Académie de Nantes

Thèse de doctorat de l'université du Maine

Spécialité : Acoustique

présentée par

Alain Le Duff

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

Contribution à l'estimation paramétrique de signaux à variation sinusoïdale de la fréquence instantanée et à amplitude variable : application à l'anémométrie laser Doppler pour l'acoustique

---

Soutenue le 16 juillet 2003 devant le jury composé de :

Y. Deville	Professeur, Université Paul Sabatier, Toulouse, *Examinateur*
B. Gazengel	Maître de Conférences, Université du Maine, Le Mans, *Examinateur*
P. Millan	Directeur de recherche, ONERA, Toulouse, *Rapporteur*
G. Plantier	Enseignant-chercheur, ESEO, Angers, *Co-directeur de thèse*
M.L. Riethmuller	Professeur, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Belgique, *Rapporteur*
J.C. Valière	Professeur, Université de Poitiers, *Directeur de thèse*

Remerciements

J'exprime mes plus vifs remerciements à ceux qui, par leur soutien amical et leur collaboration efficace, m'ont aidé à mener ce projet jusqu'à son terme :

Aux membres du laboratoire d'acoustique de l'université du Maine qui a accueilli ce travail de thèse : M. Sohbi Sahraoui, Bruno Gazengel, Sylvain Poggi et Guy Tournois.

Aux rapporteurs de ce document et aux membres du jury, M. M.L. Riethmuller, M. Pierre Millan et M. Yannick Deville.

À Jean-Christophe Valière, patient directeur de thèse.

À tous mes collègues de l'ESEO et en particulier à mon ami Guy Plantier.

Enfin à Marie-Laure, Hélène, Pierre et Louise...

Résumé

L'anémométrie laser à effet Doppler (ALD), dont l'utilisation est très répandue en mécanique des fluides, peut aussi être utilisée pour la mesure de vitesse particulaire acoustique. La nature vectorielle de cette grandeur permet de caractériser les champs à structure complexe ce qui autorise, par exemple, l'étude de phénomènes acoustiques au voisinage de parois vibrantes ou de discontinuités géométriques. L'ALD offre, pour ce type de problème, le double avantage de présenter une bonne résolution spatiale de la mesure et de ne perturber que faiblement le champ à explorer.

Le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) est équipé d'un banc de mesure conçu pour la mesure de vitesse acoustique. Depuis près de huit ans, les recherches se sont orientées vers la validation expérimentale de cette technique ainsi que vers l'élaboration de méthodes de traitement des signaux propres à extraire la vitesse particulaire dans un contexte de traitement différé et avec l'hypothèse d'un signal Doppler d'amplitude constante. Cependant, pour que l'ALD soit exploitable efficacement il est indispensable de concevoir un système de mesure, simple d'utilisation, permettant d'accéder rapidement à la vitesse acoustique et prenant en compte la nature variable de l'amplitude du signal Doppler.

L'objectif de cette étude est donc de proposer des méthodes de traitement du signal adaptées à l'estimation de la vitesse particulaire acoustique, dans le cas d'une excitation sinusoïdale, et de définir une architecture matérielle et logicielle indispensable à cette mesure. Celle-ci s'opère à partir des composantes en phase et en quadrature du signal Doppler ramenées en bande de base à l'aide d'un dispositif de démodulation analogique spécialement développé pour cette application. Trois estimateurs sont alors proposés : le premier est basé sur le calcul de la dérivée de la phase du signal Doppler. Sa principale vocation consiste à initialiser une deuxième méthode d'estimation basée sur la recherche du maximum de vraisemblance. Le filtrage de Kalman étendu constitue la troisième méthode explorée. Enfin, les formes analytiques, approchées mais précises, des bornes de Cramer-Rao montrent l'influence des paramètres du problème sur la qualité des estimations. Par la suite, des simulations statistiques de Monte-Carlo permettent d'évaluer la qualité des trois méthodes. Une estimation sommaire des complexités algorithmiques des estimateurs complète également cette phase d'évaluation.

Enfin, la validation expérimentale des techniques d'estimation s'articule autour de deux expériences. Dans un premier temps, la mesure de la vitesse de déplacement sinusoïdale d'une pointe d'aiguille montée dans un pot vibrant permet de confronter les résultats obtenus par ALD à ceux que donne un vibromètre laser. Dans un second temps, la mesure de vitesses particulaires acoustiques rayonnées par un haut-parleur électrodynamique, est proposée. Les valeurs issues de la mesure en champ libre par ALD sont alors comparées à celles des vitesses de référence obtenues à l'aide de la méthode du doublet microphonique.

Mots clés : Anémométrie laser Doppler, vitesse particulaire acoustique, maximum de vraisemblance, filtre de Kalman étendu, borne de Cramer-Rao, fréquence instantanée, démodulation en quadrature, détection synchrone, mesure, instrumentation.

Abstract

Laser Doppler Anemometry (LDA), which is widely used in fluid mechanics, can also be used in order to measure acoustic particle velocity. The knowledge of this vector quantity could be especially useful to characterize a complex acoustic field, allowing for example the study of phenomena close to vibrating surfaces or around duct discontinuities. In addition, LDA ensures, for this kind of problem, theoretically non-invasive velocity measurements with an excellent spatial resolution.

The *Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine* (LAUM) is equipped with a system designed for acoustic velocity measurement. For nearly eight years, research has been directed towards the experimental assessment of this technique and the development of signal processing methods based on post-processing techniques, with the assumption of a constant amplitude Doppler signal. However, in order to design a more integrated set-up, furthermore easy to manipulate, it is essential to design a system providing real-time measurements of acoustic velocity and taking into account the varying amplitude of the Doppler signal.

This research work offers signal processing methods adapted to the estimation of acoustic particle velocity, for a sine-wave excitation, and defines hardware and software architectures suited to this measurement. The latter is performed with the help of the in-phase and the quadrature components of the Doppler signal, which is downshifted thanks to an analog quadrature demodulation technique especially designed for this application. Three estimators are then proposed: the first is based on the Doppler phase derivation, and is the starting point of a second method based on maximum likelihood estimation. The extended Kalman filter is the third method explored . Finally , the approximated, though accurate, analytical forms of the Cramer-Rao bounds show the influence of the parameters on the quality of the estimations. Estimator performance is then illustrated by means of statistical Monte-Carlo simulations. An assessment of the complexity of these algorithms also supplements this evaluation.

Finally, the assessment of the estimation technique is obtained thanks to two experiments. Firstly, the measurement of the sinusoidal velocity of the displacement of a needle assembled in a vibration exciter allows the comparison of the results obtained by LDA with those obtained with a laser vibrometer. Then, the measurement of the acoustic particle velocity field radiated by a loudspeaker, is proposed. The measurements obtained in free field by LDA are then compared with the reference velocities obtained using a sound intensity probe. .

Keywords: Laser Doppler Anemometry, acoustic particle velocity, Maximum Likelihood Estimator, Extended Kalman Filter, Cramer-Rao Bounds, Instantaneous Frequency, quadrature demodulation, lock-in detection, measurement, instrumentation.

Notations

$A(t)$	amplitude du signal Doppler
b	biais d'estimation
K	amplitude maximum du signal Doppler
c_l	célérité de la lumière dans le vide ; $c_l = 3.10^8$ m/s
c	célérité du son dans l'air ; $c \approx 345$ m/s
Ct	coût algorithmique en *flops*
$\mathrm{CRB}(V_{\mathrm{ac}})$	borne de Cramer-Rao pour l'amplitude de la vitesse acoustique
$\mathrm{CRB}(V_{\mathrm{ec}})$	borne de Cramer-Rao pour la vitesse d'écoulement
$\mathrm{CRB}(\phi_{\mathrm{ac}})$	borne de Cramer-Rao pour la phase de la vitesse acoustique
D	sensibilité du dispositif ALD ; $D = 2\sin(\theta/2)/\lambda_{\mathrm{L}}$ en kHz/m/s
D_l	diamètre du faisceau laser avant focalisation
D_{L}	dimension caractéristique du faisceau laser
D_f	diamètre des faisceaux laser dans la zone de focalisation
D_x,D_y,D_z	dimensions du volume de mesure dans les directions x,y,z
f	distance focale des lentilles
f_{ac}	fréquence acoustique réduite
F_{ac}	fréquence du signal acoustique
F_{B}	fréquence de Bragg
F_{d}	fréquence Doppler due à une seule source laser
F_{D}	fréquence Doppler
F_{e}	fréquence d'échantillonnage ; $F_{\mathrm{e}} = 1/T_{\mathrm{e}}$
F_{exc}	fréquence du signal d'excitation du pot vibrant
$F_i(t)$	fréquence instantanée du signal Doppler
F_{L}	fréquence de l'onde optique ; $F_{\mathrm{L}} = c_l/\lambda_{\mathrm{L}}$
F_{S}	fréquence du signal Doppler haute-fréquence
$\mathcal{F}$	transformée de Fourier
L_p	niveau de pression acoustique en dB
i	interfrange, facteur de conversion fréquence-vitesse ou facteur de calibration ; $i = \lambda_{\mathrm{L}}/2\sin(\theta/2)$ en m
M	composante continue traduisant l'existence d'un piédestal
n_{it}	nombre d'itérations nécessaire à la convergence de l'algorithme d'optimisation
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	désigne un processus gaussien de moyenne μ et de variance σ^2
P_{ac}	pression acoustique
P_{ref}	pression acoustique de référence (seuil d'audibilité) ; $P_{\mathrm{ref}} = 20$ μPa
$s(t)$	signal Doppler
t_0	instant de passage de la particule au centre du volume de mesure
T_{e}	période d'échantillonnage ; $T_{\mathrm{e}} = 1/F_{\mathrm{e}}$
$\vec{V}$	*vecteur vitesse* de la particule
V_{ac}	amplitude de la vitesse acoustique
V_{ec}	vitesse d'écoulement
V_x	projection du *vecteur vitesse* de la particule sur l'axe x
X_{ac}	amplitude des déplacements de la particule dus à l'excitation acoustique ; $X_{\mathrm{ac}} = V_{\mathrm{ac}}/2\pi F_{\mathrm{ac}}$

$v(t)$	vitesse particulaire
α	taux de modulation du signal Doppler ; $\alpha = DV_{\mathrm{ac}}/F_{\mathrm{ac}}$
β	inverse de la demi-dimension du volume de mesure dans la direction x $\beta = 2/D_x$ en m^{-1}
θ	angle entre les deux directions d'émission laser
$\boldsymbol{\theta}$	vecteur des paramètres à estimer
λ_{L}	longueur d'onde optique ; $\lambda_{\mathrm{L}} = c_l/F_{\mathrm{L}}$
ϕ_{ac}	phase de la vitesse acoustique en rd
$\phi(t)$	phase instantanée du signal Doppler en rd
ϕ_0	phase initiale du signal Doppler en rd
ρ	masse volumique du milieu de propagation en $\mathrm{kg/m}^3$
σ_p^2	variance du bruit électronique du photo-multiplicateur
$(\cdot)$	produit scalaire de vecteurs
$\|\cdot\|$	désigne la norme sur $\mathbb{R}^{N+1}$
$.^T$	opérateur de transposition des matrices
$*$	produit de convolution
$\widehat{\mathtt{x}}$	estimation du paramètre $\mathtt{x}$

Abréviations

ALD	Anémométrie Laser à effet Doppler
AMLE	Approximate Maximum Likelihood Estimator *estimateur par maximum de vraisemblance simplifié*
AR	Auto-Régressif
AsGa	Arsenure de Gallium
BSA	Burst Spectrum Analyser
CAN	Convertisseur Analogique Numérique
CMS	Composant Monté en Surface
CRB	Cramer-Rao Bounds - *bornes de Cramer-Rao*
DdP	Densité de Probabilité
DEA	Diplôme d'Études Approfondies
DSP	Digital Signal Processing - *traitement numérique du signal*
DSQ	Démodulateur Synchrone en Quadrature
DTFS	Détecteur Temps-Fréquence Synchrone
DWV	Distribution de Wigner-Ville
DWVC	Distribution de Wigner-Ville Croisée
DWVG	Distribution de Wigner-Ville Généralisée
DWVP	Distribution de Wigner-Ville Polynomiale
EDP	Estimateur de Différence de Phase
EKF	Extended Kalman Filter - *filtre de Kalman étendu*
ELMQ	Estimation Linéaire en Moyenne Quadratique
ESEO	École Supérieure d'Électronique de l'Ouest
FFT	Fast Fourier Transform - *transformé de Fourier rapide*
FI	Fréquence Instantanée
FIM	Fisher Information Matrice - *matrice d'information de Fisher*
flops	FLoating OPeration - *opération à virgule flottante*
FIR	Finite Impulse Response - *réponse impulsionnelle finie*
FM	Frequency Modulation - *modulation de fréquence*
GBF	Générateur Basse-Fréquence
HF	Haute-Fréquence
HP	Haut-Parleur
LAUM	Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine
LDA	Laser Doppler Anemometry - *anémométrie laser à effet Doppler*
LED	Light Emitting Diode - *diode électroluminescente*
MCMC	Méthodes de Monte-Carlo par Chaîne de Markov
MLE	Maximum Likelihood Estimator - *estimateur par maximum de vraisemblance*
PC	Personnal Computer
PDBE	Phase Derivative-Based Estimator - *Estimateur basé sur la dérivée de la phase*
PDWV	Pics de la Distribution de Wigner-Ville
PLL	Phase Locked Loop - *boucle à verrouillage de phase*
PM	Photomultiplicateur
RIF	Réponse Impulsionnelle Finie
RSB	Rapport Signal sur Bruit

RSB_{dB}	Rapport Signal sur Bruit exprimé en dB
SPL	Sound Pressure Level - *niveau de pression acoustique*
TF	Transformée de Fourier
TFCT	Transformée de Fourier à Court Terme
TTL	Transistor Transistor Logic
VCO	Voltage Controlled Oscillator - *oscillateur contrôlé en tension*
VLD	Vélocimétrie Laser à effet Doppler

Sommaire

1 Introduction **1**

2 Mesure de vitesse par Anémométrie Laser à effet Doppler **3**
2.1 Introduction . . . 3
2.2 Principes de l'ALD . . . 3
2.2.1 Fréquence Doppler . . . 3
2.2.2 Modèle du signal Doppler . . . 7
2.2.3 Détermination du signe de la vitesse . . . 10
2.2.4 Synthèse . . . 11
2.3 Application de l'ALD à l'acoustique . . . 12
2.3.1 Introduction . . . 12
2.3.2 Spécificités des vitesses acoustiques . . . 12
2.3.3 Modèle du signal Doppler en régime sinusoïdal . . . 12
2.3.4 Bruits de mesure . . . 14
2.3.5 Spectre en amplitude et largeur de bande du signal Doppler . . . 14
2.4 Étude bibliographique . . . 16
2.4.1 Introduction . . . 16
2.4.2 Méthodes non-paramétriques . . . 17
2.4.3 Méthodes paramétriques . . . 21
2.4.4 Détection en ALD . . . 22
2.4.5 Aspects technologiques . . . 23
2.5 Contexte de l'étude . . . 25
2.5.1 État d'avancement de l'ALD au LAUM . . . 25
2.5.2 Objectifs du travail . . . 26
2.5.3 Condition d'utilisation de l'ALD . . . 26
2.6 Orientations choisies et originalité du travail . . . 28
2.6.1 Utilisation de méthodes paramétriques . . . 28
2.6.2 Prise en compte de l'amplitude variable . . . 29
2.6.3 Translation du signal en bande de base . . . 30
2.6.4 Utilisation d'une boucle à verrouillage de phase . . . 33
2.7 Conclusion . . . 34

3 Estimation des paramètres de la vitesse acoustique **35**
3.1 Introduction . . . 35
3.2 Approche probabiliste de l'estimation . . . 36
3.2.1 Approche bayésienne . . . 36
3.2.2 Estimateur par maximum de vraisemblance . . . 36
3.2.3 Méthode des moindres carrés . . . 37

3.3 Bornes de Cramer-Rao . . . 37
3.3.1 Fonction de vraisemblance . . . 38
3.3.2 Matrice de Fisher . . . 39
3.3.3 Matrice de Fisher approchée . . . 40
3.3.4 Influence des paramètres de l'acquisition du signal sur les CRB . . . 40
3.3.5 Formes analytiques approchées des bornes de Cramer-Rao . . . 42
3.4 Estimation utilisant la dérivée de la phase . . . 43
3.4.1 Estimation de la vitesse particulaire acoustique . . . 43
3.4.2 Estimation des paramètres de la vitesse acoustique . . . 46
3.5 Estimation par maximum de vraisemblance . . . 47
3.5.1 Principe de la méthode . . . 47
3.5.2 Détermination numérique du MLE . . . 48
3.5.3 Limite de la méthode . . . 50
3.6 Notion de processus gaussien-markovien . . . 50
3.6.1 Représentation dans l'espace d'état . . . 50
3.6.2 Estimation bayésienne des états d'un processus gaussien-markovien . . . 52
3.7 Estimation par filtrage de Kalman . . . 53
3.7.1 Principe du filtrage de Kalman . . . 54
3.7.2 Objectif du filtrage de Kalman . . . 55
3.7.3 Algorithme général de filtrage de Kalman récursif . . . 56
3.8 Estimation par filtre de Kalman étendus . . . 59
3.8.1 Principe de la méthode . . . 59
3.8.2 Algorithme général de l'EKF . . . 60
3.8.3 Modélisation du signal Doppler dans l'espace d'état . . . 61
3.8.4 Application du filtre de Kalman étendu à l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique . . . 63
3.9 Estimation de l'instant correspondant à la valeur maximale du signal Doppler . 70
3.10 Conclusions . . . 72

4 Performances des estimateurs **73**
4.1 Introduction . . . 73
4.2 Comparaison des performances des estimateurs avec les bornes de Cramer-Rao . 73
4.2.1 Propriétés d'un estimateur . . . 73
4.2.2 Étude des performances des estimateurs . . . 74
4.2.3 Commentaire . . . 78
4.3 Évaluation des coûts calculatoires . . . 79
4.3.1 Coût calculatoire de l'estimateur PDBE . . . 79
4.3.2 Coût calculatoire de l'estimateur MLE . . . 80
4.3.3 Coût calculatoire de l'estimateur EKF . . . 80
4.3.4 Commentaire . . . 80
4.4 Conclusions . . . 81

5 Validation expérimentale des mesures par ALD **83**
5.1 Introduction . . . 83
5.2 Description du dispositif expérimental . . . 83
5.2.1 Dispositif optique . . . 84
5.2.2 Dispositif électronique et de traitement du signal . . . 86
5.3 Procédure de calibration du démodulateur en quadrature . . . 88

