rapport (δ_v / D) caractérisant des régimes quasi-adiabatiques aigus, le raffinement de maillage est d'une part coûteux en termes de ressources mémoire et d'autre part, inutile du point de vue numérique pour des dimensions suffisamment faibles des cellules.

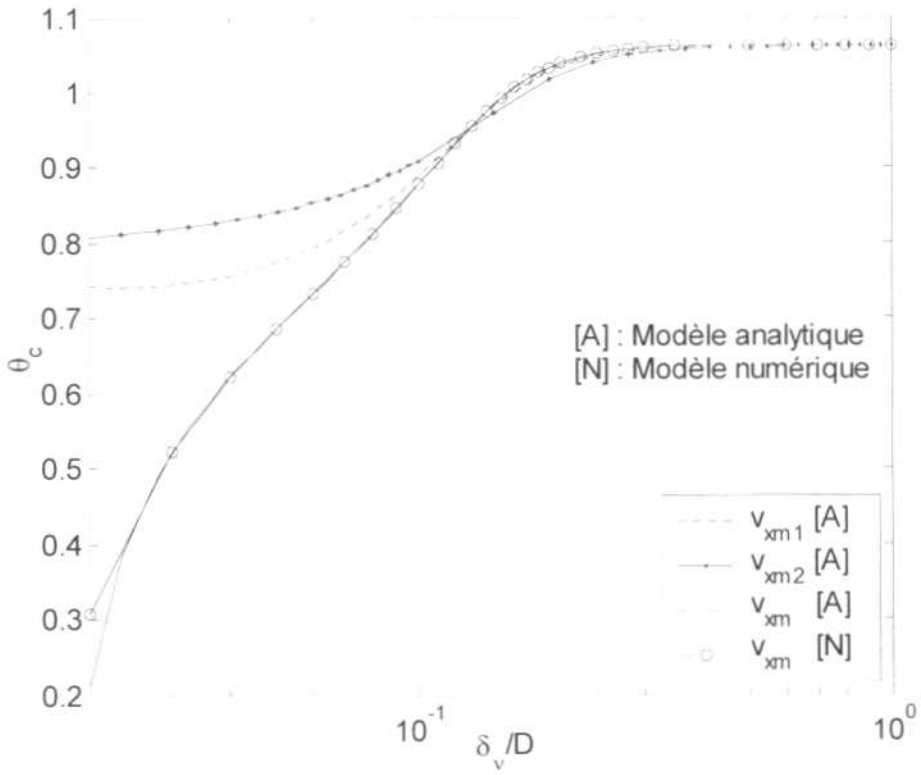


Fig. 4.3. Evolution du temps caractéristique adimensionnel (θ_c) en fonction du rapport (δ_v / D).

Dans le cas particulier de l'acoustitron, les amplitudes des forces excitatrices en régimes quasi-adiabatiques aigus sont notamment faibles. En calculant ces forces en simple précision, la fonction externe apporte (retourne) une quantité de mouvement tronquée au processus numérique diffusionel du solveur. Ceci entrave le développement correct des profils des vitesses le long de la section transversale du conduit. Un calcul des forces est effectué en

double précision. Néanmoins, la fonction externe est de type réel simple précision [59]. Un retour des valeurs des forces au solveur en double précision étant impossible (anomalie structurelle du code numérique utilisé), une conversion de ces valeurs en simple précision est effectuée à la fin du processus de calcul de la fonction externe.

4.3 Application aux résonateurs de Ceperley équipés de stack fin

Dans sa forme actuelle (§ 4.2), le modèle numérique proposé est appliqué aux résonateurs de Ceperley dénués de toute installation supplémentaire. En équipant le résonateur de Ceperley d'un stack (figure 4.4), l'hypothèse d'un champ acoustique propagatif pur est conservée en considérant un stack fin composé de plaques d'épaisseur négligeable (≡stack transparent à l'onde acoustique). La présence du stack introduit néanmoins une discontinuité dans la répartition transversale de la force excitatrice F_x suite à la différence entre les régimes d'interaction onde / paroi dans le guide d'onde et le stack. En considérant la distance séparant deux plaques consécutives comme étant faible par rapport à la longueur de celle-ci, l'approximation couche limite donne un écoulement redressé dans le stack. Compte tenu des faibles amplitudes de force (faibles amplitudes des vitesses≡termes convectifs négligeables), l'écoulement redressé est approché par l'équation (4.3),

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} - \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial^2 y} + F_x \quad , \tag{4.5}$$

le long du guide et du stack en dehors des frontières stack-guide d'onde. Le gradient axial de pression (dp/dx) tend à s'annuler en s'éloignant (dans une direction ou l'autre) de ces frontières. Du fait que le code numérique résout les équations bidimensionnelles (4.1) et (4.2) des écoulements incompressibles, les écoulements redressés dans le guide d'onde et dans le stack sont raccordés par les variations spatiales des contraintes visqueuses et de pression représentées respectivement par les termes $\Delta\mathbf{u}$ et ∇p. Un bon raccordement des solutions de vitesse correspondant au stack et au guide d'onde impose un raffinement des maillages au voisinage des frontières stack-guide d'onde (voir figure 4.5)

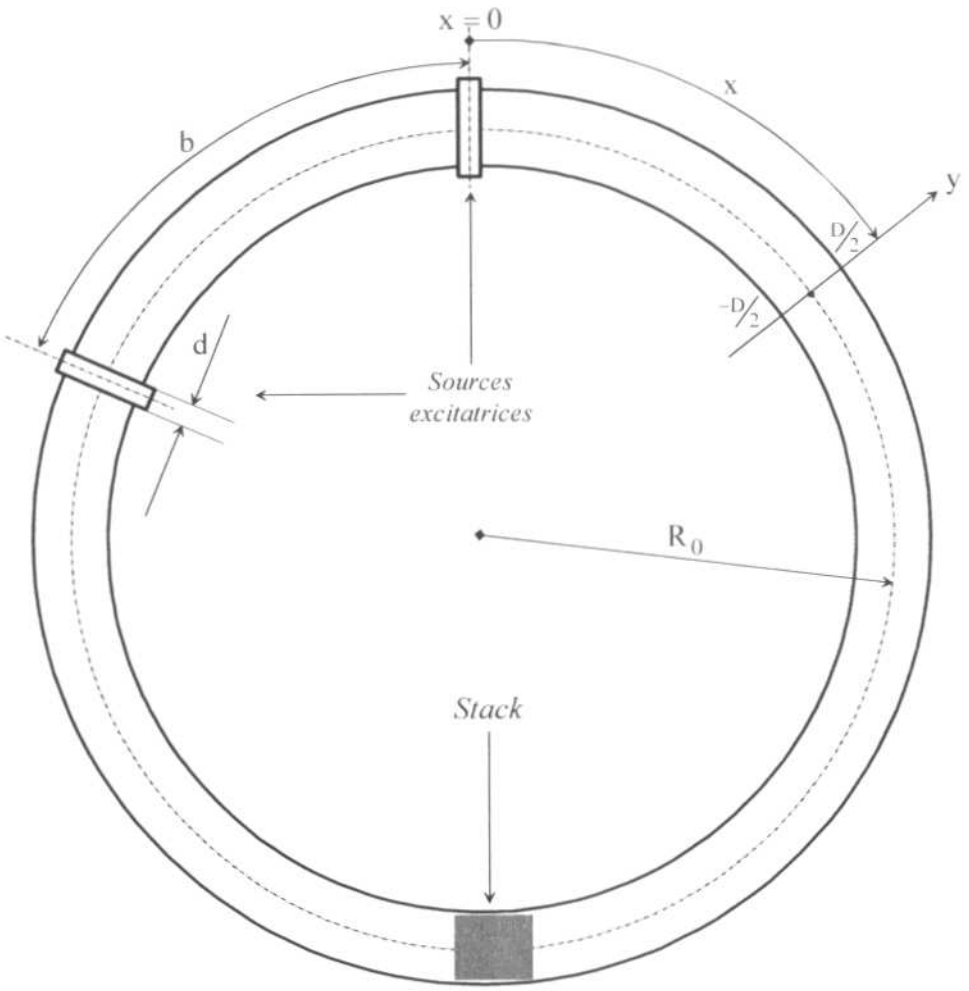


Fig. 4.4. Schéma d'un résonateur de Ceperley équipé d'un stack.