5.3.1 Formulation du problème . . . 88
5.3.2 Écriture des équations d'observation . . . 89
5.3.3 Fonction de vraisemblance logarithmique . . . 90
5.3.4 Procédure de correction des signaux d'observation . . . 91
5.4 Mesure avec pot vibrant . . . 92
5.4.1 Présentation du dispositif . . . 92
5.4.2 Obtention de vitesses de référence . . . 92
5.4.3 Comparaison des résultats de mesure obtenus par ALD et par vibrométrie laser . . . 94
5.4.4 Conclusions . . . 96
5.5 Mesure de la vitesse particulaire acoustique rayonnée par un haut-parleur . . . 97
5.5.1 Introduction . . . 97
5.5.2 Présentation du dispositif . . . 97
5.5.3 Obtention des vitesses de références . . . 98
5.5.4 Calibration des microphones . . . 98
5.6 Résultats expérimentaux . . . 100
5.6.1 Protocole de mesure . . . 100
5.6.2 Résultats . . . 101
5.7 Conclusions . . . 104

6 Conclusions et perspectives 105

Annexes 115

A Calcul des bornes de Cramer-Rao 117
A.1 Description des signaux d'observation . . . 117
A.2 Calcul des bornes de Cramer-Rao . . . 117
A.2.1 Représentation vectorielle des signaux d'observation . . . 117
A.2.2 Regroupement des vecteurs d'observation . . . 118
A.2.3 Vecteur des paramètres du signal d'observation . . . 118
A.2.4 Fonction de densité de probabilité (DdP) du signal d'observation . . . 118
A.2.5 Fonction de vraisemblance logarithmique . . . 119
A.2.6 Matrice de Fisher . . . 119
A.3 Calcul approché des bornes de Cramer-Rao . . . 123
A.3.1 Matrice de Fisher approchée . . . 123
A.3.2 Formes analytiques approchées des bornes de Cramer-Rao pour la vitesse acoustique : CRB(θ_1) . . . 124
A.3.3 Formes analytiques approchées des bornes de Cramer-Rao pour la phase acoustique : CRB(θ_2) . . . 125
A.3.4 Formes analytiques approchées des bornes de Cramer-Rao pour la vitesse d'écoulement : CRB(θ_3) . . . 126
A.3.5 Expressions des bornes de Cramer-Rao en dB . . . 126
A.4 Comparaison des bornes de Cramer-Rao réelles et approchées . . . 127

B Article présenté au congrès IMtc'2001 129

C Performances des estimateurs 135
C.1 Biais des estimateurs . . . 135
C.2 Variance des estimateurs . . . 141

D Calibration des signaux issus du démodulateur en quadrature **147**
D.1 Introduction 147
D.2 Description des signaux d'observation 147
D.3 Nouvelle écriture des équations d'observation 148
D.3.1 Vecteur des paramètres du signal d'observation 148
D.3.2 Fonction de densité de probabilité (DdP) du signal d'observation 149
D.3.3 Fonction de vraisemblance logarithmique 149
D.3.4 Cas particulier où le signal enregistré contient un nombre entier de périodes 153
D.3.5 Cas général où le nombre d'échantillons ne correspond pas à un nombre entier de période 154

Chapitre 1

Introduction

La description d'un champ acoustique nécessite généralement de connaître à la fois la pression, grandeur scalaire facilement accessible à la mesure, et la vitesse particulaire acoustique. La nature vectorielle de cette grandeur permet de caractériser les champs à structure complexe ce qui autorise, par exemple, l'étude de phénomènes acoustiques au voisinage de parois vibrantes, de membrane de haut-parleur ou de discontinuités géométriques.

Actuellement, les méthodes proposées par la métrologie des vitesses particulaires sont assez peu nombreuses. L'anémométrie à fil chaud, couramment utilisée pour mesurer des vitesses particulaires en présence d'un écoulement n'est pas vraiment adaptée à la mesure de vitesses purement acoustiques. En effet cette technique ne permet, ni de connaître le signe de la vitesse, ni d'accéder à sa phase. La vitesse particulaire acoustique peut aussi s'évaluer indirectement par la méthode du doublet microphonique dont le principe repose sur l'association de relevés de pressions et d'un modèle de propagation de l'onde acoustique. Cependant des problèmes d'étalonnage des microphones limitent la validité des mesures dans les hautes fréquences. De plus, ces deux techniques utilisent des capteurs encombrants dont la présence perturbe inévitablement le champ à explorer.

L'Anémométrie Laser à effet Doppler (ALD) est une technique faiblement invasive de mesure de champ de vitesse par interférométrie laser. Son principe est d'extraire la vitesse d'une particule d'ensemencement placée dans un fluide en mouvement et traversant un volume de mesure défini par deux faisceaux laser cohérents. L'utilisation de cette technique, fréquente en mécanique des fluides, reste en revanche peu étendue pour la mesure de vitesses acoustiques. L'ALD présente l'avantage de ne pas trop perturber le champ à mesurer car sa mise en œuvre ne nécessite pas d'introduire de sonde. De plus, les faibles dimensions du volume de mesure, de l'ordre du dixième de millimètre, autorisent une bonne résolution spatiale du champ acoustique à explorer.

Le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) est équipé d'un banc conçu pour la mesure de vitesse acoustique. Depuis près de huit ans, les recherches se sont orientées vers l'élaboration de méthodes de traitement des signaux propres à extraire la vitesse particulaire ainsi que vers la validation expérimentale de cette technique. Ces études, menées dans un contexte de traitement différé, mettent en œuvre, d'une part un matériel commercial, le Burst Spectrum Analyser (BSA) de la société Dantec, et d'autre part un dispositif d'acquisition et de traitement développé au laboratoire et spécifiquement adapté à l'acoustique. Les études déjà menées au laboratoire ont visé à valider le banc de mesure ALD ainsi qu'à proposer des méthodes de traitement du signal dans un contexte de traitement différé. Cependant, pour que cette technique soit exploitable efficacement il est indispensable de concevoir un système de mesure simple d'utilisation et permettant d'accéder rapidement à la vitesse acoustique.

L'objectif de cette étude est donc de proposer des algorithmes de traitement du signal adaptés à l'estimation en *temps-réel* de la vitesse particulaire acoustique et de concevoir une architecture matérielle et logicielle rapide indispensable à cette mesure. Ce travail doit, notamment, contribuer à doter le laboratoire d'un dispositif standard de mesure de vitesse acoustique, facilement utilisable dans les différentes applications qui font l'objet de recherches approfondies au LAUM.

Les principes généraux de l'ALD et l'application de cette technique à l'acoustique sont rappelés dans un premier chapitre. Après un bilan des principaux travaux menés dans ce domaine le contexte de l'étude et les orientations retenues pour la mesure de la vitesse sont ensuite précisés.

Le deuxième chapitre est consacré, quant à lui, à l'étude de méthodes paramétriques appliquées à la mesure de l'amplitude V_{ac} de la vitesse acoustique, de sa phase ϕ_{ac} et de la vitesse d'écoulement V_{ec}. Ces estimations s'opèrent à partir des composantes en phase et en quadrature du signal Doppler ramené en bande de base. Ce chapitre permet de proposer trois estimateurs : le premier, non-paramétrique, s'articulant autour du calcul de la dérivée de la phase du signal Doppler (Phase Derivative Based Estimator - PDBE), offre une mise en œuvre très simple. Sa principale vocation consiste à initialiser une seconde méthode d'estimation basée sur la recherche du maximum de vraisemblance (Maximum Likelihood Estimator - MLE). Le filtre de Kalman étendu (Extended Kalman Filter - EKF), dont le fonctionnement est particulièrement bien adapté à la résolution du problème de l'estimation de la vitesse particulaire acoustique, constitue la troisième méthode explorée. Enfin, les formes analytiques des bornes de Cramer-Rao (Cramer-Rao Bounds - CRB), donnant la limite inférieure des variances des estimées des paramètres de la vitesse acoustique, sont présentées.

Les résultats des évaluations des performances des estimateurs étudiés au cours de ce travail, ainsi que leur comparaison aux bornes de Cramer-Rao, font l'objet du chapitre trois. Des simulations statistiques de Monte-Carlo permettent d'évaluer la qualité des trois méthodes en terme de précision et de robustesse au bruit et permettent, par ailleurs, de fixer leurs limites de validité respectives. De plus, une estimation sommaire des complexités algorithmiques des estimateurs complète cette phase d'évaluation.

Enfin, le quatrième chapitre expose les travaux entrepris pour valider expérimentalement les mesures. Deux expériences sont alors mises en œuvre. Dans un premier temps, la mesure de la vitesse de déplacement sinusoïdale d'une pointe d'aiguille montée dans un pot vibrant permet de confronter les résultats obtenus par ALD à ceux que donnent un vibromètre laser. Dans un second temps, la mesure de vitesses particulaires acoustiques rayonnées par un haut-parleur électrodynamique monté dans une enceinte est proposée. Les valeurs issues de la mesure par ALD sont alors comparées à celles des vitesses de référence obtenues à l'aide de la méthode du doublet microphonique.

Chapitre 2

Mesure de vitesse par Anémométrie Laser à effet Doppler

2.1 Introduction

L'Anémométrie Laser à effet Doppler, ou LDA (Laser Doppler Anemometry) pour l'acronyme anglo-Saxon, est une technique permettant la mesure de vitesse de particule dans un fluide. Le principe de cette méthode, proposée dès 1964 par YEH et CUMMINGS [1], repose sur la mesure du décalage en fréquence entre la lumière émise par une source laser et celle que diffuse une particule d'ensemencement en mouvement dans le fluide et éclairée par la source lumineuse. La lumière diffusée est ensuite détectée par un photodétecteur. Ce décalage fréquentiel est assimilable à l'effet Doppler, phénomène découvert par Fizeau en 1948 dans le cas des ondes lumineuses. Son estimation permet alors de remonter à la vitesse, à condition toutefois que les caractéristiques des particules, chargées du traçage du fluide, répondent à une double exigence : elles doivent présenter des dimensions suffisamment importantes pour diffuser assez d'énergie lumineuse et être malgré tout légères afin de suivre fidèlement les mouvements du fluide étudié.

L'usage des dispositifs d'anémométrie laser est aujourd'hui très largement répandu pour la mesure de vitesses d'écoulement de natures très diverses : écoulements laminaires et turbulents, subsoniques et hypersoniques, à hautes températures, etc. Les travaux de Taylor [2] dans les années soixante-dix ont permis d'adapter ces techniques à la mesure de vitesse acoustique.

Ce chapitre expose, dans un premier temps, les principes de l'ALD ainsi que sa mise en œuvre dans le cas particulier de la mesure de vitesses particulaires acoustiques. Un état des lieu des traitements applicables au signal Doppler sont alors ensuite exposés. Enfin, le contexte et les objectifs de ce travail sont présentés et les orientations choisies décrites.

2.2 Principes de l'ALD

2.2.1 Fréquence Doppler

Un grand nombre de situations expérimentales implique le caractère ondulatoire de la lumière. Dès 1905 A. Einstein émet pourtant l'hypothèse que les phénomènes lumineux sont liés à l'existence de quantas de lumière, appelés encore *photons*. Cependant ce concept lui semblait laisser sans explications les phénomènes d'interférence et de diffraction et il en retira la conviction qu'une nouvelle description de la lumière, à la fois ondulatoire et corpusculaire, était

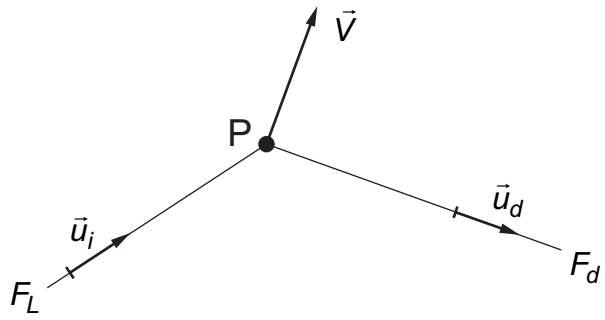

FIG. 2.1 – *Illustration du principe de l'effet Doppler: la particule* P *est éclairée par une onde monochromatique unique de fréquence* F_L *et de direction d'incidence* $\vec{u}_i$.

devenue indispensable [3]. Par la suite L. De Broglie tenta d'accorder ces deux aspects, ses travaux servant de base à la mécanique ondulatoire [4]. Ainsi la double nature, ondulatoire et corpusculaire, de la lumière incite naturellement à envisager deux approches pour décrire les principes physiques et les relations de base qui régissent le fonctionnement d'un anémomètre laser à effet Doppler :

- une approche ondulatoire permettant de considérer le signal Doppler comme la résultante d'un hétérodynage optique entre deux faisceaux réfléchis à des fréquences différentes et liées à l'effet Doppler;
- une approche corpusculaire prenant en compte l'effet quantique dans la formation du signal Doppler.

La première approche fait l'objet des lignes qui suivent, la seconde se contentant d'une évocation rapide.

Approche ondulatoire

Soit une particule P se déplaçant à la vitesse $\vec{V}$, illuminée par une source monochromatique cohérente de longueur d'onde λ_L et de direction d'incidence définie par le vecteur unitaire $\vec{u}_i$. La fréquence de la source est donnée par $F_\mathrm{L} = c_l/\lambda_\mathrm{L}$ relation dans laquelle c_l représente la célérité de la lumière dans le vide. Cette particule diffuse de la lumière dans toutes les directions de l'espace et en particulier vers le capteur optique (direction d'observation) dont l'orientation est définie par le vecteur unitaire $\vec{u}_\mathrm{D}$ comme le montre la figure 2.1. La fréquence F_d de la lumière reçue par le photodétecteur diffère très légèrement de la fréquence F_L émise par la source d'une quantité ΔF de telle façon que

$$F_\mathrm{d} = F_\mathrm{L} + \Delta F. \tag{2.1}$$

Il est possible de montrer [5] que si la vitesse de la particule est très petite devant la célérité de la lumière, c'est à dire si $\mid \vec{V} \mid \ll c_l$, la différence de fréquence peut s'écrire

$$\Delta F = F_\mathrm{d} - F_\mathrm{L} = \frac{1}{\lambda_\mathrm{L}}\, \vec{V} \cdot (\vec{u}_d - \vec{u}_i) \tag{2.2}$$

où $(\cdot)$ désigne le produit scalaire de vecteurs. Le décalage fréquentiel ΔF dépend donc de la vitesse de la particule ainsi que de la direction d'observation. En mécanique des fluides ΔF peut prendre des valeurs de l'ordre du Hz, pour des vitesses de convection naturelle par exemple, jusqu'à quelques MHz dans le cas de vitesses supersoniques. Or F_L est de l'ordre de 10^8 MHz ce qui rend problématique la mesure directe de ΔF. On est alors conduit à utiliser une technique

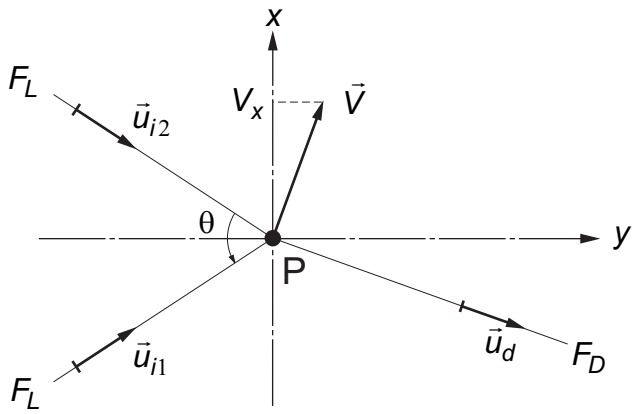

FIG. 2.2 – *Illustration du principe de l'effet Doppler : la particule* P *est éclairée par deux ondes monochromatiques de fréquence* F_L *et de direction d'incidence* $\vec{u}_{i1}$ *et* $\vec{u}_{i2}$.

d'hétérodynage optique. Cette méthode consiste à éclairer la particule avec deux ondes lumineuses de longueur d'onde identiques λ_L et d'incidences respectives $\overrightarrow{u_{i1}}$ et $\overrightarrow{u_{i2}}$ (figure 2.2). Les fréquences de la lumière diffusée par la particules dans la direction d'observation $\vec{u}_d$ deviennent

$$F_{d1} = F_\mathrm{L} + \frac{1}{\lambda_\mathrm{L}}\ \vec{V}\cdot(\vec{u}_d - \vec{u}_{i1}) \tag{2.3}$$

et

$$F_{d2} = F_\mathrm{L} + \frac{1}{\lambda_\mathrm{L}}\ \vec{V}\cdot(\vec{u}_d - \vec{u}_{i2}). \tag{2.4}$$

La superposition sur la surface du photodétecteur de ces deux ondes de fréquences très proches donne lieu à un phénomène de battement équivalent à une modulation de l'amplitude de l'intensité lumineuse. Cette intensité lumineuse présente alors une variation temporelle à la fréquence

$$F_\mathrm{D} = F_{d2} - F_{d1} = \frac{1}{\lambda_\mathrm{L}}\ \vec{V}\cdot(\vec{u}_{i1} - \vec{u}_{i2}). \tag{2.5}$$

Cette fréquence, appelé *fréquence Doppler*, peut encore s'écrire

$$F_\mathrm{D} = \frac{2\sin(\theta/2)}{\lambda_\mathrm{L}}\ V_x \tag{2.6}$$

relation dans laquelle θ est l'angle orienté entre les deux directions d'émission et V_x la projection du vecteur vitesse $\vec{V}$ sur l'axe x. Dès lors, il est possible de déterminer la vitesse de la particule à partir de la seule mesure de la fréquence Doppler à condition que les valeurs de θ et de λ_L soient connues avec précision. Un tel dispositif, en plus d'offrir une mesure linéaire, présente de nombreux avantages. En effet la fréquence Doppler est peu sensible aux paramètres autres que la vitesse. Par ailleurs comme F_D ne dépend pas de l'angle d'observation, la lumière diffusée peut être recueillie sur un angle solide important ce qui a pour conséquence, entre autre, d'améliorer le rapport signal sur bruit.

Une explication alternative et simplifiée du fonctionnement de l'ALD peut être encore proposée à partir d'une représentation géométrique du phénomène basée sur la notion de franges d'interférence. Ceci justifie d'ailleurs que l'arrangement optique décrit précédemment, exploitant le mode Doppler différentiel, soit parfois désigné par le terme de vélocimètre à franges.

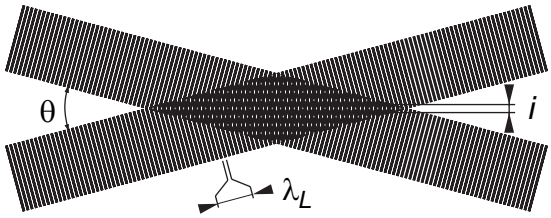

FIG. 2.3 – *Franges d'interférences - approche géométrique.*

Le croisement des deux faisceaux lasers cohérents définit un volume de mesure dans lequel apparaissent des motifs d'interférences. Ces interférences se manifestent par la présence de franges successivement sombres et brillantes, parallèles et équidistantes comme l'illustre la figure 2.3. La distance séparant deux franges sombres ou claires, appelée interfrange, est définie par

$$i = \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{2\sin(\theta/2)}. \tag{2.7}$$

Une particule d'ensemencement animée d'une vitesse constante $\vec{V}$ traversant ce réseau de franges diffuse de la lumière dont l'intensité varie à la fréquence Doppler

$$F_{\mathrm{D}} = \frac{V_x}{i} = \frac{2\sin(\theta/2)}{\lambda_{\mathrm{L}}}\, V_x \tag{2.8}$$

où V_x représente la projection du vecteur vitesse $\vec{V}$ sur l'axe x (figure 2.4). La vitesse de la particule se déduit alors de la fréquence F_{D} par l'expression

$$V_x = \frac{F_{\mathrm{D}}}{D}. \tag{2.9}$$

Dans cette relation D, l'inverse de l'interfrange, représente la sensibilité du dispositif ALD et s'écrit

$$D = \frac{2\sin(\theta/2)}{\lambda_{\mathrm{L}}}. \tag{2.10}$$

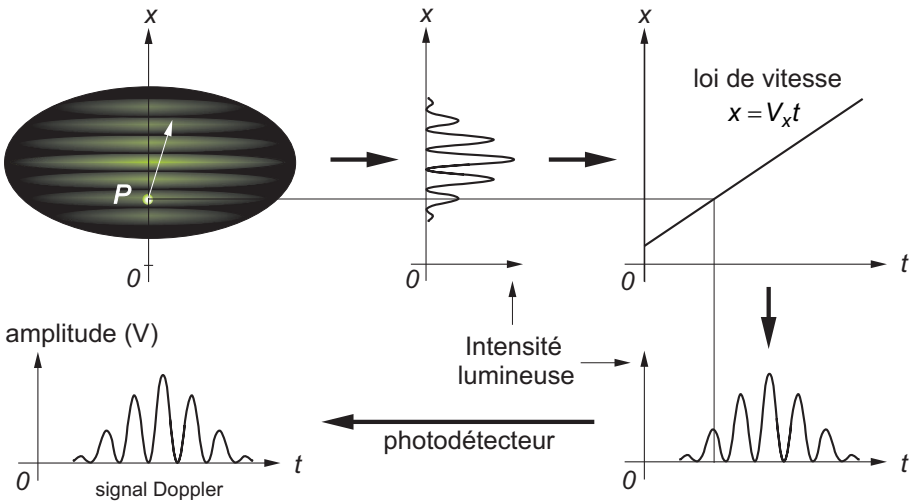

FIG. 2.4 – *Formation du signal Doppler dans le cas où la vitesse particulaire est constante.*

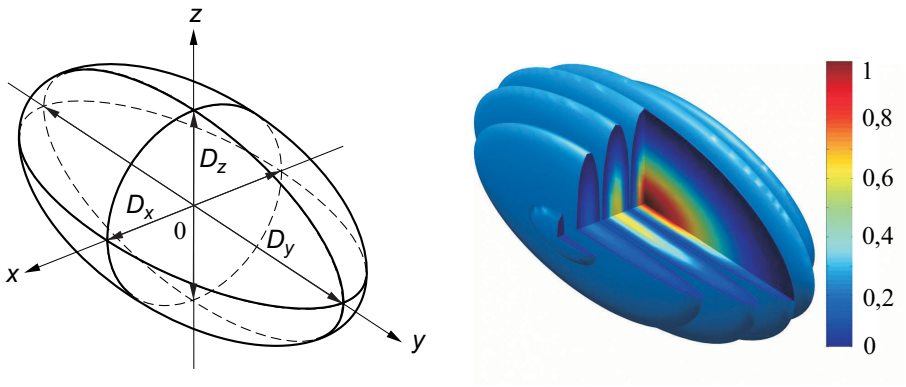

FIG. 2.5 – *Dimensions et formes du volume de mesure.*

Le facteur de conversion fréquence-vitesse, ou *facteur de calibration*, est alors donné par $i = 1/D$ et s'exprime en m.

Le volume de mesure prend, quant à lui, la forme d'un ellipsoïde de révolution à section circulaire [6] de dimensions

$$D_x = \frac{D_f}{\cos(\theta/2)} \ , \quad D_y = \frac{D_f}{\sin(\theta/2)} \quad \text{et} \quad D_z = D_f$$

selon chaque axe respectivement (figure 2.5). Ces valeurs sont établies en supposant que les deux faisceaux laser sont cylindriques, à profil gaussien, dans la zone de focalisation et présentent un diamètre

$$D_f = \frac{4 f \lambda_\mathrm{L}}{\pi D_l} \tag{2.11}$$

où f est la distance focale des lentilles d'émission des faisceaux et D_l le diamètre des faisceaux avant focalisation [7].

Approche corpusculaire

Une autre approche, décrite brièvement par GALTIER [8], permettant de mettre en évidence la formation du signal Doppler, consiste à prendre en compte l'aspect granulaire de la lumière. Dans ce cas le signal optique peut être vu comme la somme des contributions des photons réfléchis par la particule dans le volume de mesure et distribués temporellement par une loi de Poisson. La probabilité d'apparition des photons est alors proportionnelle à l'intensité lumineuse instantanée à l'entrée du photodétecteur. Le signal Doppler est enfin donné par le produit de convolution de ce signal photonique par la réponse impulsionnelle du photodétecteur [9].

2.2.2 Modèle du signal Doppler

Une source laser travaillant en mode fondamental transverse TEM_{00} émet un faisceau présentant une répartition radiale de l'intensité lumineuse de forme gaussienne dont le maximum, $E_{\mathrm{L_O}}$, se situe sur l'axe du faisceau :

$$E_\mathrm{L}(r) = E_{\mathrm{L_O}} \exp\left(-\frac{r^2}{D_\mathrm{L}^2}\right) . \tag{2.12}$$

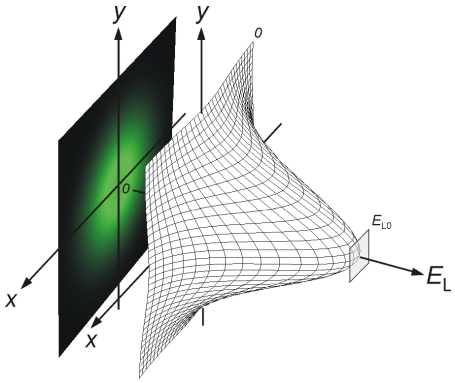

FIG. 2.6 – *Répartition radiale de l'intensité lumineuse dans un faisceau laser fonctionnent en mode* TEM_{00}.

Dans cette relation $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ représente la distance à l'axe Oz (figure 2.6) et D_L la dimension caractéristique du faisceau laser.

Le photodétecteur recueillant la lumière diffusée par la particule délivre alors un signal électrique, appelé *signal Doppler*, proportionnel à l'intensité lumineuse reçue. Ce signal Doppler, associé au passage d'une seule particule, dépend de la position $[x(t),y(t),z(t)]$ de la particule par rapport au volume de mesure et s'écrit [5]

$$s(t) = A(t)[M + \cos\phi(t)] \tag{2.13}$$

où

$$A(t) = K \exp\left\{ -\left[\frac{x(t)}{D_x/2}\right]^2 - \left[\frac{y(t)}{D_y/2}\right]^2 - \left[\frac{z(t)}{D_z/2}\right]^2 \right\} \tag{2.14}$$

représente l'amplitude, variable, du signal Doppler. La constante K dépend de la puissance de la source laser, de la sensibilité du photodétecteur, de la direction d'observation et du pouvoir diffusant de la particule. Le terme $\exp\left\{-[x(t)/D_x/2]^2 - [y(t)/D_y/2]^2 - [z(t)/D_z/2]^2\right\}$ rend compte de la variation de l'intensité lumineuse que rencontre la particule sur sa trajectoire. En s'intéressant uniquement à la projection de la vitesse de la particule sur l'axe x il peut être judicieux d'exprimer $A(t)$ par

$$A(t) = E(t) \exp\left\{ -\left[\frac{x(t)}{D_x/2}\right]^2 \right\} \tag{2.15}$$

avec

$$E(t) = K \exp\left\{ -\left[\frac{y(t)}{D_y/2}\right]^2 - \left[\frac{z(t)}{D_z/2}\right]^2 \right\}. \tag{2.16}$$

La position de la particule, donnée par $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, peut encore s'exprimer en fonction de la vitesse $\vec{V}$ de coordonnées $V_x(t)$, $V_y(t)$ et $V_z(t)$ grâce aux relations

$$x(t) = \int_0^t V_x(\tau)d\tau - x_0 \tag{2.17}$$

$$y(t) = \int_0^t V_y(\tau)d\tau - y_0 \tag{2.18}$$

$$z(t) = \int_0^t V_z(\tau)d\tau - z_0 \tag{2.19}$$

où x_0, y_0 et z_0 donnent la position de la particule à l'origine des temps, *i.e.* pour $t = 0$. L'amplitude $A(t)$ du signal Doppler dépend donc de la position initiale de la particule ainsi que de l'orientation de sa trajectoire donnée par les valeurs des projections du *vecteur vitesse* sur chacun des axes. En supposant que cette trajectoire est proche de l'axe x, perpendiculaire aux franges d'interférence, ce qui revient à considérer $V_x(t) \gg V_y(t)$ et $V_x(t) \gg V_z(t)$, alors l'équation (2.16) devient

$$E(t) = K \exp\left\{ -\left[\frac{y_0}{D_y/2}\right]^2 - \left[\frac{z_0}{D_z/2}\right]^2 \right\}. \tag{2.20}$$

Le terme $E(t)$ est alors constant et indépendant du temps. De plus $E(t)$ est inférieure ou égale à la constante K et agit alors comme un facteur supplémentaire venant atténuer l'amplitude du signal Doppler. Si, de plus, la particule passe par le centre du volume de mesure, cas de figure qui correspond à $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $E(t)$ devient constante et égale à K. L'amplitude $A(t)$ du signal Doppler ne dépend plus alors que de la position de la particule selon l'axe x et de la dimension du volume de mesure dans cette même direction. Cette configuration est souvent rencontrée lors de la mesure en présence d'écoulement suivant l'axe x [10]. Dès lors que l'orientation de la vitesse de la particule est quelconque, la modulation d'amplitude ne dépend plus uniquement de D_x et de $V_x(t)$ mais aussi de la trajectoire effective de la particule pendant la traversée du volume de mesure. Cependant l'évolution temporelle de $A(t)$ reste proche d'une gaussienne.

Par ailleurs la phase instantanée du signal est donnée par le terme

$$\phi(t) = 2\pi D x(t) + \phi_0 \tag{2.21}$$

où D est la sensibilité du dispositif et ϕ_0 la phase initiale. Compte tenu de la géométrie du volume de mesure cette phase est indépendante de la position de la particule selon y et z. Enfin le coefficient M traduit l'existence d'une composante basse-fréquence, $MA(t)$, du signal Doppler. Ce terme, appelé aussi *piédestal*, dépend de la différence d'intensité entre les deux faisceaux convergents. Ainsi, par exemple, dans le cas où les deux faisceaux présentent une même intensité, $M = 1$ et le contraste est maximum. Finalement, en tenant compte de l'équation (2.15) et en supposant que $E(t) = K$ l'expression (2.13) devient

$$s(t) = K \exp\left\{ -[\beta x(t)]^2 \right\} \left\{ M + \cos[2\pi D x(t) + \phi_0] \right\} \tag{2.22}$$

avec $\beta = 2/D_x$.

Dans l'hypothèse où la particule est animée d'une vitesse $\vec{V}$ constante, la position de la particule selon l'axe x, donnée par l'équation (2.17), s'écrit

$$x(t) = V_x t - x_0 \tag{2.23}$$

relation qui peut encore s'exprimer par

$$x(t) = V_x(t - t_0) \tag{2.24}$$

avec $t_0 = x_0/V_x$. Dans cette dernière expression t_0 désigne l'instant où la particule passe au centre du volume de mesure. L'équation (2.22) devient

$$s(t) = K \exp\left\{ -[\beta\ V_x(t - t_0)]^2 \right\} \left\{ M + \cos[2\pi D V_x(t - t_0) + \phi_0] \right\} \tag{2.25}$$

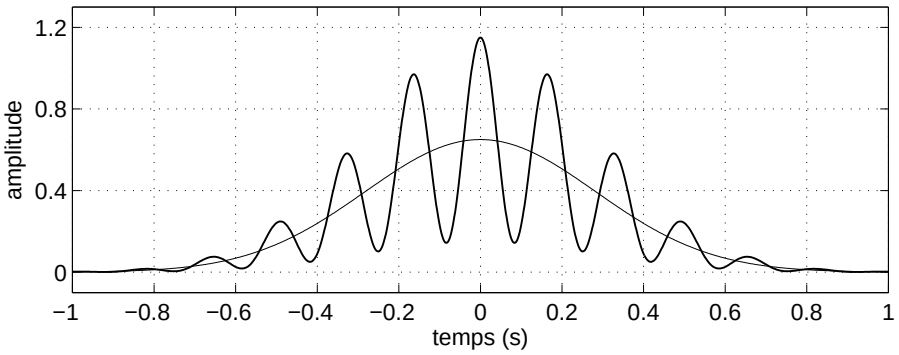

FIG. 2.7 – *Allure du signal Doppler* (-) *pour* $t_0 = 0$, $K = 0{,}5$, $M = 1{,}3$, $\beta = 250$ m^{-1}, $V_x = 10$ mm/s, $D = 600$ m^{-1} *et* $\phi_0 = 0$ *; piédestal* (-).

avec $2\pi DV_x(t-t_0) = 2\pi F_{\mathrm{D}}t$ (équation (2.9)). Le signal $s(t)$ prend alors la forme d'une sinusoïde de fréquence F_{D} modulée en amplitude par une fonction gaussienne comme l'illustre la figure 2.7. L'examen du signal décrit par l'équation (2.25) est fondamental pour la suite de l'étude. En effet, la pertinence et la précision du modèle choisi pour décrire $s(t)$ conditionnent les méthodes de traitement du signal mises en œuvre ainsi que la qualité des estimations de la vitesse. Il est important de noter qu'en particulier l'amplitude et la phase du signal Doppler sont déterministes et portent toutes deux l'information de vitesse particulaire. De plus $s(t)$ est symétrique par rapport à l'instant t_0 de passage de la particule au centre du volume de mesure. Compte-tenu des dimensions limitées du volume de mesure le signal est de durée finie, la largeur de son support temporel dépendant à la fois de la vitesse V_x de la particule et de la dimension D_x. Par ailleurs, étant donné le caractère aléatoire de l'instant de passage d'une particule dans le réseau de franges, $s(t)$ apparaît de façon discontinue et brève.

2.2.3 Détermination du signe de la vitesse

L'examen de la relation (2.25) montre qu'il est impossible de discriminer le signe de la vitesse V_x. En particulier, lorsque $\phi_0 = 0$, deux vitesses identiques en valeur absolue mais de signes opposés conduisent au même signal Doppler. Une solution à ce problème consiste à décaler en fréquence le signal Doppler ce qui peut s'obtenir en intercalant une cellule de Bragg sur le trajet de l'un des faisceaux laser. Ce dispositif acousto-optique, excité à une fréquence de 40 MHz, permet de modifier la longueur d'onde optique du faisceau correspondant et impose le défilement des franges d'interférence [11]. La fréquence du signal Doppler devient alors

$$F_{\mathrm{S}} = F_{\mathrm{B}} + F_{\mathrm{D}} = F_{\mathrm{B}} + DV_x. \tag{2.26}$$

Dans cette relation F_{B} désigne la fréquence de Bragg égale à 40 MHz. Ainsi, dans ce cas, une particule immobile dans le volume de mesure diffuse un signal optique sinusoïdal de fréquence 40 MHz alors qu'une particule en mouvement voit, quant à elle, sa vitesse se retrancher ou s'ajouter à la vitesse de défilement des franges. Le signal Doppler prend alors la forme d'un signal sinusoïdal de fréquence porteuse $F_{\mathrm{B}} = 40$ MHz modulé en fréquence par la vitesse de la particule et s'écrit

$$s(t) = K \exp\left\{-\left[\beta x(t)\right]^2\right\} \left\{M + \cos[2\pi F_{\mathrm{B}}t + 2\pi Dx(t) + \phi_0]\right\} \tag{2.27}$$

ou, en adoptant une écriture plus compacte,

$$s(t) = A(t) \left\{M + \cos[2\pi F_{\mathrm{B}}t + \phi(t)]\right\}. \tag{2.28}$$

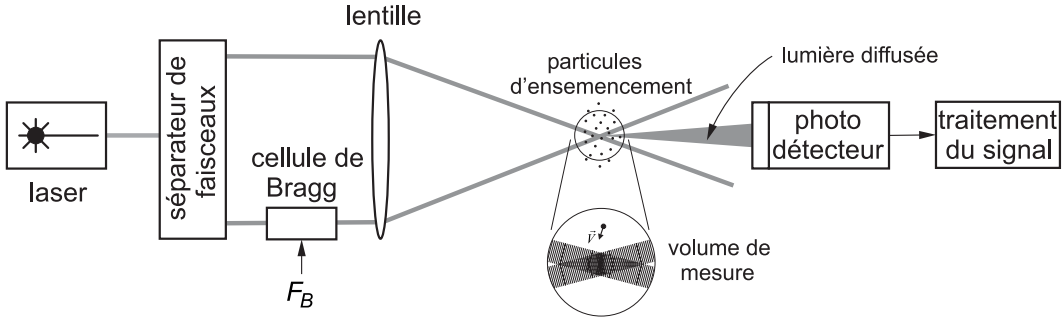

FIG. 2.8 – *Schéma de principe d'un système de mesure par ALD.*

La figure 2.8 donne la structure de base d'un dispositif de mesure par ALD.

2.2.4 Synthèse

Les paragraphes 2.2.2 et 2.2.3 ont permis de proposer plusieurs modèles du signal Doppler établis en prenant en compte les hypothèses suivantes :

- la particule d'ensemencement suit une trajectoire parallèle à l'axe x et passe par le centre du volume de mesure ;
- La répartition radiale de l'intensité lumineuse des faisceaux laser est de forme gaussienne.

Afin d'avoir une idée plus précise du problème il est possible d'énumérer, d'une façon très synthétique, chacune des formules décrivant ces modèles en précisant à chaque étape les hypothèses retenues :

a. Modèle du signal Doppler pour une vitesse de particule quelconque :

$$s(t) = A(t)\left\{M + \cos\left[2\pi D x(t) + \phi_0\right]\right\} \tag{2.29}$$

avec

$$A(t) = K \exp\left\{-\left[\beta x(t)\right]^2\right\} \tag{2.30}$$

b. Modèle du signal Doppler dans le cas particulier où la vitesse de la particule est constante :

$$s(t) = A(t)\left\{M + \cos\left[2\pi D V_x (t - t_0) + \phi_0\right]\right\} \tag{2.31}$$

avec

$$A(t) = K \exp\left\{-\left[\beta V_x (t - t_0)\right]^2\right\} \tag{2.32}$$

c. Modèle du signal Doppler pour une vitesse de particule quelconque et défilement des franges d'interférence :

$$s(t) = A(t)\left\{M + \cos\left[2\pi F_{\mathrm{B}} t + 2\pi D x(t) + \phi_0\right]\right\} \tag{2.33}$$

avec

$$A(t) = K \exp\left\{-\left[\beta x(t)\right]^2\right\} \tag{2.34}$$

La section suivante est consacrée à l'application des principes de l'ALD à la mesure de vitesse particulaire acoustique et va permettre, notamment, d'observer la forme particulière prise par la formule (2.33) lorsque la vitesse est de forme sinusoïdale.