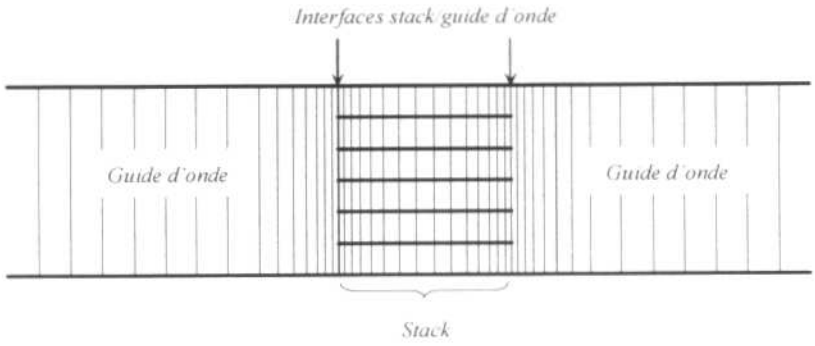


Fig. 4.5. Maillage suivant la direction axiale au voisinage des interfaces stack/guide d'onde.

Le stack est installé dans le résonateur de Ceperley en un point ($x = L/2$) éloigné des positions des sources excitatrices. L'écoulement redressé est simulé dans le résonateur de Ceperley équipé d'un stack pour les conditions opératoires et le fluide utilisés pour la validation du modèle proposé (§ 4.2). La largeur des sources excitatrices est fixée à $d = 0.001\,cm$ alors que le choix d'une longueur du résonateur de $30\,cm$ correspond à une fréquence fondamentale égale à $1000\,Hz$. Dans ces conditions, le niveau de pression est donné par $p_a = 4.65\,Pa$. Le rapport ($\delta_v / D = 0.1$) dans le guide d'onde correspond à un fonctionnement en régime quasi-adiabatique modéré ($D = 0.0682\,cm$). La constitution du stack est faite progressivement en rajoutant progressivement des plaques dans la section transversale ($x = L/2$) du guide d'onde. Le régime d'interaction onde / paroi transite du quasi-adiabatique modéré ($\delta_v / D_s = 0.1$) en l'absence du stack au quasi-isotherme ($\delta_v / D_s = 1$) pour un nombre de plaques égal à 29. La distance séparant deux plaques consécutives D_s est donnée par la relation,

$$D_s = D/(n_p + 1) \quad , \tag{4.6}$$

où n_p désigne le nombre de plaques. Il est important de souligner la prise en compte des conditions d'adhérence du fluide aux plaques dans le code numérique.

La représentation des profils de la force excitatrice F_x le long de la section transversale du guide d'onde (figure 4.6) montre l'augmentation de l'amplitude de F_x avec le nombre de plaques. Aussi, les profils de force sont de moins en moins confinés au voisinage des plaques avec n_p. Cette différence entre les profils des forces dans le stack (régime quasi-isotherme) et dans le guide d'onde (régime quasi-adiabatique) oppose la régularité (suivant la direction transversale) du maillage dans le stack à l'irrégularité du maillage dans le guide d'onde (régime quasi-adiabatique). Ce qui impose un maillage non conforme (voir figure 4.7).

Les simulations numériques montrent une invariance des champs de vitesse stationnaires $u_x(x,y)$ et $u_y(x,y)$ suivant l'axe des x ($u_x \cong u_x(y)$ et $u_y \cong u_y(y)$) dés que l'on s'éloigne des frontières stack/guide d'onde d'une distance D en direction du guide d'onde et d'une distance D_s à l'intérieur du stack (voir figures 4.8 et 4.9). Compte tenu de la longueur L_s du stack, des variations axiales significatives des champs de vitesse ont lieu approximativement dans les régions, $((L - L_s)/2 - D \le x \le (L - L_s)/2)$ et $((L + L_s)/2 \le x \le (L + L_s)/2 + D)$ du guide d'onde et dans les régions,

$((L-L_s)/2 \le x \le (L-L_s)/2+D_s)$ et $((L+L_s)/2-D_s \le x \le (L+L_s)/2)$ du stack. Ces régions occupent un volume relativement faible du résonateur ($\cong 2(D+D_s)/L << 1$). De plus, le champ de vitesse radiale est quasiment nul en dehors des régions contiguës aux frontières du stack ($u_y(x,y) \cong 0$). Ces constatations consolident la validité du modèle incluant le stack ainsi que le choix de la section transversale située à distances égales des frontières du stack ($x = 0$) pour l'investigation de l'écoulement redressé.

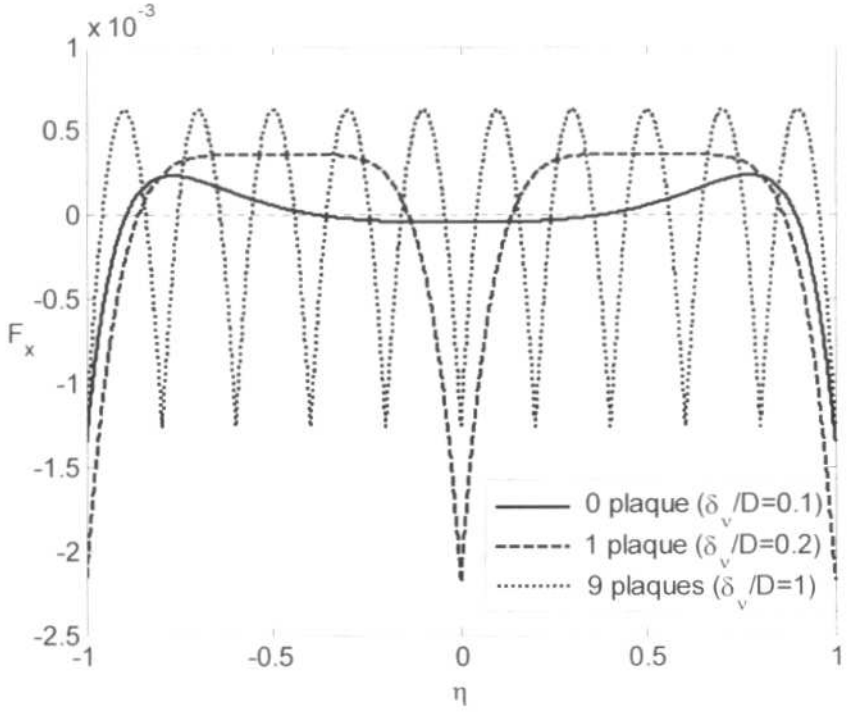


Fig. 4.6. Profils de la force excitatrice F_x le long de la section transversale d'installation du stack.

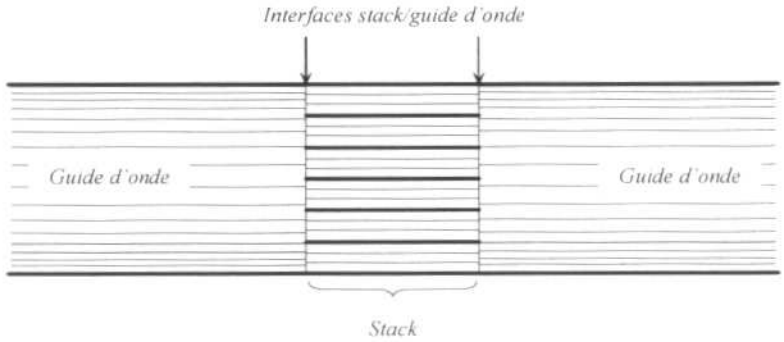


Fig. 4.7. Maillage suivant la direction transversale au voisinage des interfaces stack/guide d'onde.