2.3 Application de l'ALD à l'acoustique

2.3.1 Introduction

Cette section s'intéresse à l'utilisation de l'ALD dans le cas particulier où le champ acoustique est excité sinusoïdalement. En effet ce régime, largement utilisé en acoustique, présente l'intérêt d'admettre, si nécessaire, l'utilisation de techniques de détection synchrone permettant l'extraction des paramètres d'amplitude et de phase de la vitesse. Cependant le régime harmonique ne recouvre pas toutes les situations intéressantes pour l'expérimentateur en acoustique. C'est pourquoi le travail mené devra laisser ouvertes les perspectives d'extension des méthodes étudiées aux cas où l'excitation du champ acoustique n'est plus sinusoïdale.

Par ailleurs, les vitesses acoustiques présentent généralement des ordres de grandeur qui diffèrent de celles rencontrées en mécanique des fluides, tant en ce qui concerne leur dynamique en amplitude que la rapidité des variations temporelles. Or les dispositifs de mesure développés dans le cadre de la mécanique des fluides ne sont pas toujours adaptés à ces spécificités qui sont décrites au paragraphe suivant. Cela nécessite donc de concevoir des systèmes spécifiquement adaptés à la mesure de vitesse acoustique.

2.3.2 Spécificités des vitesses acoustiques

La gamme des fréquences des signaux acoustiques audibles s'étend de 20 Hz à 20 kHz pour des niveaux de pression acoustique compris entre 0 dB SPL (Sound Pressure Level) et 130 dB SPL. Le niveau de pression acoustique, exprimé en dB, est défini par

$$L_p = 20 \log \frac{P_{\text{ac}}}{P_{\text{ref}}} \tag{2.35}$$

où $P_{\text{ref}} = 20$ μPa est la pression de référence correspondant au seuil d'audition dans l'air [12, 13]. Dans le cas d'une onde plane progressive sinusoïdale observée en champ libre la pression acoustique est liée à la vitesse particulaire par la relation

$$P_{\text{ac}} = \rho c V_{\text{ac}} \tag{2.36}$$

avec ρ la masse volumique du milieu et c la célérité du son dans ce même milieu. Le produit ρc donne alors l'impédance acoustique caractéristique du milieu dont la valeur, dans le cas de l'air et dans des conditions normales de pression et de température[1], peut être approchée par la valeur $\rho c \approx 400$ Pa s/m. La figure 2.9 montre que ces valeurs correspondent à des amplitudes de vitesse V_{ac} comprises entre $5 \cdot 10^{-5}$ mm/s et 150 mm/s environ, et à des amplitudes de déplacement particulaire X_{ac} de l'ordre de $4 \cdot 10^{-13}$ m ($L_p = 0$ dB SPL et $F_{\text{ac}} = 20$ kHz) et de 1,2 mm ($L_p = 130$ dB SPL et $F_{\text{ac}} = 20$ Hz). Ces ordres de grandeurs ont une grande influence sur la forme prise par le signal Doppler dont le modèle est maintenant décrit.

2.3.3 Modèle du signal Doppler en régime sinusoïdal

Ce paragraphe décrit le modèle du signal Doppler dans le cas de la présence d'une particule unique dans le volume de mesure. Cette hypothèse est réalisable à condition d'être capable de contrôler la concentration des traceurs ensemençant le fluide. Dans la pratique les conditions d'un faible ensemencement peuvent s'obtenir en attendant la stabilisation des conditions

1. $P_{atm} = 10^5$ Pa, $T_{amb} = 25$°C

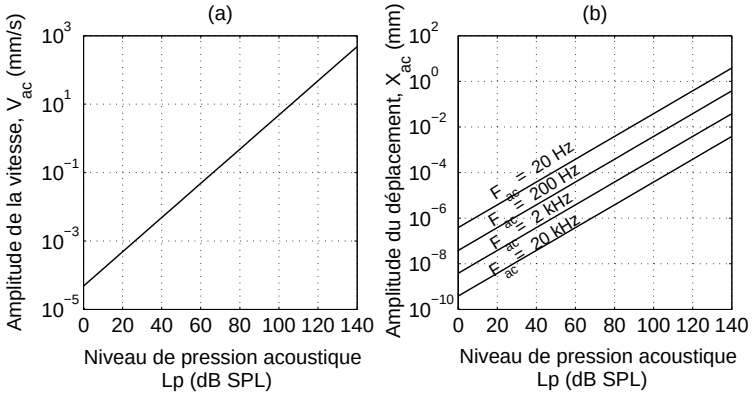

FIG. 2.9 – *Correspondance entre les niveaux de pression acoustique et les amplitudes de la vitesse* (a) *et les amplitudes des déplacements particulaires* (b) *en régime sinusoïdal.*

expérimentales préalablement à toute mesure [14, 15]. Pour des temps d'attente supérieurs à un quart d'heure les particules les plus légères se sont évaporées ou condensées alors que les particules les plus lourdes se sont déposées [7].

La particule soumise à un champ acoustique sinusoïdal de fréquence F_{ac} connue présente une vitesse

$$v(t) = V_{\mathrm{ec}} + V_{\mathrm{ac}} \cos(2\pi F_{\mathrm{ac}} t + \phi_{\mathrm{ac}}) \tag{2.37}$$

où V_{ac} et ϕ_{ac} désignent respectivement l'amplitude et la phase de la vitesse acoustique. Le terme V_{ec}, supposé constant, rend compte des phénomènes de convection locale ainsi de la présence éventuelle d'un écoulement à vitesse constante se superposant au mouvement acoustique. La position de la particule à l'instant t est alors donnée par

$$x(t) = V_{\mathrm{ec}}(t - t_0) + \frac{V_{\mathrm{ac}}}{2\pi F_{\mathrm{ac}}} \sin(2\pi F_{\mathrm{ac}} t + \phi_{\mathrm{ac}}). \tag{2.38}$$

En tenant compte de la forme que prend $x(t)$ dans ce cas particulier et comme $\phi(t) = 2\pi D x(t) + \phi_0$, le signal Doppler décrit par l'équation (2.33) devient

$$s(t) = A(t) \left\{ M + \cos \left[2\pi F_{\mathrm{B}} t + 2\pi D V_{\mathrm{ec}}(t - t_0) + \frac{D V_{\mathrm{ac}}}{F_{\mathrm{ac}}} \sin(2\pi F_{\mathrm{ac}} t + \phi_{\mathrm{ac}}) + \phi_0 \right] \right\} \tag{2.39}$$

avec

$$A(t) = K \exp\left\{ - \left[\beta x(t) \right]^2 \right\}. \tag{2.40}$$

La présence d'une particule dans le volume de mesure génère donc un signal à modulation de fréquence sinusoïdale de fréquence porteuse équivalente $F_{\mathrm{B}} + DV_{\mathrm{ec}}$ [7, 10, 16] et d'amplitude $A(t)$ variant dans le temps. Dans cette dernière expression il est possible d'identifier le taux de modulation du signal Doppler [17] par le terme

$$\alpha = \frac{D V_{\mathrm{ac}}}{F_{\mathrm{ac}}} \tag{2.41}$$

qui dépend de l'amplitude des déplacements de la particule dus à l'excitation acoustique

$$X_{\mathrm{ac}} = \frac{V_{\mathrm{ac}}}{2\pi F_{\mathrm{ac}}}. \tag{2.42}$$

2.3.4 Bruits de mesure

Le modèle du signal Doppler, donné par la relation (2.39), ne prend pas en compte la présence de bruit de mesure. Or, les conditions expérimentales imposent de considérer les effets de ces perturbations qui, en ALD, ont des origines très diverses [7]. Valeau [10] établit que dans des conditions expérimentales normales, la principale source de bruit est due au bruit électronique du photomultiplicateur. Il précise, de plus, que ce bruit est de nature additive, assimilable à un bruit blanc, gaussien, de variance σ_p^2 et est observable lorsque qu'aucune particule n'est présente dans le volume de mesure. Le Rapport Signal sur Bruit (RSB), permettant d'évaluer la qualité d'un signal vis à vis du bruit, peut alors se définir par

$$\mathrm{RSB} = \frac{K^2}{2\sigma_p^2} \tag{2.43}$$

où $K^2/2$ et σ_p^2 représentent respectivement la puissance d'un signal sinusoïdal d'amplitude K constante, et la puissance de bruit. Le RSB s'exprime aussi en décibel par

$$\mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}} = 10 \log \left(\frac{K^2}{2\sigma_p^2} \right). \tag{2.44}$$

Ces relations n'ont en principe de sens que pour caractériser le rapport signal sur bruit d'un signal purement sinusoïdal, d'amplitude K et de puissance moyenne finie. Dans ce cas le terme $K^2/2$ est la puissance véhiculée par le signal utile alors que σ_p^2 représente la puissance de bruit blanc, gaussien et additif [18]. Dans le cas du signal Doppler les définitions (2.43) et (2.44), arbitraires, ne sont destinées qu'à fournir un ordre d'idée du rapport entre les puissances du signal et celles du bruit [8, 10].

2.3.5 Spectre en amplitude et largeur de bande du signal Doppler

Compte tenu de la présence du terme $A(t)$ la détermination d'une expression générale du spectre en amplitude[2] du signal Doppler est difficile à obtenir en pratique. Cependant il est possible de considérer que la transformée de Fourier (TF) $S(F)$ du signal Doppler est le résultat du produit de convolution de $A_s(F) = \mathcal{F}\{A(t)\}$ par $C_s(F) = \mathcal{F}\{M + \cos\phi(t)\}$, transformées de Fourier respectives de l'amplitude et de la composante sinusoïdale de valeur moyenne M. L'expression analytique de $A_s(F)$ est très difficile à calculer. En revanche si le déplacement particulaire acoustique maximal est de l'ordre de grandeur de la dimension du volume de mesure, ce qui correspond dans la pratique à un cas limite, Valeau [10] considère que le contenu fréquentiel de $A_s(F)$ est compris dans l'intervalle $[-10F_{\mathrm{ac}}, +10F_{\mathrm{ac}}]$. Le terme $C_s(F)$ dispose quant à lui d'une expression analytique donnée par [17, 18, 19]

$$C_s(F) = M\delta(F) + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n^2(\alpha) \cdot [\delta(F + F_{\mathrm{B}} - nF_{\mathrm{ac}}) + \delta(F - F_{\mathrm{B}} - nF_{\mathrm{ac}})] \tag{2.45}$$

avec $\alpha = DV_{\mathrm{ac}}/F_{\mathrm{ac}}$ le taux de modulation et $J_n^2(\alpha)$ la fonction de Bessel d'ordre n de α. Le spectre de $S(F)$ est alors donné par le produit de convolution

$$S(F) = A_s(F) * M\delta(F) + A_s(F) * \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n^2(\alpha) \cdot [\delta(F + F_{\mathrm{B}} - nF_{\mathrm{ac}}) + \delta(F - F_{\mathrm{B}} - nF_{\mathrm{ac}})]. \tag{2.46}$$

2. module de la transformée de Fourier

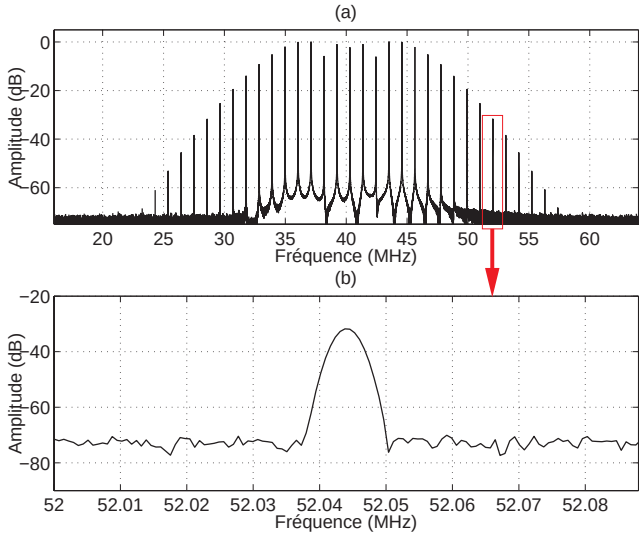

FIG. 2.10 – *Allure du spectre en amplitude du signal Doppler* (a) - *Détail* (b). $F_{\mathrm{ac}} = 4000$ Hz, $V_{\mathrm{ac}} = 20$ mm/s.

où $*$ désigne l'opérateur *produit de convolution*. L'expression (2.46) met en évidence la présence de deux modes dans la constitution du spectre du signal Doppler : un mode basse fréquence, $A_s(F) * M\delta(F)$, correspondant au spectre $A_s(F)$ centré sur la fréquence nulle et dont la largeur n'excède pas $\pm F_{\mathrm{ac}}$, ainsi qu'un mode de type passe-bande centré sur la fréquence de Bragg F_{B} égale à 40 MHz. La figure 2.10 montre l'allure de cette partie haute fréquence du spectre en amplitude du signal Doppler pour $F_{\mathrm{ac}} = 4000$ Hz et $V_{\mathrm{ac}} = 20$ mm/s. La modulation de fréquence par un signal sinusoïdal fait donc apparaître une infinité de composantes latérales réparties de part et d'autre de la fréquence porteuse F_{B} et espacées d'une quantité égale à la fréquence acoustique F_{ac}, la largeur fréquentielle de ces modes dépendant étroitement de $A_s(F)$. La largeur de bande est donc théoriquement infinie. Cependant, comme les coefficients $J_n^2(\alpha)$ tendent rapidement vers zéro lorsque n tend vers l'infini, il est admis, en pratique, que la bande passante utile est bornée. La figure 2.11 donne les largeurs de bandes $2B'$ à -3 dB pour différentes valeurs de la fréquence F_{ac} et de la vitesse acoustique V_{ac}. Ces courbes ont été obtenues par la simulation numérique de signaux Doppler de fréquences et de vitesses acoustiques comprises

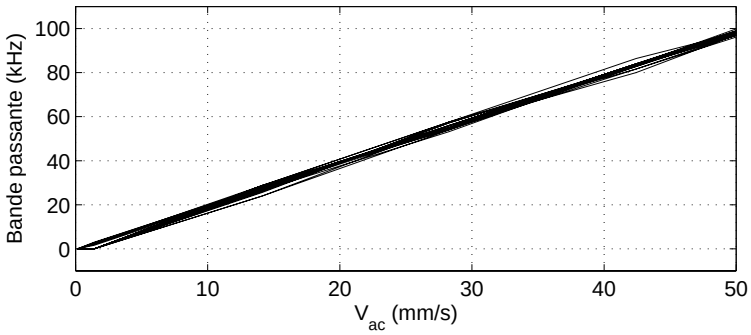

FIG. 2.11 – *Bandes passantes à* -3 dB *simulées en fonction de la vitesse acoustique pour différentes valeurs de la fréquence* F_{ac} *comprises entre* 500 Hz et 4000 Hz.

respectivement entre 500 Hz et 4000 Hz et 0,1 mm/s et 50 mm/s. La superposition des courbes de la figure 2.11 témoigne de la faible dépendance de la largeur de bande du signal Doppler vis à vis de la fréquence F_{ac}. Ainsi la largeur de bande du signal Doppler atteint approximativement la valeur limite de 100 kHz pour des vitesses de l'ordre de 50 mm/s soit $B'_{max} \approx 50$ kHz.

Les caractéristiques spectrales du signal Doppler sont donc telles que les deux modes mis en évidence dans l'expression (2.46) présentent des supports fréquentiels ne se recouvrant pas. Compte tenu de ces observations il est dès lors possible d'éliminer, assez simplement, la composante basse fréquence à l'aide d'un filtre passe-bas et d'aboutir, à partir de l'équation (2.33), à une nouvelle formulation du signal Doppler, donné par

$$s(t) = A(t)\cos\left[2\pi F_{\mathrm{B}}t + 2\pi D V_{\mathrm{ec}}(t-t_0) + \frac{DV_{\mathrm{ac}}}{F_{\mathrm{ac}}}\sin(2\pi F_{\mathrm{ac}}t + \phi_{\mathrm{ac}}) + \phi_0\right] \tag{2.47}$$

avec

$$A(t) = K\exp\left\{-\left[\beta x(t)\right]^2\right\}. \tag{2.48}$$

Le modèle du signal Doppler, décrit par les équations (2.47) et (2.48) sera retenu pour la suite de cette étude.

2.4 Étude bibliographique

2.4.1 Introduction

Les études consacrées à la mesure par ALD en acoustique sont très peu nombreuses en comparaison à l'abondante littérature consacrée à l'application de cette méthode en mécanique des fluides. Poggi [10] propose cependant une étude bibliographique des principaux travaux menés en acoustique, dans l'air et dans l'eau, mais il souligne par ailleurs qu'il n'existe pas de synthèse permettant de choisir la technique appropriée d'estimation de la vitesse acoustique en fonction des conditions de mesure. De plus cette bibliographie ne fait pas état d'étude dans le domaine de l'estimation en temps réel.

Les travaux de références en matière d'ALD appliquée à l'acoustique sont donc, pour cette étude, essentiellement ceux menés au LAUM. Il n'en reste pas moins vrai, cependant, que dans cette recherche il est important d'établir le bilan des études en mécanique des fluides. À ce titre l'ouvrage de référence de Durst, Melling et Whitelaw [5] propose de nombreuses solutions. Par ailleurs le travail de recherche de Galtier [8], même s'il se rapporte à la mesure de vitesses d'écoulement constantes, parait très intéressant. En effet, ces travaux, menés avec le soucis constant de proposer une solution de traitement en temps réel pour un système embarqué, sont proches des préoccupations de ce travail de thèse.

De très nombreuses études ont été menées sur les signaux sinusoïdaux à amplitude variable au cours du temps, classe à laquelle appartiennent les signaux ALD pour l'acoustique :

- estimation de signaux harmoniques dans du bruit blanc additif ou multiplicatif [20];
- estimation par maximum de vraisemblance (MLE) des paramètres de phase et d'amplitude, supposées déterministes, de signaux de la forme $a(t)e^{j\phi(t)}$ [21];
- extension de cette étude au cas où l'amplitude est considérée issue d'un processus gaussien stationnaire à moyenne dépendant du temps [22];
- étude de signaux à phase polynomiale, à amplitude déterministe, pouvant être décrits par un modèle paramétrique [23];
- ou affecté par un bruit multiplicatif et un bruit additif [24].

Mais comme le souligne très judicieusement GALTIER [8] l'amplitude variable du signal Doppler est généralement perçue par les auteurs comme un terme perturbateur qui rend plus difficile l'estimation des paramètres de la phase des signaux. De plus l'amplitude et la phase des signaux sont généralement considérées comme découplées l'une de l'autre. Or le modèle de signal Doppler présenté précédemment et décrit par les équations (2.47) et (2.48) montre que ces grandeurs transportent toutes les deux l'information intéressante au travers du terme $x(t)$, donnant le déplacement particulaire. Ces deux fonctions déterministes ne sont ni statistiquement indépendantes ni de modèles différents sans paramètres communs. Il paraît alors judicieux d'exploiter le signal dans sa totalité afin de disposer du maximum d'information.