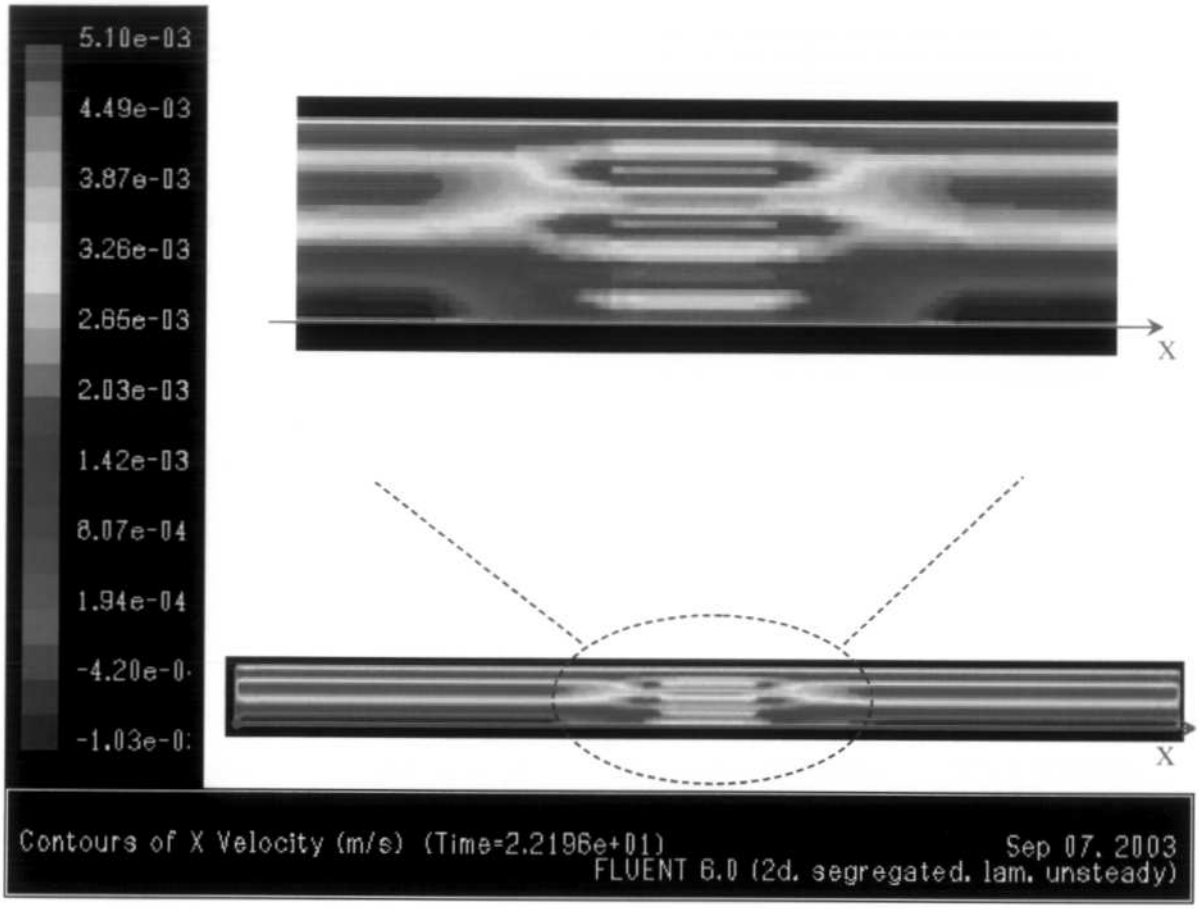


Fig. 4.8. Champ de vitesse axiale de l'écoulement redressé dans un résonateur annulaire. Le stack occupant 10% du volume du résonateur est composé de 7 plaques. Seule la partie supérieure du résonateur est modélisée.

La figure (4.10) présente les profils des vitesses stationnaires $v_{mx} = u_x$ le long de la section transversale du guide d'onde pour différents nombres de plaques ($n_p = 0 - 5, 7, 10, 15$ et 29) et deux valeurs du rapport du volume occupé par le stack dans le résonateur ($L_s / L = 1\%$ et $L_s / L = 10\%$). Ces profils sont normalisés par rapport à la valeur maximale de la vitesse le long de la section transversale calculée en l'absence du stack ($n_p = 0$).

En installant les deux premières plaques, l'amplitude de la vitesse augmente (voir les courbes 0-2 plaques des la figures 4.10.a et 4.10.b) suite à la croissance de l'amplitude de la force excitatrice (voir figure 4.6). L'installation d'un nombre supplémentaire de plaques induit une décroissance du maximum de la vitesse d'écoulement (voir les courbes 2-29 plaques des la figures 4.10.a et 4.10.b). Cette diminution de la vitesse avec n_p est liée à une augmentation rapide de la résistance hydrodynamique du stack en comparaison avec l'augmentation des amplitudes des forces excitatrices dans le stack. L'augmentation de

l'amplitude de forces dans le stack a pour effet de promouvoir un écoulement unidirectionnel alors que la croissance de la résistance hydrodynamique du stack transforme graduellement ce dernier en un écoulement bidirectionnel. Cet écoulement bidirectionnel tend à donner un flux de masse nul le long de la section transversale du guide d'onde pour un nombre de plaques important (voir les courbes 15-29 plaques et 7-29 plaques des figures 4.10.a et 4.10.b).

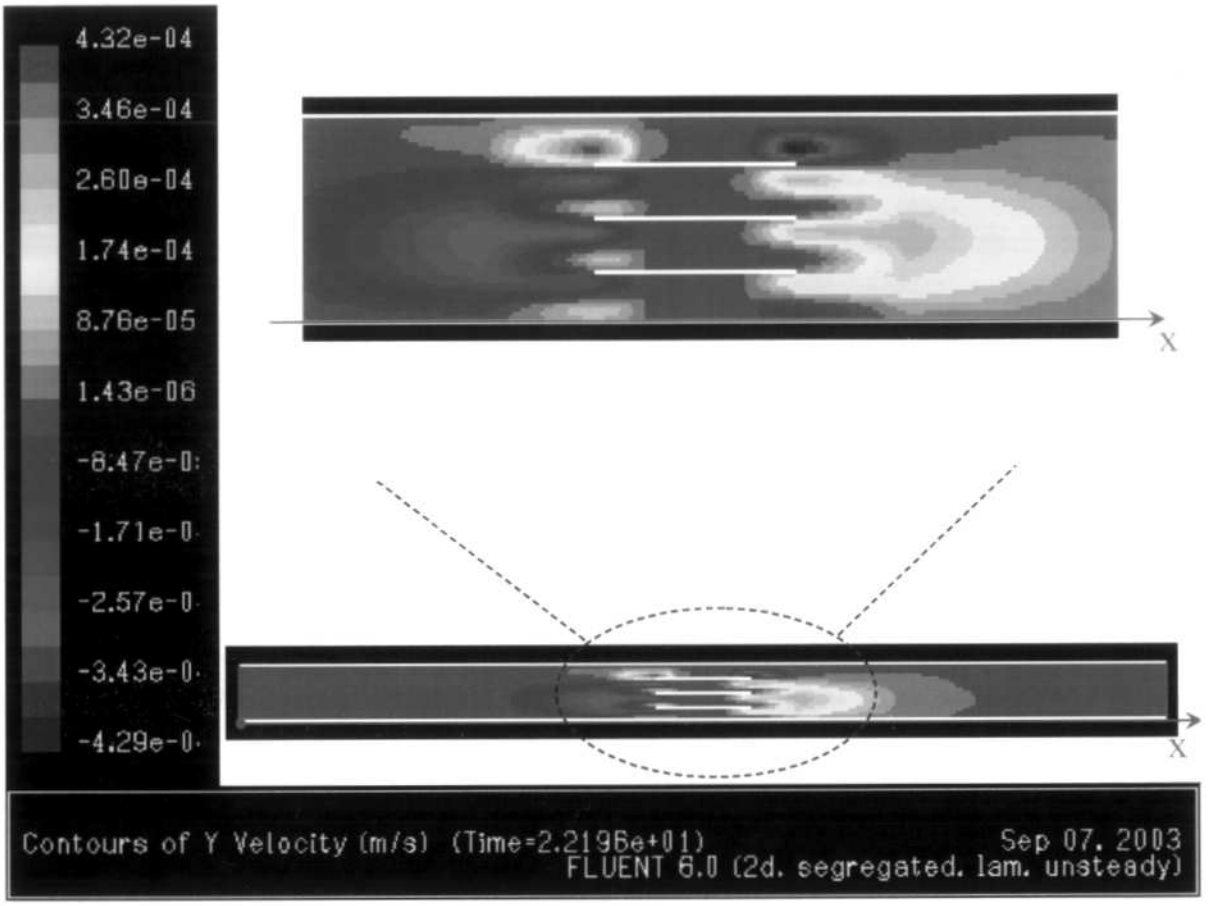


Fig. 4.9. Champ de vitesse transversale de l'écoulement redressé dans un résonateur annulaire. Le stack occupant 10% du volume du résonateur est composé de 7 plaques. Seule la partie supérieure du résonateur est modélisée.

La figure (4.10) montre aussi l'effet du volume du stack sur l'amplitude des vitesses d'écoulement. Le volume occupé par les couches limites viscothermiques croît avec l'augmentation de la longueur du stack. Il s'ensuit une augmentation de l'amplitude de la force dans le stack, contribuant davantage à l'excitation d'un écoulement unidirectionnel (comparer les courbes 0-3 de la figure 4.10.a à leur correspondantes de la figure 4.10.b). L'augmentation de la langueur du stack induit aussi une croissance de la résistance hydrodynamique à l'écoulement unidirectionnel (comparer les courbes 3-29 de la figure 4.10.a à leur correspondantes de la figure 4.10.b).