De nombreuses approches sont envisageables pour traiter le signal Doppler. L'état des lieux des traitements en ALD sera mené en distinguant les méthodes *non-paramétriques* des méthodes *paramétriques*. Le principe des méthodes paramétriques repose généralement sur l'utilisation d'un modèle intégrant l'information *a priori* sur la forme des signaux (2.47). La seconde catégorie, quant à elle, regroupe souvent les méthodes n'appartenant pas au premier ensemble et intégre, notamment, les techniques permettant une description *temps-fréquence* du signal Doppler.

Les deux prochains paragraphes vont s'attacher à établir le bilan des applications de ces méthodes à l'estimation de vitesses par ALD. Les deux derniers paragraphes décriront, quant à eux, les méthodes envisageables pour détecter le signal utile, d'une part, ainsi que les aspects technologiques du problème, d'autre part.

2.4.2 Méthodes non-paramétriques

Compteur de périodes

Il s'agit historiquement de la première méthode mise en oeuvre en ALD. Elle consiste à mesurer le temps qui s'écoule entre un certain nombre de passages à zéro du signal Doppler. Ces instants de passage à zéro sont estimés à l'aide d'un opérateur de comparaison. La fréquence est alors calculée en évaluant le rapport *nombre de passage à zéro/temps* [8]. Quelques variantes et aménagements particuliers de cette méthode sont proposés dans [25] et dans [26].

Cette méthode est simple à mettre en oeuvre et ne nécessite que peu d'opérations sur le signal. Elle fonctionne correctement pour des RSB élevés et pour des signaux de durée importante. Cependant le choix délicat des seuils peut conduire à des erreurs grossières. Son utilisation reste par ailleurs limitée à des signaux pour lesquels la fréquence reste constante pendant la durée de la bouffée ce qui est mal adapté pour traiter des signaux à modulation de fréquence.

Estimateurs basés sur la transformée de Fourier

La technique la plus intuitive et la plus courante en traitement du signal est sans doute la transformée de Fourier [27]. BESSON [28] présente les deux méthodes les plus répandues basées sur la transformée de Fourier : Le périodogramme et l'estimateur de Blackman-Tuckey basé sur la transformée de Fourier pondérée de l'autocorrélation du signal. Avec ces méthodes une approximation de la fréquence instantanée (FI) peut être donnée par le maximum du spectre ou par la détermination du moment d'ordre un.

En fait si ces méthodes fonctionnent correctement pour un signal quasi-stationnaire, c'est à dire pour lequel la fréquence porteuse n'évolue pas, ou peu, au cours du temps, elles ne conviennent plus dès lors que le signal est modulé en fréquence ce qui est le cas de cette application. La Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT) en proposant l'analyse du

signal sur des intervalles de temps successifs permet de pallier ce problème. Cependant cette technique supporte mal de fortes variations de la fréquence pendant la durée d'observation.

L'intérêt principal de la transformée de Fourier pour cette étude réside dans sa simplicité. De plus l'existence d'algorithme de calcul rapide[3] permet son implantation en temps réel sur un processeur spécialisé de type DSP (Digital Signal Processor).

D'une manière générale les estimateurs basés sur la transformée de Fourier possèdent de nombreux inconvénients, notamment une sensibilité importante au bruit, une variance élevée ainsi que des problèmes de résolution en fréquence. Par ailleurs ces estimateurs sont biaisés. Même si ce type de méthode ne permet pas d'obtenir des estimateurs très performants il représente malgré tout une technique de référence en matière d'analyse des signaux [8, 28].

Estimateurs basés sur la définition de la fréquence instantanée

Ville [29] et Wigner [30] définissent la pulsation instantanée comme étant la dérivée de la phase instantanée par rapport au temps. La fréquence instantanée s'écrit par conséquent

$$F_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}. \tag{2.49}$$

Dans cette relation $\phi(t)$ représente la phase du signal analytique associé au signal Doppler. Boashash [27] propose la construction de plusieurs estimateurs de FI à temps discret s'appuyant sur la définition de l'équation (2.49). Il s'agit des estimateurs de différence de phase, à gauche, à droite ou central. Ce dernier estimateur est particulièrement intéressant de par sa simplicité d'une part et d'autre part parce qu'il est non-biaisé et ne présente pas de retard de groupe pour des modulations linéaires. Malheureusement il présente une grande variance pour les phases non-linéaires ce qui est le cas des signaux modulés en fréquence. Dans l'hypothèse de loi de phase polynomiale un estimateur de différence de phase généralisé peut alors être utilisé [31].

Enfin il est encore possible d'exploiter le principe des discriminateurs FM[4] [18, 32], technique dont s'inspirent d'ailleurs Durst, Melling et Whitelaw [5] pour construire un démodulateur de fréquence autodyne.

Méthodes basées sur la distribution de Wigner-Ville - DWV

Le principe de ces méthodes d'analyse consiste à mesurer la symétrie locale d'un signal autour d'un point dans le plan temps-fréquence. L'intérêt majeur de cette distribution est de présenter une localisation idéale de l'énergie autour de la FI dans le cas de signaux modulés linéairement en fréquence, appelés encore *signaux chirp*.

La DWV s'applique au signal analytique $z(t)$ associé au signal Doppler $s(t)$ et s'écrit :

$$DWV_z(t,F) = \int_{\mathbb{R}} z\left(t+\frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi F\tau} d\tau. \tag{2.50}$$

Cette dernière relation peut encore s'interpréter comme la transformée de Fourier en τ du signal $K_z(t,\tau) = z\left(t+\frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ et nécessite l'emploi d'une fenêtre glissante à l'instar de la TFCT pour pouvoir être implantée concrètement. La dimension de cette fenêtre doit alors être choisie de telle façon que les variations de la FI puissent être considérées comme linéaires pendant la durée d'observation du signal [32].

3. Transformée de Fourier rapide ou *Fast Fourier Transform* - (FFT).
4. Frequency Modulation.

Quelques variantes de la DWV peuvent être proposées. C'est le cas de la méthode par recherche des Pics de la Distribution de Wigner-Ville (PDWV), de la Distribution de Wigner-Ville Croisée (DWVC) et de la Distribution de Wigner-Ville polynomiale (DWVP).

L'estimation de FI à partir de la PDWV peut s'obtenir par la recherche du maximum local de la distribution dans le plan temps-fréquence. D'après Boashash [33] cet estimateur est optimal pour des lois de FM linéaires et des RSB élevés. Cependant la présence de non-linéarités dans la loi de variation de la FI peut conduire à un biais important. Dans le cas d'une modulation sinusoïdale il convient donc d'ajuster la fenêtre de telle manière que ses dimensions soient faibles par rapport à la période acoustique [10].

Le principe de la DWVC repose sur l'estimation itérative de la FI . Dans l'équation (2.50) le terme $z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ est remplacé par $x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ où x est un signal de référence synthétisé à partir d'une estimation initiale de FI du signal. L'extraction du pic de la DWVC entre le signal étudié et le signal synthétique permet d'obtenir un nouvel estimateur de FI sur une première fenêtre de calcul. Le processus est reconduit itérativement jusqu'à ce que l'estimation de FI obtenue ne diffère de la précédente que d'un écart inférieur à une certaine valeur fixée. Pour une variation linéaire de la FI cet estimateur converge vers la valeur vraie [33]. De la même façon que pour la PDWV les non-linéarités de la FI engendrent un biais sur son estimation. Par ailleurs l'estimation par DWVC présente une variance faible atteignant même les Bornes de Cramer-Rao ou CRB [5], pour les signaux FM linéaires [31].

La DWVP, appelée aussi Distribution de Wigner-Ville Généralisée (DWVG) constitue un moyen de représentation des signaux dont la phase peut être modélisable sous la forme d'un polynôme [34]. De la même façon que la DWV présente une concentration idéale de l'énergie autour de la loi de FI du signal, la DWVP offre un comportement identique pour un ordre arbitraire du signal FM polynomial. Dans le cas de signaux modulés sinusoïdalement en fréquence, l'utilisation de la DWVP revient en quelque sorte à approcher par des polynômes des morceaux de sinusoïdes. Pour cette dernière classe de signaux Valière et Valeau [35, 36, 15] montrent l'existence d'un estimateur spécifiquement adapté à des variations sinusoïdales de FI appelé Détecteur Temps-Fréquence Synchrone (DTFS) et aboutissant à une forme polynomiale du noyau. Ils donnent par ailleurs les limites de cet estimateur pour la mesure de l'amplitude et de la phase de variation de FI pour un signal Doppler d'amplitude constante [10].

Suiveur de fréquence et boucle à verrouillage de phase

Ce type d'estimateur, largement répandu en télécommunication, peut se formuler comme un problème d'estimation adaptatif de la fréquence locale instantanée [27, 37, 38]. C'est le principe des boucles à verrouillage de phase, ou PLL [6], dont le fonctionnement est connu depuis 1932 [39].

La figure 2.12 illustre le principe d'un tel estimateur qui repose sur un système bouclé dans lequel la grandeur asservie est la phase d'un signal alternatif. L'oscillateur contrôlé en tension, ou VCO [7], présente, une fois que la boucle est verrouillée, un signal de sortie qui est une image du signal modulant qui, dans cette étude, correspond à la vitesse acoustique.

Un tel estimateur présente de bonnes performances en présence de bruit mais tolère difficilement des changements brusques ainsi que des excursions importantes de la fréquence [5, 27]. L'inconvénient majeur de cet estimateur est donc dû à son inaptitude à démoduler les signaux à fort indice de modulation. Autrement dit il est difficile d'extraire les signaux pour des vitesses

5. Cramer-Rao Bounds
6. Phase Looked Loop.
7. Voltage Controled Oscillator.

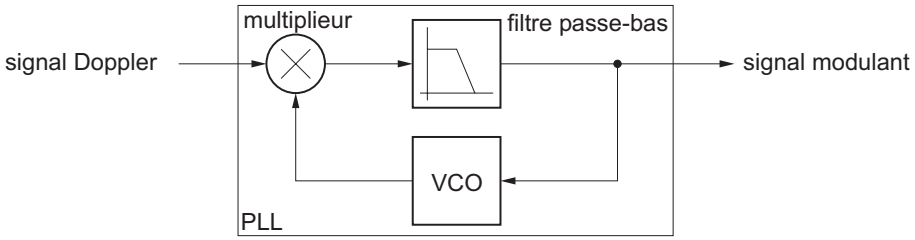

FIG. 2.12 – *Schéma de principe d'une boucle à verrouillage de phase* (PLL).

acoustiques élevées. À l'inverse, l'utilisation d'une PLL devient très intéressante lorsque cette vitesse diminue. L'intérêt principal de cette technique réside dans la possibilité d'implantation en temps réel, en analogique aussi bien qu'en numérique, et ne nécessite pas une connaissance précise *a priori* de la fréquence porteuse F_B du signal Doppler pour estimer les paramètres de la vitesse acoustique. Peu d'auteurs proposent la démodulation par PLL appliquée à l'ALD. Il faut citer, toutefois, les travaux de LEE, BERTHELOT et JARZYNSKI [40] qui utilisent une PLL pour l'estimation en temps-réel de l'amplitude et de la phase de la vitesse de déplacement d'une structure vibrante. De même GOGGANS et SMITH [41] décrivent une méthode permettant d'améliorer les performances d'une PLL dans une application de détection de mines. Dans ces deux cas les auteurs ne donnent pas de descriptions précises du dispositif expérimental. Enfin la possibilité d'une démodulation utilisant une PLL est évoquée dans [5]. Enfin, cette méthode peut être étendue aux cas où la vitesse acoustique ne présente plus un caractère sinusoïdal.

Démodulation en quadrature

Le principe de la démodulation en quadrature est donné par la figure 2.13. La génération d'une paire de signaux sinusoïdaux synchrones en quadrature de fréquence F_B, égale à la fréquence porteuse du signal à démoduler, permet de ramener en bande de base le spectre du signal Doppler $s(t)$. La démodulation en quadrature permet de définir deux signaux d'observation $y_1(t) = A(t)\cos\phi(t)$ et $y_2(t) = A(t)\sin\phi(t)$ ayant tous les deux un spectre de type passe-bas. L'amplitude $A(t)$ et la phase $\phi(t)$, portant l'information de vitesse, sont extraites à l'aide des équations de passage de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires,

$$A(t) = \sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)} \tag{2.51}$$

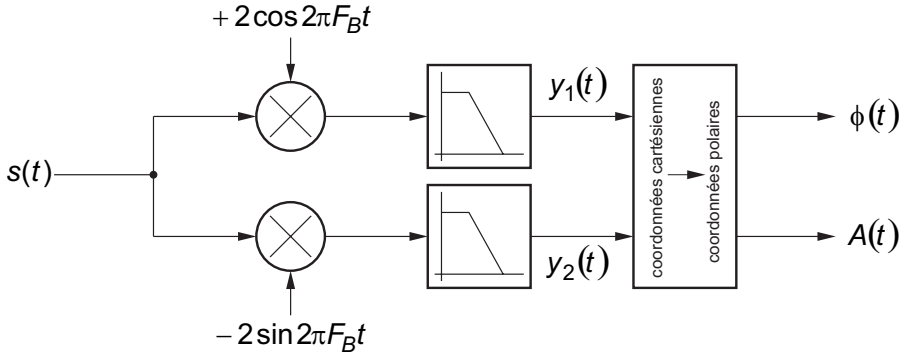

FIG. 2.13 – *Schéma de principe d'un système de démodulation en quadrature.*

et

$$\phi(t) = \arctan\left[\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right]. \tag{2.52}$$

Une mesure de vitesse en mécanique des fluides à l'aide d'un démodulateur en quadrature est proposé par Czarske et Dölle [42]. Les auteurs justifient l'emploi de cette technique pour la mesure de vitesses d'écoulement faibles (de l'ordre de $50\mu m/s$) correspondant à une fréquence Doppler de l'ordre de 10 Hz. Le décalage en bande de base du signal Doppler permet ici d'améliorer la résolution temporelle des estimations de la fréquence. De plus comme cette méthode de démodulation est basée sur la détermination de la phase instantanée peu de périodes sont nécessaires pour obtenir de bonnes estimations. Par ailleurs cette technique permet d'aboutir aux parties réelle et imaginaire du signal analytique associé au signal Doppler. Ce principe est d'ailleurs adopté par le système d'analyse des signaux *Burst Spectrum Analyser*, ou BSA, de la société DANTEC [26]. Les méthodes utilisant le principe d'une démodulation en quadrature ne sont donc pas très éloignées des techniques de type Wigner-Ville fonctionnant elles aussi à partir du signal analytique.

2.4.3 Méthodes paramétriques

Estimateur par modèle auto-régressif

Compte tenu de la nécessité de travailler à partir d'un signal stationnaire peu d'auteurs font référence à cette méthode d'estimation de fréquence en ALD. Seuls Veynante et Lacas évoquent la possibilité de son utilisation en précisant qu'elle permet d'obtenir de très bons résultats à partir d'un faible nombre échantillons. De même Bellière [43] indique que cette technique lui permet d'obtenir une estimation précise de la fréquence après seulement deux oscillations du signal Doppler. Par ailleurs des essais sur des signaux Doppler issus de mesures acoustiques ont permis de montrer que les performances de ces méthodes n'excédaient pas celles obtenues par des méthodes temps-fréquences [44].

Estimateur par maximum de vraisemblance

Ce type de méthode permet d'estimer le vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ à partir de l'observation du signal Doppler $s(t)$. L'estimation se base alors sur la connaissance *a priori* de la densité de probabilité conditionnelle du vecteur d'observation $\mathbf{s}$, dépendant de $\boldsymbol{\theta}$ et de la statistique de bruit, $p(s,\boldsymbol{\theta})$ appelée encore fonction de vraisemblance [18, 45]. L'estimateur à maximum de vraisemblance ou MLE[8] correspond à la valeur de $\boldsymbol{\theta}$ qui rend maximum la fonction de vraisemblance $p(s,\boldsymbol{\theta})$.

Les avantages d'un tel estimateur sont nombreux : il est non-biaisé, il est efficace et consistant [32]. C'est l'un des meilleurs estimateurs possibles si le modèle théorique est correct [8] et il offre de très bons résultats en présence de signaux fortement bruités.

Galtier [46] utilise le MLE afin d'estimer le vecteur paramètre à deux dimensions (amplitude et fréquence Doppler) d'un signal Doppler appliqué à la mesure de la vitesse d'un avion et compare les résultats aux CRB. Dans ce cas le MLE s'avère être un estimateur particulièrement précis mais gourmand en temps de calcul. L'estimateur par Maximum de Vraisemblance Simplifié (AMLE) [8] ainsi que l'utilisation du principe d'invariance étendue [47] constituent alors une alternative au MLE qui est plus simple d'un point de vue calculatoire.

8. Maximum Likelihood Estimator

Dans le cadre de la mesure de la vitesse acoustique MELLET propose d'appliquer le principe du maximum de vraisemblance en tant qu'estimateur de FI [16, 48, 49]. Cette technique permet d'envisager la démodulation de signaux à variation de fréquence sinusoïdale dont l'indice de modulation est de l'ordre de 0,01. Cette étude porte sur des signaux d'amplitude constante et de fréquence porteuse de l'ordre de 93 kHz.

Estimateur par filtrage de Kalman

Peu d'études font état de la mesure de vitesse acoustique à l'aide de la méthode de filtrage itérative de Kalman. Néanmoins MELLET [16, 50], à la suite de l'étude de VALEAU [36], réalise un suivi de la FI du signal Doppler pour des RSB élevés à l'aide d'un filtre de Kalman, dont le vecteur d'état est composé de la phase instantanée, de la FI et du taux de modulation. Cependant l'extraction de la phase sur le signal analytique que nécessite cette approche la rend très sensible au bruit. De plus le vecteur d'état adopté ne permet pas de prendre en compte l'amplitude variable du signal et suppose que la phase de la vitesse acoustique est connue.

2.4.4 Détection en ALD

Déclenchement de seuil ou *trigger*

Il s'agit de la méthode la plus intuitive de détection de signal. Elle est très simple à mettre en œuvre : le dépassement d'un certain seuil, fixé à l'avance, par la valeur d'un échantillon commande l'acquisition des échantillons suivants. Les inconvénients de cette méthode sont nombreux : aucune vérification possible de la représentativité des échantillons retenus, mauvaise immunité au bruit (déclenchement parasite), non-prise en compte des bouffées, certainement nombreuses, à faible RSB ainsi que des premiers instants des bouffées à RSB plus élevé... De plus elle ne fonctionne plus dans le cas de la présence simultanée de plusieurs particules dans le volume de mesure [51].

La notion de détection de la présence d'une particule dans le volume de mesure est essentielle pour le traitement du signal en ALD. En effet, dans la pratique, les particules arrivent de manière aléatoire dans le réseau de franges. Il est donc essentiel, avant ou conjointement à toute tentative d'estimation, de détecter si une particule est présente dans la région des mesures [8]. Dans le cas contraire, l'estimation des paramètres du signal n'a pas de sens. De plus dans un objectif de traitement en temps réel il est important que cette détection se fasse en ligne.

Détection par test de rapport de maximum de vraisemblance

HOWARD et EDWARDS [51] proposent un schéma de détection de bouffée Doppler basée sur un test de rapport de maximum de vraisemblance prenant en compte les statistiques du phénomène de photo-détection. Cette méthode, leur permet de s'affranchir du modèle de bruit gaussien additif sur le signal Doppler et leur permet d'opérer jusqu'à des RSB de l'ordre de -10 dB. Ce test porte sur les premiers points de l'auto-corrélation du signal Doppler et ne nécessite que peu d'échantillons pour vérifier la présence d'un signal valide.

Détection-estimation conjointe

GALTIER [8, 52] propose une technique de détection-estimation conjointe particulièrement adaptée à une mise en œuvre en temps réel. Cette procédure comporte les étapes suivantes : (a) acquisition d'une séquence de points délivrée par la sonde de mesure, (b) estimation des

paramètres du signal, (c) calcul du test de rapport du maximum de vraisemblance logarithmique, (d) détermination de l'hypothèse sous laquelle se situe le signal : soit l'estimation des paramètres n'a pas de sens et la procédure est réitérée, soit elle est considérée comme valide et les paramètres sont renvoyés comme valeurs des paramètres courants du signal. Par cette méthode GALTIER obtient 21 estimées de la fréquence Doppler et de l'amplitude du signal pour chaque bouffée repérée. Il évalue de plus le coût calculatoire d'un tel algorithme.

Détection par corrélation

Une amélioration de la technique évoquée précédemment consiste à appliquer le déclenchement de seuil, non pas sur le signal mais sur son auto-corrélation [8]. La détection est dans ce cas plus robuste vis à vis du bruit. De plus cette méthode est insensible à la phase du signal et fonctionne même en présence de plusieurs particules dans le volume de mesure [51].

Une variante de cette méthode est employée dans le dispositif décrit par JENSON [25]. Elle consiste à appliquer le seuil non pas sur sur l'autocorrélation du signal mais sur l'autocorrélation du signal *binarisé*. Cette méthode permet par ailleurs d'estimer grossièrement la fréquence Doppler, supposée constante, et d'en déduire la meilleure fréquence d'échantillonnage.

Utilisation des statistiques d'ordres supérieurs

L'utilisation des statistiques d'ordres supérieurs permet de déceler la présence d'un signal autre qu'un bruit blanc dans une observation. Notamment, la détermination du moment d'ordre 4, ou Kurtosis, du signal mesuré, en supposant que celui-ci est entaché d'un bruit blanc gaussien, permet de statuer sur la présence ou non d'une bouffée Doppler [8].

Détection par transformée en ondelette

Compte tenu de la nature temps-échelle des bouffées Doppler[9] une analyse de ce type peut être menée afin de détecter, d'une part, la présence d'une particule et d'estimer, d'autre part, l'instant de son apparition dans le volume de mesure. VAN MAANEN et NIJENBOER [53] proposent l'estimation de l'instant d'arrivée d'une particule ainsi que de la fréquence Doppler d'un signal ALD simulé. Il apparaît que l'emploi d'une ondelette (ici du type ondelette de Morlet) est avantageux vis à vis du bruit et présente, par rapport à la transformée de Fourier, une variance plus faible sur l'estimation de la fréquence. Cette technique peut être considérée comme une méthode de détection-estimation conjointe.

2.4.5 Aspects technologiques

Le degré de sophistication des systèmes de mesure par ALD nécessite aujourd'hui un mode opératoire complexe et une expertise importante. De plus son coût rend cette méthode de mesure inaccessible à la plupart des applications industrielles. Un des objectifs de la thèse est de concevoir, entre autre, une chaîne de traitement du signal autonome susceptible de s'interfacer avec le dispositif existant au LAUM. Dans cet esprit il est envisageable de prendre en compte dans cette intégration non seulement le système de traitement mais aussi la partie opérative avec des objectifs d'intégration, de miniaturisation, voir de coût réduit.

Quelques travaux, peu nombreux, allant dans ce sens existent. La plus spectaculaire des applications est sans doute représentée par le capteur ALD intégré développé par ITO, SAWADA

9. Ce phénomène est flagrant en mécanique des fluides où la fréquence Doppler reste à peu près constante pendant la durée de la bouffée

et HIGURASHI [54]. Ce dispositif, destiné à la mesure en mécanique des fluides, intègre sur un même substrat AsGa[10] une diode laser ($\lambda = 850$ nm, $P = 4$ mW, une photodiode et deux guides d'onde optiques, l'ensemble prenant place sur une surface inférieure à 1 mm^2. Un tel système ne nécessite pas d'alignement du dispositif optique. Par ailleurs les dimensions du système sont telles que pour l'angle de convergence des faisceaux laser ($\theta = 58^o$), paramètre qui conditionne la largeur de l'interfrange, le volume de mesure se trouve très proche du capteur, de l'ordre de 10 μm à 100 μm. La mesure devient alors invasive. De plus, le capteur n'intègre pas de cellule de Bragg permettant le défilement des franges d'interférence. Cependant les auteurs décrivent un dispositif permettant la discrimination du signe de la vitesse à l'aide d'un déphasage de $\pi/2$ de l'un des trajets laser et d'une lecture du signal rétrodiffusé par un jeu de deux diodes judicieusement disposées. Il n'est pas fait état dans cette description d'une quelconque électronique de traitement, les données issues de la photodiode étant lues grâce à un analyseur de spectre. Ce capteur permet alors la mesure de vitesse allant de 5 μm/s à 400 μm/s.

Sans atteindre un tel degré d'intégration la sonde développée à Caltech [55], toujours pour la mécanique des fluides, offre, pour un encombrement de l'ordre de 28 mm×60 mm, une distance du volume de mesure de 30 mm×120 mm. La longueur d'onde est comprise entre 660 nm et 1550 nm. Le traitement du signal est dans ce cas déporté vers un PC sans qu'il soit précisé dans la référence le type d'algorithme adopté.

WAGNER, DRESCHER et STORK [56] décrivent un vélocimètre laser à effet Doppler miniaturisé pour la mesure vibrométrique. L'intégration ne porte ici que sur la partie optique, sans la diode laser ($\lambda_L = 670$ nm, $P = 3$ mW), et présente un diamètre de l'ordre de 5 mm, permettant d'obtenir une distance de mesure comprise entre 50 mm et 500 mm. Le traitement du signal est assuré par une carte DSP assurant l'estimation de la vitesse par le calcul d'une FFT et paramétrable via une liaison RS232. Cette carte en technologie CMS[11] présente des dimensions comparables à celles d'une carte de crédit.

Enfin, citons le dispositif, très bas coût, proposé par la société VLD-SA et développé au Laboratoire de Spectroscopie Atomique de l'ISMRA[12] à Caen [43]. Le capteur associe une diode laser ($\lambda_L = 675$ nm, $P = 1$ mW), un masque en forme de tige permettant la séparation des faisceaux laser, une lentille et une photodiode et tient plus de l'assemblage de composants bon-marché que d'un système réellement intégré. Son encombrement reste néanmoins réduit : le diamètre de la sonde est de 30 mm pour une longueur de 80 mm. Compte tenu de la méthode sommaire mise en œuvre pour la séparation des faisceaux le nombre de franges d'interférence est très réduit (entre 5 et 11). Les bouffées Doppler sont donc temporellement courtes ce qui justifie l'emploi d'une estimation auto-régressive de la vitesse. Cet algorithme est implanté sur une carte d'acquisition et de traitement déportée s'articulant autour d'un microcontrôleur 80C198 et s'interfaçant à un PC via une liaison RS232. Cette sonde, disponible à l'ESEO, a donné lieu à l'étude d'un dispositif électronique analogique très faible coût, basé sur l'utilisation d'une PLL pour l'estimation de la fréquence du signal Doppler [57].

Ce rapide tour d'horizon montre l'intérêt suscité par l'intégration des capteurs vélocimétriques laser à effet Doppler. Comme le prévoit le sujet de thèse il est envisageable, dans la suite de cette étude, d'examiner les possibilités d'intégration d'un capteur ALD pour l'acoustique, au moins à titre de cahier des charges. Dans ce cas la recherche de collaboration avec des organismes compétents en optique intégrée est indispensable.

10. Arsenure de Gallium
11. Composant monté en surface
12. Institut des Sciences de la Matière et du RAyonnement

2.5 Contexte de l'étude

Avant de présenter les objectifs de ce travail de thèse il est indispensable de situer l'étude dans le contexte, général, de la mesure de vitesse acoustique particulaire au LAUM. Dans un premier temps les étapes clées suivies par le laboratoire pour l'élaboration d'un dispositif fonctionnel de mesure de vitesse sont résumées. Cela aidera à mieux comprendre les études déjà réalisées et permettra d'évaluer plus précisément le travail qui reste à accomplir. Il sera alors possible, dans un second temps, de décrire les objectifs de cette étude et de préciser les conditions d'utilisation de l'ALD.

2.5.1 État d'avancement de l'ALD au LAUM

La mesure de vitesse acoustique particulaire par ALD est un axe de recherche au LAUM depuis près de 8 ans. Pendant cette période de nombreuses études [7, 10, 16, 31] y ont été menées, visant, à terme, à doter le laboratoire d'un banc de mesure ALD standard et opérationnel utilisable pour les mesures en acoustique.

Dans un premier temps, le travail d'un stagiaire de DEA [31] a permis d'orienter les choix pour l'acquisition du matériel expérimental. Il propose de plus une revue de méthodes envisageables pour le traitement du signal Doppler reposant sur l'extraction de la fréquence instantanée : les Estimateurs de Différences de Phase (EDP) d'une part et les estimateurs basés sur les Distributions de Wigner-Ville (DWV) d'autre part. L'ensemble des traitements proposés a été testé sur des signaux synthétisés, d'amplitude constante et modulés sinusoïdalement en fréquence, ainsi que sur des signaux réels pour des vitesses acoustiques sinusoïdales.

Une première thèse [10], orientée vers la mesure de l'amplitude et de la phase de la vitesse particulaire acoustique sinusoïdale, a permis de mettre l'accent sur les méthodes d'estimation temps-fréquence et sur la validation des mesures. Dans cette étude Valeau évalue deux estimateurs : la DWVC et un estimateur spécifique appelé Détecteur Temps-Fréquence Synchrone (DTFS) de construction proche des distributions de Wigner-Ville polynomiales sur des signaux Doppler d'amplitude toujours constante [15, 36]. Les estimations de la vitesse acoustique sont ensuite validées à l'aide de mesures par ALD dans un guide d'ondes planes. Ceci permet la comparaison des résultats à partir de valeurs de références obtenues à l'aide d'un relevé de la pression en deux points du guide [58]. Ce travail de thèse a permis par ailleurs de proposer le modèle du signal Doppler, décrit par les équations (2.47) et (2.48) dans le cas d'un mouvement acoustique sinusoïdal.

L'étude de Poggi [7], quant à elle, est essentiellement consacrée aux différents aspects expérimentaux de la mesure par ALD. Elle a permis de caractériser le dispositif optique et ses réglages et d'évaluer les performances et les limites du matériel et des traitements existants [59, 60]. Il s'agit, d'une part, d'un matériel commercial, le BSA de la société DANTEC, et d'autre part d'un dispositif mis au point au LAUM dont le traitement s'articule autour d'une Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT). Enfin cette étude, limitée à des vitesses particulaires acoustiques sinusoïdales de fréquences comprises entre 200 Hz à 4000 Hz et de vitesses efficaces se situant entre 0,1 mm/s et 10 mm/s, se propose de valider les résultats de la mesure de la vitesse particulaire acoustique toujours dans l'hypothèse d'une excitation acoustique sinusoïdale [61, 62].

Plus récemment, dans le cadre de la thèse de Mellet [16], des techniques paramétriques de suivi de FI ont été testées et adaptées au problème de l'estimation de vitesse particulaire. Il s'agit principalement du filtre de Kalman et du formalisme du maximum de vraisemblance. Enfin une méthode bayésienne, utilisant les méthodes de Monte-Carlo par Chaîne de Markov

(MCMC) pour simuler la Densité de Probabilité (DdP) des paramètres du signal Doppler, a été proposée. Chacune de ces techniques a été évaluée à partir de l'hypothèse simplificatrice que le signal Doppler présente une amplitude constante.

2.5.2 Objectifs du travail

L'état actuel des avancées en ALD au LAUM, tant sur le plan de la mesure que sur le traitement du signal, permet d'envisager aujourd'hui plusieurs évolutions importantes : le passage à deux composantes permettant de cartographier le champ acoustique, la mesure en champ libre pour l'étude des champs proches rayonnés ainsi que la mesure prenant en compte à la fois la vitesse acoustique et une vitesse d'écoulement importante. Cependant, pour que l'ALD puisse être utilisée de manière efficace dans ce genre d'expérimentation, il convient d'imaginer un système de mesure de la vitesse particulaire simple d'utilisation, ne nécessitant qu'une expertise raisonnable de la part de l'expérimentateur et lui permettant d'accéder, rapidement et facilement, aux paramètres de la vitesse acoustique.

Les premières études menées au LAUM et exposées au paragraphe 2.5.1 ont eu pour but de valider la chaîne de mesure ALD et de proposer des algorithmes de traitement du signal dans un contexte de traitement différé (post-traitement). Ces différents travaux se sont limités, par ailleurs, à la mesure de signaux supposés d'amplitude constante[13] et de fréquence porteuse F_p petite devant F_B.

L'objectif de ce travail de thèse est alors de proposer des algorithmes de traitement du signal adaptés à l'estimation en temps-réel de la vitesse acoustique. Ceci nécessite de concevoir une architecture matérielle et logicielle rapide et capable de s'interfacer facilement avec une chaîne de mesure classique. D'autre part pour atteindre ce but il est nécessaire de s'appuyer sur un modèle décrivant un signal Doppler plus proche de la réalité prenant en compte, notamment, la présence de bruit ainsi que les effets de la modulation de l'amplitude.

Avant d'exposer les différentes options retenues susceptibles d'atteindre les objectifs fixés il est utile de se pencher sur la façon dont est utilisé l'ALD pour la mesure de vitesse acoustique.

2.5.3 Condition d'utilisation de l'ALD

Définition de la notion de traitement en temps réel

Dans un contexte de traitement du signal en temps réel il est nécessaire de préciser le sens donné à ce terme. En effet la notion de temps réel doit être définie relativement à une référence temporelle permettant de situer les événements les uns par rapport aux autres. Cette notion peut être définie, par exemple, soit par la physique ou encore par la puissance de calcul du système de traitement.

Du fait de la nature aléatoire des instants d'apparition des particules dans le volume de mesure il semble impossible de fournir de manière continue une mesure de la vitesse acoustique comme le ferait un microphone pour une mesure de la pression par exemple. Un tel traitement n'a d'intérêt que dans la mesure où il est possible de garantir la continuité du signal Doppler sur une durée suffisamment importante. La notion de traitement en *temps-réel* dans le cas de l'utilisation l'ALD pour l'acoustique ne peut donc pas être prise au même sens qu'en mécanique des fluides ou en vibrométrie laser par exemple. En effet dans ce dernier cas le caractère continu de la mesure, à savoir la présence permanente d'un signal Doppler d'amplitude non-nulle et variant lentement, autorise éventuellement un traitement *au fil de l'eau*.

13. sur une durée importante par rapport à la période acoustique.

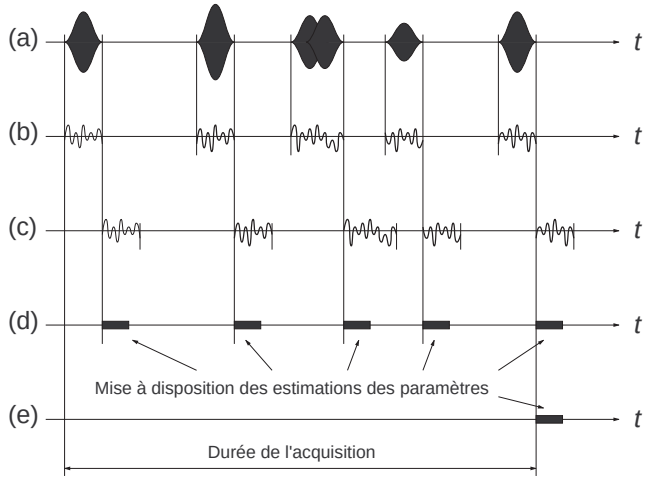

FIG. 2.14 – *Notion d'estimation en temps réel :* (a) *Séquence Doppler* - (b) *Estimation* en temps réel *de la vitesse acoustique* - (c) *Estimation* en ligne *de la vitesse acoustique* - (d) *Estimation* en ligne *des paramètres de la vitesse acoustique* - (e) *Estimation* différée *des paramètres de la vitesse acoustique.*

Dans le cas de l'utilisation des techniques ALD pour des applications de mécanique des fluides le signal perd ce caractère continu, même en présence d'un taux élevé d'apparitions de bouffées obtenu grâce à une forte concentration en particules du milieu. En acoustique ce phénomène est d'autant plus marqué que le signal subit des interruptions encore plus importantes. En effet, l'hypothèse d'une faible concentration en traceurs dans la zone de mesure conduit à observer un taux d'apparition des particules dans le volume de mesure faible. Ce taux dépend de l'espérance mathématique $E[t_j - t_{j-1}]$, *i.e.* de l'écart entre les dates associées aux passages de deux particules successives. Cette quantité, qui est à rapprocher de la notion de cadence d'acquisition utilisée dans les applications d'écoulement, peut présenter des valeurs de l'ordre de la seconde.

La figure 2.14 propose, dans le cas d'une séquence de six bouffées Doppler, quatre configurations correspondant chacune à quatre formes de disponibilité de la mesure.

cas (b) Correspond à une véritable estimation en temps réel, au sens habituellement entendu en électronique tout au moins, car il offre instantanément, ou avec un certain retard fixé, la forme de l'excitation acoustique.

cas (c) Propose, de manière différée cette fois ci, la même information.

cas (d) Permet de disposer d'une estimation des paramètres du signal acoustique après chaque bouffée.

cas (e) Même chose qu'en (d) mais à la suite d'une séquence comportant un certain nombre de bouffées.

Par ailleurs, du fait de la difficulté de prévoir l'instant d'apparition d'une particule dans le volume de mesure, il n'est pas exclu d'envisager le déclenchement d'un événement acoustique (signal d'excitation) dès que la présence d'une particule, susceptible de rétrodiffuser un signal véhiculant l'information recherchée, a été constatée.

L'examen de ces différents cas fait apparaître des conceptions différentes de la notion de disponibilité de la mesure. La prise en compte de la définition de temps réel est fondamentale dans cette étude car elle conditionne largement les solutions qui seront adoptées pour le traitement du signal ainsi que pour l'électronique de calcul.