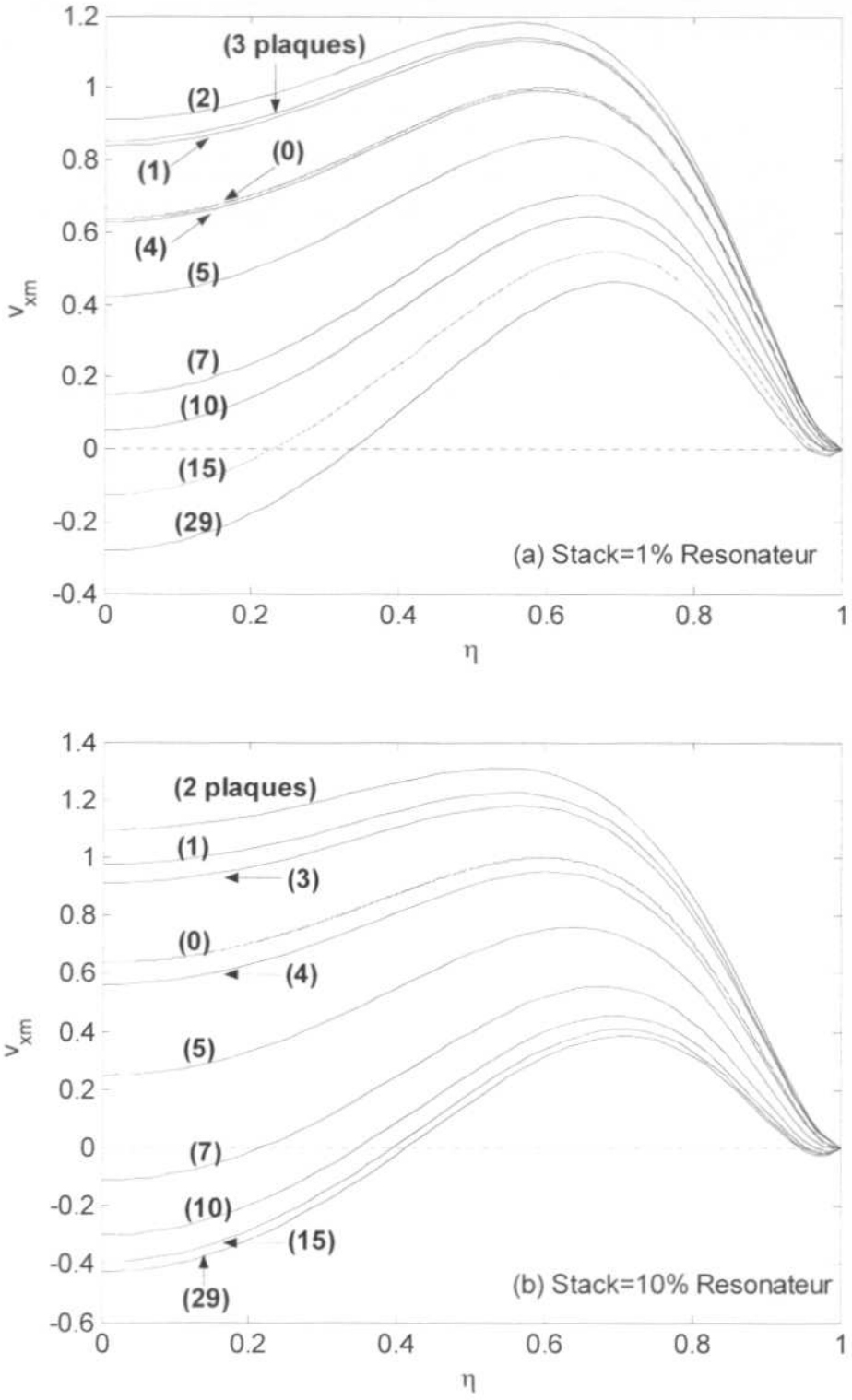


Fig. 4.10. Profils stationnaires des vitesses de l'écoulement redressé le long de la section transversale du guide d'onde au point (x = 0).

Les simulations numériques (voir figure 4.10) mettent en évidence un conflit entre deux phénomènes accompagnant l'augmentation du nombre de plaques ou de la longueur du stack.

Un volume occupé par les couches limites croissant avec n_p ou L_s tend à promouvoir un écoulement unidirectionnel à amplitude croissante. Mais par ailleurs, une résistance hydrodynamique du stack croissante avec n_p ou L_s transforme l'écoulement unidirectionnel en un écoulement bidirectionnel dont l'amplitude tend à décroître. Le nombre de plaques et la longueur du stack constituent des facteurs d'amortissement pour l'écoulement redressé (décroissance de l'amplitude).

La figure (4.11) montre une diminution du temps caractéristique adimensionnel θ_c (nécessaire à l'établissement de l'écoulement total moyen sur la section transversale du guide d'onde) avec le nombre de plaques ou la longueur du stack. L'écart entre les deux courbes (correspondant aux rapports du volume occupé par le stack $L_s / L = 1\%$ et $L_s / L = 10\%$) croît avec n_p. La décroissance de θ_c avec n_p ou L_s est due à l'augmentation de la résistance hydrodynamique du stack.

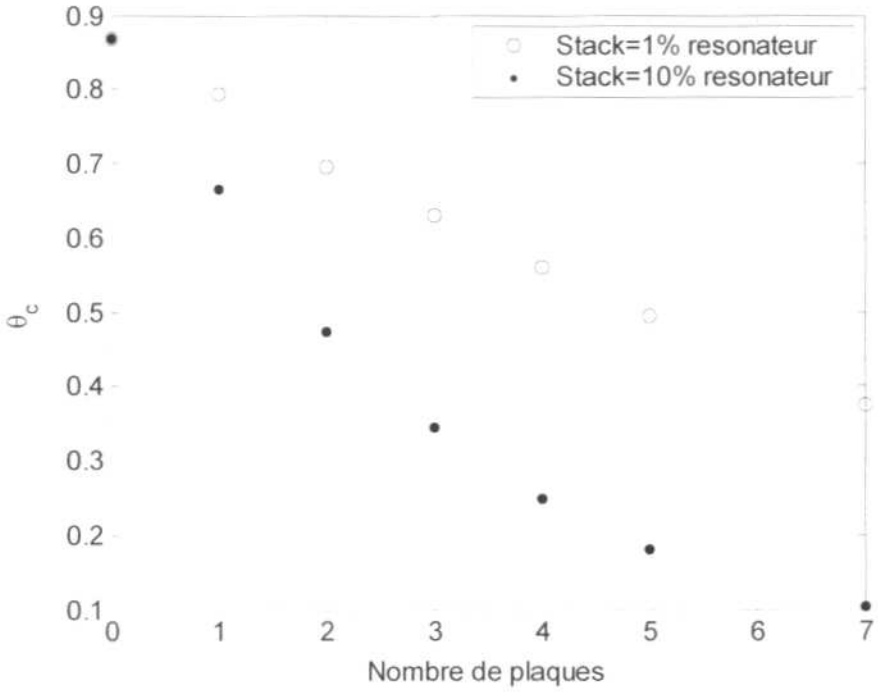


Fig. 4.11. Evolution du temps caractéristique adimensionnel (θ_c) en fonction du nombre de plaques et de la longueur du stack.

Il a été montré analytiquement (chapitres 3 et 4) et numériquement (paragraphe 4.2) que le temps caractéristique d'établissement de l'écoulement redressé dans un résonateur annulaire de diamètre D équivaut approximativement $\tau_c = D^2 / \pi^2 \nu_0$ pour des régimes

d'interaction onde / paroi éloignés du régime critique. En conséquence, le développement de l'écoulement redressé dans un résonateur annulaire dénué de toute installation supplémentaire est décrit qualitativement par l'équation,

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \frac{\bar{u}_x}{\tau_c} = \frac{\bar{u}_{max}}{\tau_c} \quad , \tag{4.7}$$

où $\bar{u}_x$ désigne la vitesse axiale moyenne de l'écoulement redressé le long de la section transversale du conduit et $\bar{u}_{max}$ est la vitesse moyenne stationnaire ($\bar{u}_{max} = \bar{u}_x(t = \infty)$). Les vitesses $\bar{u}_{max}$ sont calculées au préalable pour différents diamètres du guide d'onde. L'installation du stack dans le résonateur annulaire induit une inhomogénéité de la vitesse moyenne le long de l'axe des x à laquelle est associée un gradient de pression non nul ($dp/dx \neq 0$). L'écoulement redressé est par suite décrit par les équations,

$$\frac{\partial \bar{u}_x^w}{\partial t} + \frac{\bar{u}_x^w}{\tau_c^w} = \frac{\bar{u}_{max}^w}{\tau_c^w} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \quad , \tag{4.8}$$

dans les régions ($0 \le x < (L - L_s)/2$) et ($(L + L_s)/2 < x \le L$) du guide d'onde, et

$$\frac{\partial \bar{u}_x^s}{\partial t} + \frac{\bar{u}_x^s}{\tau_c^s} = \frac{\bar{u}_{max}^s}{\tau_c^s} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \quad , \tag{4.9}$$

dans le stack ($(L - L_s)/2 \le x \le (L + L_s)/2$). L'intégration des équations (4.8) et (4.9) le long de l'axe des x conduit à l'équation,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(1 - \frac{L_s}{L}\right)\bar{u}_x^w + \left(\frac{L_s}{L}\right)\bar{u}_x^s\right\} + \left(1 - \frac{L_s}{L}\right)\frac{\bar{u}_x^w}{\tau_c^w} + \left(\frac{L_s}{L}\right)\frac{\bar{u}_x^s}{\tau_c^s} = \left(1 - \frac{L_s}{L}\right)\frac{\bar{u}_{max}^w}{\tau_c^w} + \left(\frac{L_s}{L}\right)\frac{\bar{u}_{max}^s}{\tau_c^s}, \tag{4.10}$$

compte tenu de la continuité du champ de pression aux interfaces stack / guide d'onde. La continuité du flux de masse traversant ces interfaces permet d'écrire,

$$\rho\bar{u}_x^w + <\rho_1 v_{1x}>^w = \rho\bar{u}_x^s + <\rho_1 v_{1x}>^s \quad . \tag{4.11}$$