Méthodes de traitement du signal envisageables

De manière très simplifiée il est possible de distinguer deux types d'approche pour le traitement des signaux Doppler : une approche non-paramétrique, catégorie à laquelle appartiennent les méthodes temps-fréquence largement étudiées au LAUM et une approche paramétrique. La nature de la vitesse acoustique $v(t)$ conditionne fortement le choix du type de traitement du signal devant être appliqué. Il est alors possible d'envisager trois cas de figure :

- la vitesse acoustique $v(k)$ est aléatoire : une analyse temps-fréquence est indispensable;
- la vitesse acoustique $v(k)$ n'est pas sinusoïdale mais elle est modélisable : les méthodes temps-fréquences et paramétriques peuvent convenir toutes les deux.
- la vitesse acoustique $v(k)$ est sinusoïdale : même si les méthodes temps-fréquences conviennent leur utilisation n'est plus très adaptée. L'usage de méthodes paramétriques s'impose alors.

Les différentes contraintes expérimentales qui viennent d'être évoquées doivent guider le choix des solutions à adopter pour le traitement du signal Doppler et orienter cette étude. Les lignes qui suivent exposent donc les principes retenus tant sur le plan du traitement numérique du signal que sur l'architecture du dispositif électronique de démodulation.

2.6 Orientations choisies et originalité du travail

L'ensemble des travaux de validation de la mesure de vitesses particulaires menées au LAUM jusqu'à présent repose sur l'hypothèse que le champ acoustique à scruter est excité par un signal sinusoïdal. Ainsi, dès à présent, et en tenant compte des remarques précédentes concernant les conditions d'utilisation de l'ALD, il est possible, pour cette application, de définir comme *temps-réelle* la procédure qui offre une estimation des paramètres de la vitesse immédiatement après la fin d'une bouffée Doppler et dans tous les cas au plus tard avant l'apparition de la bouffée suivante. Ce cas de figure correspond aux scénarios (d) et (e) des chronogrammes de la figure 2.14. Il est alors naturel de proposer l'adoption de méthodes paramétriques pour le traitement du signal doppler. Dans ces conditions l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique est réaliste et pourra satisfaire les besoins expérimentaux et les habitudes du LAUM en matière de mesure par ALD.

Les paragraphes qui suivent vont maintenant s'attacher à exposer et à justifier les grandes orientations prises pour ce travail à savoir

- l'emploi de méthodes d'estimation paramétriques;
- la prise en compte de l'amplitude variable du signal Doppler
- la translation du signal en bande de base, *i.e.* autour de la fréquence nulle, et le travail à partir de deux signaux en quadrature.

2.6.1 Utilisation de méthodes paramétriques

Les travaux de validation évoqués au paragraphe précédent, supposant l'existence d'une excitation sinusoïdale à la fréquence F_{ac} connue, ont permis d'établir et de valider un modèle précis du signal Doppler. Dans ce contexte l'emploi de méthodes paramétriques est alors tout indiqué. En effet le principe général des méthodes d'estimation paramétriques, illustré par la figure 2.15, repose sur la recherche d'un ensemble de paramètres, sensés représenter au mieux le signal, à partir d'une observation bruitée s [18, 45, 63]. Le problème de l'estimation consiste à ajuster un modèle mathématique supposé $\hat{s}$ du signal de telle façon à minimiser une certaine

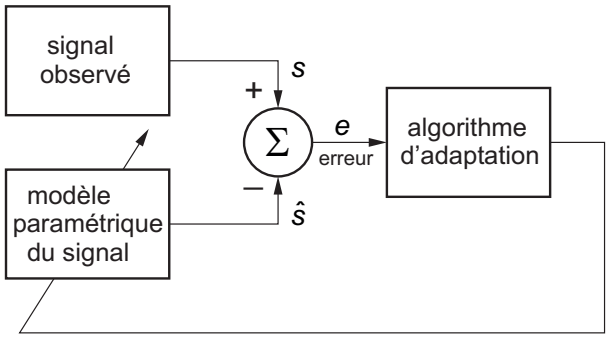

FIG. 2.15 – *Principe général des méthodes d'estimation paramétriques.*

distance séparant l'estimation et la grandeur à estimée (erreur d'estimation). Une distance adoptée fréquemment est la distance quadratique moyenne[14].

Deux approches paramétriques ont été étudiées dans le cadre de ce travail. La première propose d'estimer les paramètres de la vitesse acoustique à l'aide d'un estimateur à maximum de vraisemblance (MLE). Comme cette technique nécessite d'être initialisée, un estimateur sous-optimal, mais efficace d'un point de vue numérique, a été développé. Il est basé sur l'association d'un dérivateur de la phase du signal Doppler, permettant d'extraire la vitesse, et d'un détecteur synchrone fournissant les paramètres de la vitesse. La seconde approche, particulièrement adaptée à la mesure en temps-réel, est basée sur la technique de filtrage optimal de Kalman étendu au cas des systèmes non-linéaires, appelée usuellement filtre de Kalman étendu ou Extended Kalman Filter (EKF).

Les formes analytiques approchées des bornes de Cramer-Rao pour les estimées des paramètres de la vitesse acoustique calculées préalablement permettent enfin la comparaison des performances des deux techniques en terme de variance d'estimation.

2.6.2 Prise en compte de l'amplitude variable

Le contexte expérimental ainsi que les orientations choisies pour l'analyse du signal Doppler pendant les premiers travaux menés au LAUM ont conduit les expérimentateurs à ne pas tenir compte de l'amplitude variable du signal Doppler et donc à considérer $A(t)$ constant ($A(t) = K$). Cette hypothèse, vérifiée lorsque l'on s'intéresse à de faibles déplacements particulaires et pour des durées d'analyse courtes au regard de la période acoustique [7, 10], n'est plus valable dans le cas où la vitesse présente, par exemple, une composante d'écoulement V_{ec} importante. La durée d'une bouffée Doppler ne peut plus être alors considérée comme très grande devant la période acoustique. D'autre part, comme le montre la relation (2.40), l'amplitude du signal Doppler véhicule une part de l'information de vitesse.

Lorsque l'on cherche à estimer les paramètres de la vitesse acoustique par des méthodes non-paramétriques, l'amplitude variable du signal Doppler est souvent perçue comme un terme perturbateur venant gêner la mesure. Dans le cas d'un traitement paramétrique il est important, au contraire, d'exploiter le maximum d'informations disponibles *a priori* sur le signal soumis à l'analyse et d'intégrer $A(t)$ dans la procédure d'estimation.

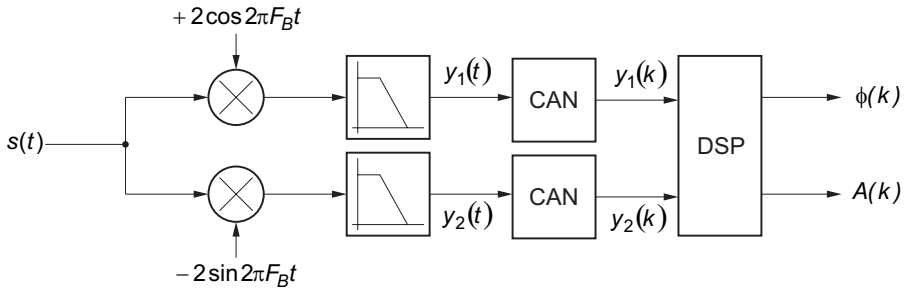

FIG. 2.16 – *Démodulation en quadrature.*

2.6.3 Translation du signal en bande de base

Le traitement du signal Doppler, impose d'utiliser, à terme, une carte de traitement du signal dotée, notamment, de Convertisseurs Analogiques Numériques (CAN). Un traitement en temps réel des informations nécessite alors que le débit de données numériques délivrées par les CAN ne soit pas trop important. La fréquence d'échantillonnage F_e doit être alors choisie la plus faible possible tout en restant compatible avec le théorème fondamental de l'échantillonnage [18]. Pour atteindre cet objectif, il est proposé, dans un premier temps, de ramener en *bande de base* le spectre de puissance de $s(t)$ en effectuant une démodulation en quadrature de ce signal. Le schéma de la figure 2.16 illustre le principe de ce traitement et définit les signaux d'observation $y_1(t)$ et $y_2(t)$ présentant tous les deux un spectre de type passe-bas. Ces deux signaux sont ensuite échantillonnés puis traités par le DSP qui délivre en sortie une estimation de l'amplitude de la vitesse particulaire acoustique $\widehat{V}_{ac}$ ainsi que sa phase $\widehat{\phi}_{ac}$.

Cette étape, équivalente à la détermination du signal analytique associé au signal Doppler, est également nécessaire à la mise en œuvre des techniques d'estimations temps-fréquence décrites au paragraphe 2.4.2. Dans ce dernier cas le calcul numérique de la transformée de Hilbert du signal est indispensable mais pose un certain nombre de problèmes sur le plan pratique : calcul de la transformée de Fourier du signal Doppler, annulation de son spectre correspondant aux valeurs négatives de la fréquence et, enfin, calcul de la transformée de Fourier inverse du résultat obtenu. Le calcul de la transformée de Hilbert peut également s'opérer de manière approchée dans le domaine temporel par l'intermédiaire d'une convolution à l'aide d'un filtre à réponse impulsionnelle finie (Finite Impulse Response - FIR).

Modèle du signal Doppler ramené en bande de base

Un autre intérêt de la représentation du signal Doppler en quadrature est la possibilité d'accéder à la FI, autrement dit à la vitesse, par l'intermédiaire de l'opérateur arctangente. Ceci n'a toutefois de sens qu'à la condition que cette représentation soit unique, ce qui n'est le cas que si les spectres de $A(t)$ et de $\cos\phi(t)$ présentent des supports disjoints [18, 64]. Le signal Doppler, décrit par l'équation (2.47), vérifie ces conditions en pratique. En effet la fréquence porteuse imposée par la cellule de Bragg vaut $F_B = 40$ MHz pour une demi largeur de bande B' qui, comme cela a été montré à la section 2.3.5 (figure 2.11), atteint approximativement la valeur limite de 50 kHz pour une amplitude de la vitesse acoustique égale à 50 mm/s. L'amplitude $A(t)$ est donc de type *passe-bas* de spectre limité au support fréquentiel $[-B,+B] = [-10F_{ac},+10F_{ac}]$ et $\cos\phi(t)$ de type *passe-bande* occupant le domaine $[-F_B-B',-F_B+B'] \bigcup [+F_0-B',+F_0+B']$ avec $F_B \gg B+B'$ comme l'illustre la figure 2.17.

14. ou erreur quadratique moyenne.

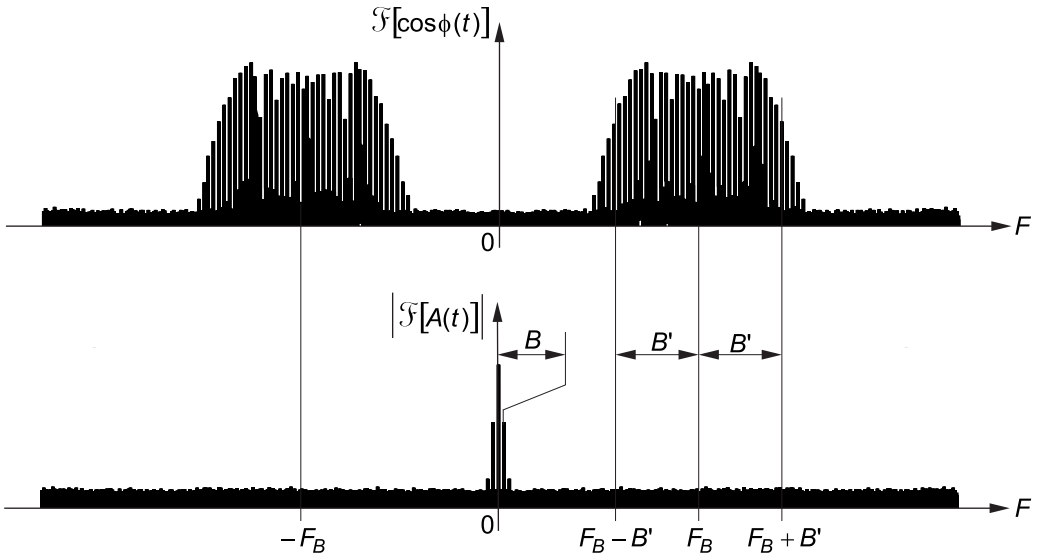

FIG. 2.17 – *Comparaison des largeurs spectrales de* $A(t)$ *et de* $\cos\phi(t)$.

Les filtres passe-bas ont des fréquences de coupure $F_c < F_{\mathrm{B}}$ et servent aussi de filtres anti-repliement. En choisissant des valeurs de F_c élevées par rapport à la fréquence acoustique F_{ac} et aux excursions en fréquence dues à la modulation de fréquence, une bonne approximation des signaux $y_1(t)$ et $y_2(t)$ est donnée par

$$y_1(t) = A(t)\cos\phi(t) \tag{2.53}$$
$$y_2(t) = A(t)\sin\phi(t), \tag{2.54}$$

équations qui peuvent encore s'écrire, en tenant compte des relations (2.21) et (2.48)

$$y_1(t) = K\exp\left\{-\left[\beta x(t)\right]^2\right\}\cos[2\pi Dx(t)+\phi_0] \tag{2.55}$$
$$y_2(t) = K\exp\left\{-\left[\beta x(t)\right]^2\right\}\sin[2\pi Dx(t)+\phi_0]. \tag{2.56}$$

Après échantillonnage à la fréquence F_e, le DSP reçoit du CAN les différents échantillons des signaux à temps discret $y_1(kT_e)$ et $y_2(kT_e)$ où T_e désigne la période d'échantillonnage. Pour simplifier les notations l'écriture $y_1(kT_e) = y_1(k)$ et $y_2(kT_e) = y_2(k)$ sera adoptée dans la suite de ce document. En supposant que ces deux observations sont bruitées par deux processus aléatoires blancs, gaussiens et de valeurs moyennes nulles les équations d'observation (2.53) et (2.54) deviennent

$$y_1(k) = A(k)\cos\phi(k) + b_1(k) \tag{2.57}$$
$$y_2(k) = A(k)\sin\phi(k) + b_2(k) \tag{2.58}$$

où

$$A(k) = K\exp\left\{-\left[\beta x(k)\right]^2\right\}, \tag{2.59}$$
$$x(k) = V_{\mathrm{ec}}kT_e + \frac{V_{\mathrm{ac}}}{2\pi F_{\mathrm{ac}}}\sin(2\pi f_{\mathrm{ac}}k+\phi_{\mathrm{ac}}) - V_{\mathrm{ec}}t_0, \tag{2.60}$$

et

$$\phi(k) = 2\pi Dx(k) + \phi_0 \tag{2.61}$$

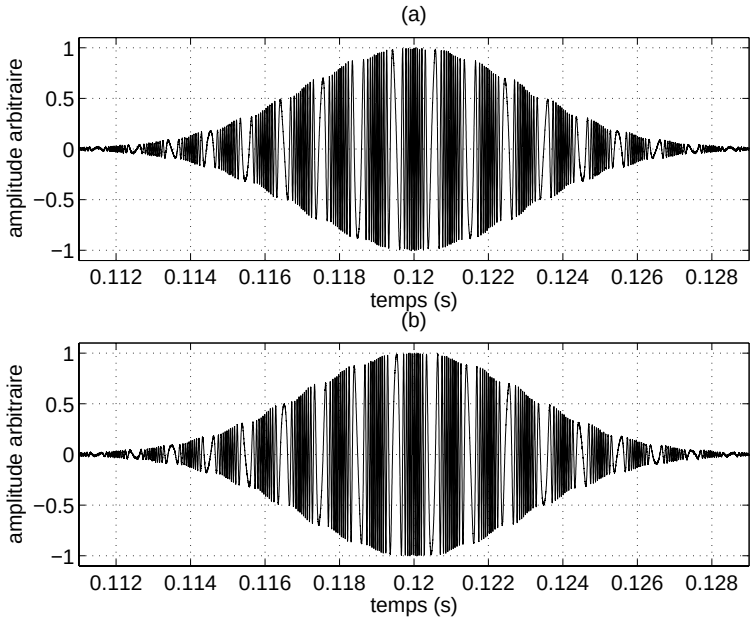

FIG. 2.18 – *Visualisation des deux signaux d'observation en quadrature : signal en phase* $y_1(k)$ (a)*, signal en quadrature* $y_2(k)$ (b). $F_{\text{ac}} = 1000$ Hz*,* $V_{\text{ac}} = 10$ mm/s *et* $V_{\text{ec}} = 12$ mm/s.

est la phase instantanée des signaux $y_1(k)$ et de $y_2(k)$ et

$$f_{\text{ac}} = \frac{F_{\text{ac}}}{F_{\text{e}}} \tag{2.62}$$

désigne la fréquence acoustique réduite. Dans les relations (2.57) et (2.58)

$$b_1(k) \sim \mathcal{N}(0,\sigma_1^2) \tag{2.63}$$

et

$$b_2(k) \sim \mathcal{N}(0,\sigma_2^2) \tag{2.64}$$

sont deux bruits blancs à moyennes nulles et de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2 issues toutes deux du bruit décrit au paragraphe 2.3.4. Ces bruits, de spectres passe-bas, observés à la sortie des voies en quadrature sont indépendants et présentent une même variance [18]

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2. \tag{2.65}$$

La figure 2.18 montre, à titre d'exemple, l'allure des deux signaux d'observation $y_1(k)$ et $y_2(k)$ simulés à partir des équations (2.57) et (2.58).

Évolution du RSB avec la démodulation

Le RSB du signal Doppler observé à la sortie du photomultiplicateur est donné par l'équation (2.43)

$$\text{RSB} \triangleq \frac{K^2}{2\sigma_p^2}. \tag{2.66}$$

Dans cette relation σ_p^2 représente la puissance de bruit, P_b. Cette puissance, qui dépend de la largeur de la bande passante, B_p, du photomultiplicateur, peut aussi s'exprimer par

$$P_b = N_0 B_b \tag{2.67}$$

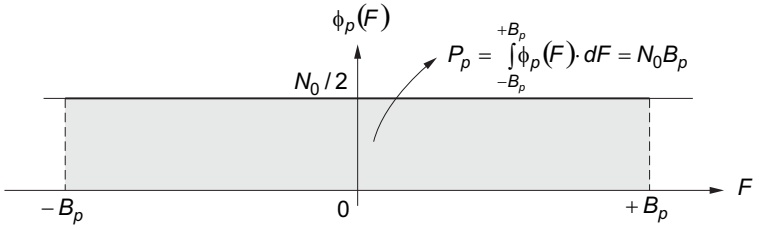

FIG. 2.19 – *Notion de puissance de bruit.*

où $N_0/2$ est l'amplitude de la densité spectrale de puissance de bruit, $\phi_p(F)$ comme l'illustre la figure 2.19. Si les signaux $y_1(t)$ et $y_2(t)$ présentent une largeur de bande B_y et un rapport signal sur bruit RSB_y, le facteur de forme F, donnant le rapport entre les RSB avant et après démodulation, vaut [17]

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{RSB}_p}{\mathrm{RSB}_y} = \frac{B_y}{B_p}. \tag{2.68}$$

Comme la bande passante du photomultiplicateur est nettement plus importante que la fréquence de coupure des filtres passe-bas du démodulateur, l'opération de démodulation en quadrature est très favorable du point de vue RSB. En effet, à titre d'exemple, pour une largeur de bande B_p du photodétecteur de l'ordre de 100 MHz et une fréquence de coupure des filtres passe-bas du démodulateur de l'ordre de 10 MHz le facteur de forme F est proche de 1/10. Cette valeur correspond à une différence de l'ordre de -10 dB entre les RSB avant et après démodulation.