La substitution de l'expression de $\bar{u}_x^s$ obtenue à partir de (4.11) dans (4.10), conduit à une équation décrivant globalement l'écoulement redressé dans le résonateur équipé du stack en fonction de sa vitesse moyenne $\bar{u}_x^w$,

$$\frac{\partial \bar{u}_x^w}{\partial t} + \left(\left(1 - \frac{L_s}{L}\right)\frac{1}{\tau_c^w} + \left(\frac{L_s}{L}\right)\frac{1}{\tau_c^s}\right)\bar{u}_x^w = \left(1 - \frac{L_s}{L}\right)\frac{\bar{u}_{max}^w}{\tau_c^w} + \left(\frac{L_s}{L}\right)\frac{\bar{u}_{max}^s}{\tau_c^s} - \left(\frac{L_s}{L}\right)\frac{1}{\tau_c^s}\frac{<\rho_1 v_{1x}>^w - <\rho_1 v_{1x}>^s}{\rho} \quad , \tag{4.12}$$

compte tenu de $\partial(<\rho_1 v_{1x}>^w)/\partial t = \partial(<\rho_1 v_{1x}>^s)/\partial t = 0$ (champ acoustique supposé établi). D'après l'équation (4.12), le temps caractéristique global de l'établissement de l'écoulement redressé τ_c^{ws} est donné par la relation,

$$\frac{1}{\tau_c^{ws}} = \left(1 - \frac{L_s}{L}\right)\frac{1}{\tau_c^{w}} + \left(\frac{L_s}{L}\right)\frac{1}{\tau_c^{s}} \quad . \tag{4.13}$$

Les temps caractéristiques correspondant au stack et aux régions restantes du guide d'onde sont données respectivement par $\tau_c^s = D_s^2/\pi^2\nu_0$ et $\tau_c^w = D^2/\pi^2\nu_0$. En considérant la relation (4.6), le temps caractéristique adimensionnel global $\theta_c^{ws} = \tau_c^{ws}/\tau_c^w$ est exprimé en fonction du nombre de plaques (n_p) et du volume relatif occupé par le stack (L_s/L),

$$\theta_c^{ws} = \left(\left(1 - \frac{L_s}{L}\right) + \left(\frac{L_s}{L}\right)(n_p + 1)^2\right)^{-1} \quad . \tag{4.14}$$

L'évolution de θ_c^{ws} en fonction de n_p et (L_s/L) (voir figure 4.12) est qualitativement similaire à celle du temps caractéristique adimensionnel θ_c de l'écoulement redressé moyen à la section transversale ($x = 0$) (voir figure 4.11). L'écart important entre les courbes respectives des figures 4.11 et 4.12 est dû aux effets de bord du stack.

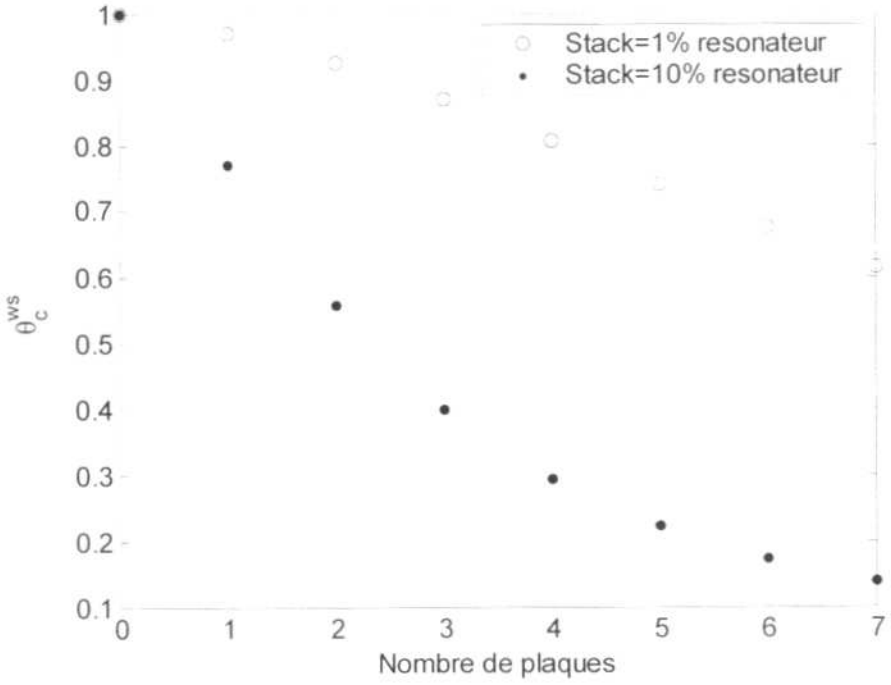


Fig. 4.12. Evolution du temps caractéristique adimensionnel global (θ_c^{ws}) en fonction du nombre de plaques et de la longueur du stack.

4.4 Conclusion

La formulation de l'écoulement redressé dans les résonateurs annulaires est adaptée à une résolution numérique puisque les solutions analytiques du chapitre 3 sont accessibles par calcul numérique. Le procédé d'excitation de l'écoulement redressé en présence d'un champ acoustique est le seul couplage pris en compte dans le chapitre 4. Il serait intéressant de considérer aussi les couplages des phénomènes physiques propres aux machines thermoacoustiques annulaires.

Une simulation complète des écoulements redressés dans les machines thermoacoustiques annulaires supposerait de compléter le modèle numérique présenté dans ce chapitre. Une implémentation, dans le code numérique utilisé, des contraintes de Reynolds sous leur forme la plus générale serait nécessaire. Ceci reviendrait à considérer un gradient de température le long du stack et à son voisinage ainsi qu'un champ acoustique différent d'une région à l'autre du résonateur. Si, de plus, l'interaction du champ acoustique avec l'écoulement redressé (via la convection thermique entre les régions de différentes températures) est à considérer, un modèle numérique non linéaire implémentant le développement et la saturation des ondes acoustiques sera nécessaire.

Conclusions et perspectives

Ce travail porte sur les écoulements redressés excités par des processus non linéaires dans les couches limites viscothermiques des résonateurs annulaires, en présence d'ondes progressives et stationnaires. Une formulation générale de ces écoulements est proposée, à partir de la variable de vitesse de transport de masse, adaptée à décrire les différents couplages entre *champ acoustique*, *écoulement redressé* et *distribution de température*, typiques des machines thermoacoustiques. Ce travail a permis, entre autres, d'étudier la génération d'ondes progressives dans les guides d'ondes annulaires en disposant des sources excitatrices sur leurs parois. Les deux dispositions considérées de sources excitatrices correspondent à l'acoustitron et au résonateur de Ceperley. Ce procédé d'excitation des ondes progressives permet de s'affranchir d'une utilisation de l'instabilité thermoacoustique liée au chauffage inhomogène d'un stack.

Les résonateurs annulaires sont développés en des géométries droites suite à des diamètres de leurs sections transversales faibles devant leurs longueurs. Ce rapport de forme permet l'adoption de l'approximation couche limite. L'intensité acoustique d'une onde propagative pure est constante le long de l'axe du guide d'onde. L'équation des écoulements redressés résultant de ces simplifications est résolue analytiquement en termes de séries de Fourier. Ce modèle analytique montre l'influence de l'interaction *onde / paroi* sur les amplitudes stationnaires et les profils transitoires des vitesses des écoulements redressés.

En régime stationnaire et en moyenne sur une section transversale du guide d'onde, les contraintes de Reynolds, issues des termes advectif et de contraintes visqueuses dans les équations de Navier-Stokes, excitent des écoulements redressés partiels respectivement dans le sens de propagation de l'onde acoustique et dans le sens opposé à ce dernier. La contribution de la contrainte convective est prépondérante pour des régimes d'interaction entre l'onde et la paroi allant du quasi-adiabatique modéré (pour l'acoustitron et le résonateur de Ceperley) au quasi-isotherme (pour l'acoustitron). Pour cette gamme de régimes de fonctionnement, la vitesse de l'écoulement redressé total (issu des contributions conjuguées

des contraintes suscitées) est positive (sens de propagation de l'onde acoustique). Mais en allant vers des régimes de fonctionnement quasi-adiabatiques aigus, la contrainte visqueuse devient prépondérante ; l'écoulement total s'annule et change de signe en un point (épaisseur relative de la couche limite) dit régime critique. Pour des épaisseurs relatives de la couche limite inférieures à celle du régime critique, le profil de l'écoulement redressé total le long de la section transversale du guide d'ondes est bidirectionnel.

Le temps caractéristique de stabilisation des moyennes en section des écoulements partiels croît modérément en allant du régime quasi-adiabatique au régime quasi-isotherme tout en ayant des valeurs de l'ordre de grandeur de $\tau_c = D^2 / \pi^2 \nu_0$. L'évolution du temps caractéristique de la moyenne en section de l'écoulement total est globalement la même que celle des écoulements partiels mis à part au voisinage du régime critique. Ainsi, le temps caractéristique du processus de développement et de saturation des instabilités thermoacoustiques est inférieur, pour certains régimes de fonctionnement, au temps caractéristique d'établissement de l'écoulement redressé. Il s'ensuit que l'écoulement redressé ne peut être considéré de façon générale comme étant quasi-stationnaire dans la modélisation des machines thermoacoustique annulaires. L'utilisation d'une formulation couplant l'évolution transitoire de l'écoulement redressé et de l'amplitude de l'onde acoustique s'avère donc nécessaire. Les équations générales des écoulements redressés établies au premier chapitre semblent être très appropriées pour un tel couplage.

La théorie développée pour la génération d'ondes progressives à amplitude constante ainsi que pour la modélisation analytique des écoulements redressés dans les guides d'ondes annulaires, peut être utilisée dans sa forme actuelle en micromécanique des fluides. En effet, dans le cas particulier de l'acoustitron, l'augmentation de l'amplitude de la vitesse de l'écoulement redressé total en allant vers des régimes de fonctionnement quasi-isothermes, promeut l'utilisation de cette théorie dans la propulsion ou le pompage dans les micro canaux.

Un modèle numérique est par ailleurs conçu pour la simulation des écoulements redressés transitoires en présence de composants thermoacoustiques (stack, échangeurs de chaleur, etc.) dans l'acoustitron ou le résonateur de Ceperley. Ce modèle consistant en l'intégration des contraintes de Reynolds dans un code numérique de Mécanique des fluides incompressibles, est validé par rapport aux résultats obtenus pour l'acoustitron. Une simulation via ce modèle, de l'écoulement redressé dans un résonateur de Ceperley équipé d'un stack fin en présence d'une onde progressive, a montré l'influence du nombre de plaques et de la longueur du stack sur l'amplitude de la vitesse de l'écoulement redressé et sur le

temps caractéristique de stabilisation de ce dernier. Une augmentation du nombre de plaques ou de la longueur du stack s'accompagne d'une croissance, et du volume occupé par les couches limites viscothermiques et de l'amplitude des forces volumiques issues des contraintes de Reynolds, dans la partie du résonateur occupée par le stack. Il s'ensuit que pour une section du résonateur considérée suffisamment loin du stack, la vitesse moyenne (en section) de l'écoulement redressé excité a tendance à croître. Néanmoins, en atteignant un certain nombre de plaques ou une certaine longueur du stack, la vitesse moyenne de l'écoulement redressé commence à décroître suite une augmentation accrue de la résistance hydrodynamique du stack. Le temps caractéristique de stabilisation de l'écoulement redressé à tendance à diminuer avec le nombre de plaques ou la longueur du stack. Les profils stationnaires des vitesses d'écoulement mettent en évidence l'apparition d'un vortex au voisinage de la paroi, puis d'un second vortex au voisinage de l'axe du résonateur, pour des valeurs importantes de ces deux paramètres. Ces vortex sont révélateurs du passage de la configuration initiale d'un écoulement redressé dans un résonateur toroïdal à celle d'un écoulement dans un résonateur fermé. Il serait toutefois intéressant d'étendre ce modèle à la simulation des écoulements redressés dans des configurations plus proches des machines thermoacoustiques annulaires, par exemple en tenant compte d'un gradient de température le long du stack.

Annexe A

Contraintes adimensionnelles de Reynolds

Le champ de pression d'une onde acoustique progressive dans le sens positif des x ayant pour nombre d'onde k_p et une amplitude p_a se présente sous la forme,

$$\widetilde{p} = p_a e^{ik_p x} \quad , \tag{A1}$$

Les contraintes de Reynolds dans un résonateur annulaire pour le champ acoustique (A1) se réduisent à deux composantes,

$$\sigma_1 = \frac{|p_a|^2}{4\omega^2\rho_0}\frac{k_p\delta_\nu}{C_\nu}\left\{(C_\nu - A_\nu + B_\nu)\left(\frac{k_p^2\phi_\nu}{C_\nu} + \frac{(\gamma-1)k_0^2}{\sqrt{\sigma}}\frac{\phi_k}{C_k}\right) + \right.$$
$$\left. + (C_\nu - A_\nu - B_\nu)\left(\frac{k_p^2\psi_\nu}{C_\nu} + \frac{(\gamma-1)k_0^2}{\sqrt{\sigma}}\frac{\psi_k}{C_k}\right) + \eta B_\nu \frac{(k_0^2 - k_p^2)}{(\delta_\nu / D)}\right\} \quad , \tag{A2}$$

$$\sigma_2 = -\beta(\gamma-1)\frac{|p_a|^2}{2D\rho_0 a_0^2}\frac{k_p\delta_\nu^2}{C_\nu C_k}\left((C_k - A_k)\frac{\partial A_\nu}{\partial\eta} - B_k\frac{\partial B_\nu}{\partial\eta}\right) \quad . \tag{A3}$$

Les fonctions $A_{\nu,k}$, $B_{\nu,k}$, $C_{\nu,k}$, $\phi_{\nu,k}$ et $\psi_{\nu,k}$ dépendent de la coordonnée transversale adimensionnelle η et du régime d'interaction onde / paroi via le paramètre $D_{\nu,k} = 1/(2(\delta_{\nu,k}/D))$,

$$A_{\nu,k} = (e^{D_{\nu,k}(3+\eta)} + e^{D_{\nu,k}(1-\eta)})\cos(D_{\nu,k}(1-\eta)) + (e^{D_{\nu,k}(1+\eta)} + e^{D_{\nu,k}(3-\eta)})\cos(D_{\nu,k}(1+\eta)) \quad ,$$

$$B_{\nu,k} = (e^{D_{\nu,k}(3+\eta)} - e^{D_{\nu,k}(1-\eta)})\sin(D_{\nu,k}(1-\eta)) - (e^{D_{\nu,k}(1+\eta)} - e^{D_{\nu,k}(3-\eta)})\sin(D_{\nu,k}(1+\eta)) \quad ,$$

$$C_{\nu,k} = 1 + e^{4D_{\nu,k}} + 2\,e^{2D_{\nu,k}}\cos(2D_{\nu,k}) \quad ,$$

$$\phi_{\nu,k} = (e^{D_{\nu,k}(3+\eta)} - e^{D_{\nu,k}(1-\eta)})\cos(D_{\nu,k}(1-\eta)) + (e^{D_{\nu,k}(1+\eta)} - e^{D_{\nu,k}(3-\eta)})\cos(D_{\nu,k}(1+\eta)) \quad ,$$

$$\psi_{\nu,k} = (e^{D_{\nu,k}(3+\eta)} + e^{D_{\nu,k}(1-\eta)})\sin(D_{\nu,k}(1-\eta)) - (e^{D_{\nu,k}(1+\eta)} + e^{D_{\nu,k}(3-\eta)})\sin(D_{\nu,k}(1+\eta)) \quad .$$

Pour l'acoustitron, le nombre d'onde k_p dans l'équation (A1) est substitué par le nombre d'onde k_a relatif au champ de pression (2.23). L'amplitude de pression p_a est remplacée par son expression relative à sa valeur maximale (2.27). En conséquence, les contraintes de Reynolds (A2) et (A3) sont réécrites sous la forme,

$$\sigma_1^a = \frac{1}{4}\left(\frac{Da_0}{\nu_0}\right)\frac{k_{aN}}{\Omega C_\nu}\left(\frac{\delta_\nu}{D}\right)^3\left\{(C_\nu - A_\nu + B_\nu)\left(\frac{k_{aN}^2\phi_\nu}{C_\nu} + \frac{(\gamma-1)}{\sqrt{\sigma}}\frac{\phi_k}{C_k}\right) + \right.$$
$$\left. + (C_\nu - A_\nu - B_\nu)\left(\frac{k_{aN}^2\psi_\nu}{C_\nu} + \frac{(\gamma-1)}{\sqrt{\sigma}}\frac{\psi_k}{C_k}\right) + \eta B_\nu \frac{(1-k_{aN}^2)}{(\delta_\nu/D)}\right\} , \quad (A4)$$

$$\sigma_2^a = -\frac{\beta(\gamma-1)}{2}\left(\frac{Da_0}{\nu_0}\right)\frac{k_{aN}}{\Omega C_\nu C_k}\left(\frac{\delta_\nu}{D}\right)^4\left((C_k - A_k)\frac{\partial A_\nu}{\partial\eta} - B_k\frac{\partial B_\nu}{\partial\eta}\right) , \quad (A5)$$

où $k_{aN} = \frac{k_a}{k_0} = \left(Re\left(\frac{1+(\gamma-1)f_k}{1-f_\nu}\right)\right)^{1/2}$ et $\Omega = |(1-f_\nu)k_{RN}k_{IN}|^2$.

Pour le résonateur de Ceperley, le nombre d'onde k_p dans l'équation (A1) est substitué par le nombre d'onde k_R relatif au champ de pression (2.56). L'amplitude de pression p_a est remplacée par son expression relative à sa valeur maximale (2.57). En conséquence, les contraintes de Reynolds (A2) et (A3) sont réécrites sous la forme,

$$\sigma_1^a = \left(\frac{\nu_0}{(\pi c)^2 Da_0}\right)\left(\frac{d}{D}\right)^2\frac{k_{RN}}{C_\nu}\frac{1}{(\delta_\nu/D)^3}\left\{(C_\nu - A_\nu + B_\nu)\left(\frac{k_{RN}^2\phi_\nu}{C_\nu} + \frac{(\gamma-1)}{\sqrt{\sigma}}\frac{\phi_k}{C_k}\right) + \right.$$
$$\left. + (C_\nu - A_\nu - B_\nu)\left(\frac{k_{RN}^2\psi_\nu}{C_\nu} + \frac{(\gamma-1)}{\sqrt{\sigma}}\frac{\psi_k}{C_k}\right) + \eta B_\nu \frac{(1-k_{RN}^2)}{(\delta_\nu/D)}\right\} , \quad (A6)$$

$$\sigma_2^a = -2\beta(\gamma-1)\left(\frac{\nu_0}{(\pi c)^2 Da_0}\right)\left(\frac{d}{D}\right)^2\frac{k_{RN}}{C_\nu C_k}\frac{1}{(\delta_\nu/D)^2}\left((C_k - A_k)\frac{\partial A_\nu}{\partial\eta} - B_k\frac{\partial B_\nu}{\partial\eta}\right) . \quad (A7)$$

Références bibliographiques

[1] J. W. Strutt (Lord Rayleigh). *The Theory of Sound (Vol. 2)*. Dover, New York, 1945.

[2] W. L. Nyborg. Acoustic Streaming. In *Nonlinear Acoustics, edited by M. F. Hamilton and D. T. Blackstock,* Vol. 2, Part B, pages 207-231, Academic, San Diego, 1998.

[3] O. V. Rudenko and S. I. Soluyan. *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics.* Consultants Bureau, New York, 1977.

[4] D. Gedeon. DC gas flows in Stirling and pulse-tube cryocoolers. In *Cryocoolers, edited by R. G. Ross*, Vol. 9, pages 385-392, Plenum, New York, 1997.

[5] W. L. Nyborg. Acoustic Streaming. In *Physical Acoustics, edited by W. P. Mason,* Vol. 2, Part B, pages 265-331, Academic, New York, 1965.

[6] P. J. Westervelt. The theory of steady rotational flow generated by a sound field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 25 (1): 60-67, 1953.

[7] W. L. Nyborg. Acoustic Streaming near a boundary. *J. Acoust. Soc. Am.*, 30 (4): 329-339, 1958.

[8] L. K. Zarembo. Acoustic Streaming. In *High-Intensity Ultrasonic Fields, edited by L. D. Rozenberg,* Part III, pages 156-164, Plenum, New York, 1971.

[9] N. Rott. The influence of heat conduction on acoustic streaming. *J. Appl. Math. Phys.* (ZAMP), 25/ 417-421, 1974.

[10] Q. Qi. The effect of compressibility on acoustic streaming near a rigid boundary for a plane traveling wave. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94 (2): Pt. 1, 1091-1098, 1993.

[11] Q. Qi, R. E. Johnson, and J. G. Harris. Boundary layer attenuation and acoustic streaming accompanying plane-wave propagation in a tube. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97 (3): 1499-1509, 1995.

[12] G. W. Swift. Thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84: 1145-1180, 1988.

[13] B. L. Minner, L. Mongeau, and J. E. Braun. Optimization of thermoacoustic engine design variables for maximum performance. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98 (5): 2961-2962, 1995.

[14] S. L. Garrett. Resource letter: TA-1: Thermoacoustic engines and refrigerators. *Am. J. Phys.*, 72 (1): 11-17, 2004.

[15] G. Smith, R. Raspet, and H. Bass. Streaming in thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 106 (4): Pt. 2, 2265, 1999.

[16] G. W. Swift. Streaming in thermoacoustic engines. *Am. Inst. Phys*, Conference Proceedings, 524 (1): 105-114, 2000.

[17] J. R. Olson and G. W. Swift. Acoustic streaming in pulse tube refrigerators: Tapered pulse tubes. *Cryogenics*, 37: 769-776, 1997.

[18] G. W. Swift, D. L. Gardner, and S. Backhaus. Acoustic recovery of lost power in pulse tube refrigerators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105: 711-724, 1999.

[19] S. Backhaus and G. W. Swift. An acoustic streaming instability in thermoacoustic devices utilizing jet pumps. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113 (3): 1317-1324, 2003.

[20] R. Waxler. Stationary velocity and pressure gradients in a Thermoacoustic stack. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109 (6): 2739-2750, 2001.

[21] H. Bailliet, V. Gusev, R. Raspet, and R. A. Hiller. Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108: 934-945, 2000.

[22] M. F. Hamilton, Y. A. Ilinskii, and E. A Zabolotskaya. Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113 (1): 153-160, 2003.

[23] M. F. Hamilton, Y. A. Ilinskii, and E. A Zabolotskaya. Thermal effect on acoustic streaming in standing waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114 (6): Pt. 1, 3092-3101, 2003.

[24] G. Mozurkewich. Heat transport by acoustic streaming within a cylindrical resonator. *Applied Acoustics*, 63: 713-735, 2002.

[25] V. Gusev, S. Job, H. Bailliet, P. Lotton, and M. Bruneau. Acoustic streaming in an annular thermoacoustic prime-movers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108: 934-945, 2000.

[26] S. Job, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Acoustic streaming measurements in annular thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113 (4): Pt. 1, 1892-1899 (2003).

[27] S. Backhaus and G. W. Swift. A thermoacoustic Stirling heat engine: Detailed study. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107 (6): 3148-3166, 2000.

[28] D. L. Gardner and G. W. Swift. A cascade thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114 (4): 1905-1919, 2003.

[29] B. R. Lutz, J. Chen, and D. T. Schwartz. Microfluidics without microfabrication. *P. N. A. S.*, 100 (8): 4395-4399, 2003.

[30] K. D. Frampton, S. E. Martin, and K. Minor. The scaling of acoustic streaming for application in micro-fluidic devices. *Applied Acoustics*, 64: 681-692 (2003).

[31] J. C. Rife, M. I. Bell, J. S. Horwitz, M. N. Kabler, R. C. Y. Auyeung, and W. J. Kim. Miniature valveless ultrasonic pumps and mixers. *Sensors and Actuators*, 86: 135-140, 2000.

[32] N. T. Nguyen and R. M. White. Design and optimization of an ultrasonic flexural plate wave micropump using numerical simulation. *Sensors and Actuators*, 77: 229-236, 1999.

[33] N. T. Nguyen, A. H. Meng, J. Black and R. M. White. Integrated flow sensor for in situ measurement and control of acoustic streaming in flexural plate wave micropumps. *Sensors and Actuators*, 79: 115-121, 2000.

[34] O. V. Rudenko and A. A. Sukhorukov. Nonstationary Eckart streaming and pumping of liquid in an ultrasonic field. *Acoust. Phys.*, 44: 565-570, 1998.

[35] S. Job. Etudes théoriques et expérimentales d'un générateur thermoacoustique annulaire à ondes progressives. *Thèse de Doctorat de l'Université du Maine*, Spécialité Acoustique, octobre 2001.

[36] G. Penelet, E. Gaviot, V. Gusev, P. Lotton, M. Bruneau, Experimental investigation of transient nonlinear phenomena in an annular thermoacoustic prime-mover: observation of a double-threshold effect. *Cryogenics*, 42: 527-532, 2002.

[37] P. H. Ceperley. Gain and efficiency of a short traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77: 1239-1244, 1985.

[38] T. Yazaki, A. Iwata, T. Maekawa, and A. Tominaga. Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube. *Phys. Rev. Lett.*, 81: 3128-3132, 1998.

[39] T. Yazaki, T. Biwa, and A. Tominaga. A pistonless Stirling cooler. *Applied Physics Letters*, 80 (1): 157-159, 2002.

[40] O. G. Symko, E. Abdel-Rahman, Y. S. Kwon, M. Emmi, and R. Behunin. Design and developement of high-frequency thermoacoustic engines for thermal management in microelectronics. *Microelectronics Journal*, 35: 185-191, 2004.

[41] C. C. Lawrenson, L. D. Lafleur, and F. D. Shields. The solution for propagation of sound in a toroidal waveguide with driven walls (the acoustitron). *J. Acoust. Soc. Am.*, 103: 1253-1260, 1998.

[42] P. H. Ceperley and A. Koren. Observation of single-point excitation and shocking of rotating acoustic waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91 (4): Pt. 2, 2331, 1992.

[43] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary Layer Theory*. Springer, Berlin, 2000.

[44] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon, Oxford, 1982.

[45] M. Bruneau. *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermès, Paris, 1998.

[46] R. K. Zeytounian. *Mécanique des fluides fondamentale*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[47] P. H. Ceperley. Split mode travelling wave ring-resonator. *United States Patent*, N° 4, 686, 407, Aug. 11, 1987.

[48] S. J. Lighthill. Acoustic streaming. *J. Sound and Vibration*, 61 (3): 391-418, 1978.

[49] L. Menguy and J. Gilbert. Nonlinear acoustic streaming accompanying a plane stationary wave in a guide. *Acta. Acustica*, 86: 249-259, 2000.

[50] P. M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1968.

[51] R. M. Moroney, R. M. White and R. T. Howe. Microtransport induced by ultrasonic Lamb waves. *Applied Physics Letters*, 59 (7): 774-776, 1991.

[52] L. Petit et P. Gondret. Redressement d'un écoulement alternatif. *J. Phys.*, 2 : 2115-2144, 1992.

[53] M. F. Hamilton, Y. A. Ilinskii, and E. A. Zabolotskaya. Nonlinear two-dimensional model for thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* 111 (5): Pt. 1, 2076-2086, 2002.

[54] M. F. Hamilton, Y. A. Ilinskii, and E. A. Zabolotskaya. Simulation of acoustic streaming inside and surrounding thermoacoustic stacks. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112 (5): Pt. 2, 2297, 2002.

[55] P. Stansell and C. A. Greated. Lattice gas automaton simulation of acoustic streaming in a two-dimensional pipe. *Phys. Fluids*, 9 (11): 3288-3299, 1997.

[56] U. Frisch, B. Hasslacher, and Y. Pomeau. Lattice gas automata for the Navier-Stokes equation. *Phys. Rev. Lett.*, 56: 1505, 1986.

[57] D. Haydock and J. M. Yeomans. Lattice Boltzmann simulation of acoustic streaming. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 34: 5201-5213, 2001.

[58] P. Lallemand and L. S. Luo. Theory of the lattice Boltzmann method: Acoustic and thermal properties in two and three dimensions. *Phys. Rev. E*, 68, 036706: 1-25, 2003.

[59] Fluent 6.0, Applied computational fluid dynamics. *Fluent Inc.*, Lebanon, USA, 2001.

Etude des écoulements redressés en régime transitoire dans des résonateurs annulaires à ondes progressives et stationnaires

Résumé : Ce travail porte sur les écoulements redressés excités par des processus non linéaires dans les couches limites viscothermiques des résonateurs annulaires, en présence d'ondes progressives et stationnaires. Des équations générales sont établies pour ces écoulements à partir de la variable de vitesse de transport de masse, adaptée à décrire les différents couplages entre *champ acoustique*, *écoulement redressé* et *distribution de température*, typiques des machines thermoacoustiques.

Le résonateur annulaire est développé en une géométrie droite équivalente suite à un diamètre de sa section transversale faible devant sa longueur. Ce rapport de forme permet l'adoption de l'approximation couche limite. L'intensité acoustique d'une onde progressive pure est constante le long de l'axe du guide d'onde. L'équation des écoulements redressés résultant de ces simplifications est résolue analytiquement en termes de séries de Fourier. Ce modèle analytique montre l'influence de l'*interaction onde / paroi* sur les amplitudes stationnaires et les profils transitoires des vitesses d'écoulements. La transition d'un régime d'interaction quasi-isotherme à un régime quasi-adiabatique aigu donne lieu à des profils de vitesses stationnaires bidirectionnels, y compris dans le cas d'une simple onde progressive. L'évolution temporelle de l'écoulement redressé moyenné sur une section transversale du guide d'onde devient non monotone en passant par un régime d'écoulement impulsionnel. La dépendance de l'écoulement redressé transitoire moyen envers les effets de couche limite montre des temps caractéristiques de stabilisation de l'écoulement du même ordre de grandeur que les temps de développement et de saturation des instabilités thermoacoustiques.

Un modèle numérique est développé pour le calcul des écoulements redressés dans les machines thermoacoustiques annulaires. La géométrie droite équivalente au résonateur annulaire, les conditions aux limites d'adhérence aux parois, la condition de symétrie par rapport à l'axe du conduit, les conditions initiales et la condition de périodicité de pression spécifique aux tores constituent les paramètres d'entrée d'un code numérique de mécanique des fluides semi-ouvert. Les forces excitatrices issues de l'*interaction onde / paroi* sont implémentées dans ce code, via des fonctions externes écrites en langage C. Ce modèle est validé par rapport aux résultats analytiques obtenus pour l'acoustitron. Le calcul de l'écoulement redressé, dans un résonateur de Ceperley équipé d'un stack fin, en présence d'une onde progressive, constitue une première application aux machines thermoacoustiques annulaires. L'influence du nombre de plaques et le volume de stack sur la distribution spatiale et l'évolution temporelle de l'écoulement redressé est étudiée. Le modèle numérique montre des temps caractéristiques de stabilisation de la moyenne spatiale de l'écoulement décroissants avec ces deux paramètres.

Mots clés : acoustique non linéaire, écoulement redressé, couche limite viscothermique, thermoacoustique, résonateur annulaire, acoustitron, résonateur de Ceperley, temps caractéristique, stabilisation de l'écoulement, modélisation.

Transient acoustic streamings studied in annular resonators containing travelling and standing waves

Abstract : The transient acoustic streamings excited in annular resonators due to nonlinear processes in viscothermal boundary layers are studied. Both propagative and standing acoustic fields are considered. These streamings are described by general equations established on the basis of the mass transport velocity more adapted to take into account the couplings between the *acoustic field*, the *acoustic streaming* and the *temperature distribution* in thermoacoustic devices.

The annular resonator width is weak compared to its length. Consequently, the resonator toroidal geometry is replaced by an equivalent straight one and the boundary layer approximation is adopted. The acoustic intensity of a purely propagative wave is constant along the resonator axis. The acoustic streamings equation following from these simplifications is solved analytically using Fourier series expansions. This analytical model highlights the dependence of the stationary amplitudes and the transient profiles of the acoustic streaming velocities on the *wave / wall interaction*. The transition from a quasi-isothermal interaction regime to a deep quasi-adiabatic one leads to bidirectional stationary velocity profiles even though the acoustic wave is simply propagative. The temporal behaviour of the acoustic streaming averaged along the waveguide cross section becomes non monotone including a pulse streaming regime. The established dependence of the transient averaged acoustic streaming on the boundary layer effects predicts streaming stabilisation characteristic times of the same order as the development and saturation thermoacoustic instabilities.

A numerical model is developed in order to compute the acoustic streamings in thermoacoustic devices. The straight geometry equivalent to the annular resonator, the wall adherence boundary conditions, the waveguide axial symmetry condition, the initial conditions and the pressure periodicity specific to toroidal resonators constitute the data input for a semi-opened numerical code of fluid mechanics. The excitation forces generated due to the *wave / wall interaction* are incorporated into this code via external functions written in C language. The numerical results provided for an acoustitron are in a good agreement with the analytical ones. In a first application of the validated model to annular thermoacoustic devices, the acoustic streaming is computed for a purely propagative wave sustained in a Ceperley resonator equipped with a short stack. The spatial and temporal dependencies of the acoustic streamings on the plates number and the stack volume are studied. The model shows characteristic stabilisation times of the cross-sectional averaged streaming decreasing with these parameters.

Keywords : nonlinear acoustics, acoustic streaming, viscothermal boundary layer, thermoacoustics, annular resonator, acoustitron, Ceperley resonator, characteristic time, streaming stabilisation, modelling.