2.6.4 Utilisation d'une boucle à verrouillage de phase

Pour terminer cette partie il faut signaler que l'utilisation d'une PLL analogique pour l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique a été envisagée. Cet intérêt se justifie naturellement par la culture *électronique et télécommunication* forte développée à l'ESEO. Cette technique, qui peut être vue comme une estimation adaptative de la FI du signal Doppler, est très largement employée en télécommunication et est particulièrement adaptée à la démodulation de signaux HF[15] modulés en fréquence. Les résultats de ces réflexions ont été présentés au congrès *IEEE Instrumentation and Measurement* qui c'est tenu à Budapest en mai 2001. Le travail présenté [65] décrit un système d'extraction de la vitesse acoustique par la démodulation de fréquence du signal Doppler à partir d'une PLL et l'estimation des paramètres de cette vitesse à l'aide d'un démodulateur en quadrature synchronisé sur la fréquence acoustique. Cependant cette étude n'a pas été poussée plus loin car les méthodes basées sur l'utilisation de PLL souffrent, de par leurs natures analogiques, d'un manque de souplesse dans les réglages des différents paramètres. De plus elles ne sont pas vraiment adaptées à la mesure de signaux dont l'amplitude varie rapidement et en particulier pour lesquels une vitesse d'écoulement V_{ec} élevée engendre des signaux de courte durée. En effet le fonctionnement d'une PLL nécessite une période d'accrochage qui dans certaines configurations peut être importante vis à vis de la période acoustique. Ce régime transitoire n'est donc pas toujours compatible avec des mesures en ALD. L'article présentant l'ensemble de ce travail est disponible à l'annexe B.

15. Hautes Fréquences

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre les principes généraux de l'ALD ont été présentés. Plusieurs formalismes ont été donnés conduisant tous à un modèle simple du signal Doppler. Un modèle complet et précis de ce signal à été décrit dans le cas particulier de mesures en acoustique et avec l'hypothèse de l'excitation du champ acoustique par une source sinusoïdale. Une recherche bibliographique a permis de constater le faible volume des études consacrées à l'extension de l'ALD pour la mesure dans le domaine de l'acoustique, les principales sources d'information provenant essentiellement des études précédemment menées au LAUM. Ceci s'explique essentiellement par l'usage encore peu répandu de l'ALD pour la mesure de vitesse acoustique. Enfin, l'examen des conditions d'utilisations expérimentales ainsi que les besoins du laboratoire ont permis de définir le contexte de ce travail et ont ensuite guidé le choix des solutions à adopter pour la mesure de la vitesse acoustique particulaire par ALD :

- utilisation de méthodes d'estimation paramétriques;
- prise en compte de l'amplitude variable du signal Doppler;
- traitement à partir de deux signaux d'observation en quadrature et en bande de base;
- mesures en temps-réel.

Chapitre 3

Estimation des paramètres de la vitesse acoustique

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des méthodes d'estimations des paramètres de la vitesse acoustique. Dans un premier temps les formes analytiques approchées des bornes de Cramer-Rao sur les estimées des paramètres sont données. Il faut rappeler que les CRB, lorsqu'elles sont disponibles, donnent les limites inférieures des variances de tout estimateur non biaisé [37, 45, 66, 67]. Leur examen est donc intéressant à plus d'un titre : il autorise en premier lieu la comparaison des performances relatives des différents estimateurs mis en œuvre en terme de précision de mesure. Il permet de plus de déterminer et de comprendre l'influence des différents paramètres du signal Doppler sur la qualité des estimations.

Dans un second temps un estimateur basé sur la dérivée de la phase (Phase Derivative-Based Estimator - PDBE) du signal Doppler est décrit. Celui-ci n'appartient pas à la famille des estimateurs paramétriques et ne nécessite donc pas de connaissances *a priori* sur le signal Doppler. Il est de plus sous-optimal mais non biaisé. Cet estimateur est malgré tout étudié car il présente l'avantage d'être très simple d'un point de vue algorithmique et peut être suffisant pour la mise au point d'un système faible coût et temps réel. Il permettra par la suite d'initialiser une procédure d'estimation basée sur le principe du maximum de vraisemblance et présentée dans les lignes suivantes.

L'estimateur par maximum de vraisemblance ou MLE (Maximum Likelihood Estimator) représente une des meilleures procédures d'estimation des paramètres de la vitesse acoustique à condition toutefois que le modèle théorique des signaux d'observation soit correct [45]. Le principe de cette méthode consiste à estimer le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ des paramètres à partir d'un nombre fini d'échantillons des signaux d'observation regroupés dans le vecteur $\mathbf{y}$. Le MLE est obtenu en rendant maximum, par rapport à $\boldsymbol{\theta}$, la fonction de vraisemblance notée $p(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})$. Cette fonction présentant des maxima locaux la procédure d'estimation est initialisée par le PDBE, estimateur sous-optimal évoqué ci-dessus.

La dernière méthode d'estimation proposée dans ce travail est basée sur le filtrage de Kalman étendu ou EKF (Extended Kalman Filter). Son principe repose sur deux idées principales : l'emploi de l'estimation récurrente permettant des calculs rapides et la représentation du signal à l'aide d'équations d'état. Il constitue une généralisation du filtrage de Wiener aux cas des signaux non-stationnaires, et peut être vu comme un estimateur séquentiel au sens des moindres carrés d'un signal bruité caractérisé par un modèle dynamique [45]. Les lignes qui suivent permettent de situer ces deux dernières méthodes d'estimation dans un contexte probabiliste.

3.2 Approche probabiliste de l'estimation

3.2.1 Approche bayésienne

Le problème général de l'estimation statistique consiste à déterminer les paramètres θ_i, regroupés dans un vecteur noté $\boldsymbol{\theta}$, aléatoires ou éventuellement déterministes mais inconnus, d'un signal $s(k)$ à partir d'une mesure $y(k)$ perturbée par du bruit. Cette détermination est conduite en exploitant les données issues de la mesure et constituant un vecteur d'observation $\mathbf{y}$. Une des règles fondamentales de la théorie de l'estimation stipule que les estimations sont d'autant plus précises que la quantité d'information disponible *a priori* sur la nature du signal, ou du système lui ayant donné naissance, est importante.

Dans une approche probabiliste de l'estimation, la connaissance de la densité de probabilité (DdP) *a posteriori*[1] $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ donne en principe la solution du problème. En effet cette fonction résume toute l'information statistique sur $\boldsymbol{\theta}$ contenue dans les observations disponibles ainsi que dans les conditions initiales [68]. L'estimation au sens de Bayes considère en particulier que $\boldsymbol{\theta}$ est une variable aléatoire dont une réalisation particulière doit être estimée. Cette approche s'appuie sur la loi de Bayes

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})} \tag{3.1}$$

et nécessite donc de connaître $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ représentant la DdP de la fonction d'observation conditionnellement à $\boldsymbol{\theta}$ ainsi que la DdP $p(\boldsymbol{\theta})$ du vecteur de paramètres à estimer.

La méthode d'estimation de Bayes consiste alors à associer à l'erreur d'estimation $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}$, où $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ représente l'estimation du vecteur $\boldsymbol{\theta}$, une fonction de coût, ou critère de pondération de l'erreur, $c(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})$, dont la valeur moyenne, appellée encore *risque*, $\mathrm{E}[c(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})]$, doit être minimisée. De nombreux critères sont utilisables dans la pratique :

- le critère de pondération uniforme en dehors d'une certaine zone qui donne le maximum de la DdP *a posteriori*;
- le critère de la valeur absolue $c(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = \|\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}\|$ donnant la médiane de la DdP *a posteriori*;
- le critère quadratique $c(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = \|\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}\|^2$ donnant l'erreur quadratique moyenne.

Par ailleurs, dans le cas où la DdP est de nature gaussienne, ces trois critères conduisent au même estimateur puisque le maximum, la médiane et la moyenne sont alors confondus [18, 45, 68].

Dans le cas du critère quadratique, très utilisé dans la pratique, le risque exprime donc l'erreur quadratique moyenne. L'estimation optimale $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$ correspond alors à la valeur moyenne de la DdP conditionnelle $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ [45].

3.2.2 Estimateur par maximum de vraisemblance

Lorsque le paramètre $\boldsymbol{\theta}$ est inconnu mais non-aléatoire, cas de figure correspondant au signaux Doppler auxquels s'intéresse ce travail, l'estimateur de Bayes ne peut plus être utilisé dans la mesure où la DdP *a priori* $p(\boldsymbol{\theta})$ n'est pas disponible. Dans ce cas $p(\boldsymbol{\theta})$ et $p(\mathbf{y})$ sont inconnues mais constantes par rapport à $\boldsymbol{\theta}$. En l'absence d'information *a priori* sur $\boldsymbol{\theta}$ le problème de maximisation de $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ revient alors à la maximisation de $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ et la procédure d'estimation doit se baser sur la seule connaissance de cette DdP.

1. c'est à dire après la réalisation de la mesure.

Cette fonction dispose alors de deux interprétations :

- avant que la mesure ait été réalisée, $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ représente la DdP des observations $\mathbf{y}$ conditionnelle au vecteur de paramètre $\boldsymbol{\theta}$;
- Une fois la mesure effectuée les valeurs de $\mathbf{y}$ sont connues alors que $\boldsymbol{\theta}$ est inconnu. Dans ce cas, de manière à souligner la dépendance de la DdP vis à vis des valeurs observées, la notation suivante est adoptée :

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}). \tag{3.2}$$

$p(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})$ est alors appelée *fonction de vraisemblance* et ne dépend uniquement que du vecteur de paramètre $\boldsymbol{\theta}$.

L'estimation par maximum de vraisemblance consiste alors à déterminer la valeur de $\boldsymbol{\theta}$ qui rend $p(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})$ maximum. Le paragraphe 3.5 présente plus en détail cette méthode d'estimation dont le principe est appliqué à la détermination des paramètres, inconnus, de la vitesse acoustique.

3.2.3 Méthode des moindres carrés

Si, maintenant, aucune hypothèse n'est émise sur les propriétés ou les formes des DdP $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ et $p(\boldsymbol{\theta})$ il devient impossible de mettre en œuvre les techniques bayésiennes ou du maximum de vraisemblance. Dans ce cas la méthode d'estimation la plus couramment adoptée consiste à choisir le vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ qui minimise un critère, $J(\boldsymbol{\theta})$ représenté le plus souvent par l'erreur quadratique moyenne entre les signaux observés $y(k)$ et les signaux simulés, $y(k;\boldsymbol{\theta})$, à l'aide d'un modèle et d'un jeu de paramètres. Il est alors possible d'écrire

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_k \left\{ [y(k) - y(k;\boldsymbol{\theta})]^2 \right\}. \tag{3.3}$$

Cette méthode s'identifie encore aux techniques de lissage de données par minimisation d'une erreur quadratique. Comme dans le cas des techniques bayésiennes ou par maximum de vraisemblance cette méthode nécessite une étape d'optimisation qui peut parfois être difficile à réaliser à cause de la présence de minima locaux sur $J(\boldsymbol{\theta})$. Par ailleurs, son utilisation ne nécessite que la seule connaissance du modèle du signal dont les paramètres sont recherchés et fonctionne aussi bien dans le cas gaussien que dans le cas non-gaussien.

Cependant il convient de noter que, sous certaines conditions, les différences qui semblent être mises en évidence entre ces méthodes ne sont pas aussi importantes qu'il n'y paraît [68]. En effet, lorsque les seuls perturbations du signal $y(k)$ se traduisent par un bruit blanc additif gaussien, il est possible de montrer que la méthode des moindres carrés est équivalente à la l'estimateur par maximum de vraisemblance [69, 70].

3.3 Bornes de Cramer-Rao

Les expressions des signaux d'observation suivent les modèles théoriques (2.53) et (2.54) présentés au paragraphe 2.6.3. Ces équations ont été établies sur la base de l'analyse des phénomènes physiques conduisant à la formation du signal Doppler puis de sa version ramenée en bande de base. En remplaçant $\phi(k)$ et $A(k)$ par leurs expressions il est possible de constater que les signaux d'observation sont entièrement définis par les trois paramètres V_{ac}, ϕ_{ac} et V_{ec}. Ces valeurs peuvent être regroupées dans un seul vecteur de paramètres

$$\boldsymbol{\theta} = [V_{\text{ac}}, \phi_{\text{ac}}, V_{\text{ec}}]^T = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T \ . \tag{3.4}$$

Afin de simplifier les notations les vecteurs à $N+1$ éléments sont introduits :

$$\mathbf{y_1} = [y_1(k_1), \cdots, y_1(k_2)]^T \tag{3.5}$$
$$\mathbf{y_2} = [y_2(k_1), \cdots, y_2(k_2)]^T \tag{3.6}$$

pour les signaux d'observation,

$$\mathbf{s_1} = [s_1(k_1), \cdots, s_1(k_2)]^T \tag{3.7}$$
$$\mathbf{s_2} = [s_2(k_1), \cdots, s_2(k_2)]^T \tag{3.8}$$

pour la partie *utile* du signal Doppler et

$$\mathbf{b_1} = [b_1(k_1), \cdots, b_1(k_2)]^T \tag{3.9}$$
$$\mathbf{b_2} = [b_2(k_1), \cdots, b_2(k_2)]^T \tag{3.10}$$

pour le bruit. Les composantes en phase et en quadrature sont alors repérées respectivement par les indices 1 et 2. Par ailleurs $.^T$ désigne l'opérateur de transposition des matrices et $k_2 - k_1 = N$.

En notation vectorielle les signaux d'observation s'écrivent donc

$$\mathbf{y_1} = \mathbf{s_1} + \mathbf{b_1} \tag{3.11}$$
$$\mathbf{y_2} = \mathbf{s_2} + \mathbf{b_2}. \tag{3.12}$$

Les deux vecteurs (3.11) et (3.12) sont regroupés pour ne former qu'un seul vecteur contenant l'ensemble des informations nécessaires à la détermination des CRB :

$$\mathbf{y} = \left[\mathbf{y_1}^T, \mathbf{y_2}^T\right]^T. \tag{3.13}$$

Le signal d'observation s'écrit alors de manière compacte

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{b} \tag{3.14}$$

avec

$$\mathbf{s} = \left[\mathbf{s_1}^T, \mathbf{s_2}^T\right]^T \tag{3.15}$$
$$\mathbf{b} = \left[\mathbf{b_1}^T, \mathbf{b_2}^T\right]^T. \tag{3.16}$$

3.3.1 Fonction de vraisemblance

En supposant que les bruits d'observation $b_1(t)$ et $b_2(t)$ sont de nature gaussienne, additive et blanche la densité de probabilité (DdP) des observations est donnée par

$$p(\mathbf{y_1}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=k_1}^{k=k_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_1(k) - s_1(k)]^2\right\} \tag{3.17}$$
$$p(\mathbf{y_2}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=k_1}^{k=k_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_2(k) - s_2(k)]^2\right\} \tag{3.18}$$

où σ^2 représente la puissance de bruit. Comme $y_1(k)$ et $y_2(k)$ sont indépendants il vient

$$p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{y_1}; \boldsymbol{\theta}) \cdot p(\mathbf{y_2}; \boldsymbol{\theta}). \tag{3.19}$$

La fonction de densité de probabilité du signal d'observation s'écrit alors de manière plus compacte

$$p(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{y_1}-\mathbf{s_1}\|^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{y_2}-\mathbf{s_2}\|^2\right\}. \tag{3.20}$$

Dans cette dernière relation $\|\cdot\|$ désigne la norme sur $\mathbb{R}^{N+1}$, avec

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{k=k_1}^{k=k_2}[x(k)]^2. \tag{3.21}$$

Cette DdP est une fonction des paramètres inconnus $\boldsymbol{\theta}$ pour une observation $\mathbf{y}$ fixée. La fonction de vraisemblance est donc donnée par la relation (3.20). La fonction logarithme étant monotone il est souvent plus aisé de travailler avec la fonction de vraisemblance logarithmique donnée par

$$\wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = \ln[p(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})] \tag{3.22}$$

soit

$$\wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = -(N+1)\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{y_1}-\mathbf{s_1}\|^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{y_2}-\mathbf{s_2}\|^2. \tag{3.23}$$

$\wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})$ représente d'une certaine façon la différence existant entre le vecteur regroupant les observations $\mathbf{y_1}$ et $\mathbf{y_2}$ et le vecteur décrivant le modèle théorique des parties utiles $\mathbf{s_1}$ et $\mathbf{s_2}$ des signaux en quadrature. Cette fonction fournit une mesure, en fonction des paramètres θ_i, de la ressemblance entre les signaux observés et les signaux théoriques.

3.3.2 Matrice de Fisher

La matrice des CRB s'obtient en inversant la matrice d'information de Fisher (FIM [2]) définie par

$$[\mathrm{I}(\boldsymbol{\theta})]_{ij} = -E\left[\frac{\partial^2 \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right] \tag{3.24}$$

avec i = 1,2,3 et j = 1,2,3. L'annexe A montre que cette matrice 3 × 3 peut s'écrire

$$\mathbf{I}(\theta) = \frac{4}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'^2_{\theta_1}(k) & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_1}(k)x'_{\theta_2}(k) & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_1}(k)x'_{\theta_3}(k) \\ \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_2}(k)x'_{\theta_1}(k) & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'^2_{\theta_2}(k) & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_2}(k)x'_{\theta_3}(k) \\ \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_3}(k)x'_{\theta_1}(k) & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_3}(k)x'_{\theta_2}(k) & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'^2_{\theta_3}(k) \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

avec

$$C(k) = A^2(k)\left[B_1^2(k)+B_2^2(k)\right], \tag{3.26}$$

$$B_1(k) = \beta^2 x(k)\cos\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right] + \pi D\sin\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right], \tag{3.27}$$

$$B_2(k) = \beta^2 x(k)\sin\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right] - \pi D\cos\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right], \tag{3.28}$$

$$x'_{\theta_i}(k) = \frac{\partial x(k)}{\partial\theta_i}. \tag{3.29}$$

2. Fisher Information Matrix

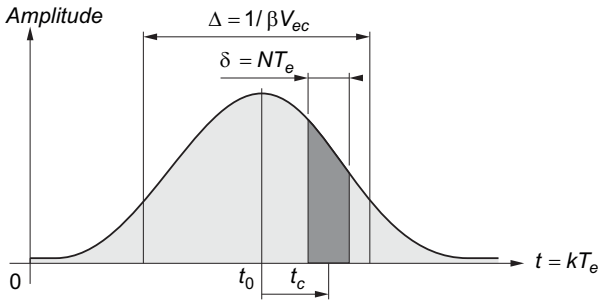

FIG. 3.1 – *Durée du signal Doppler Δ, durée d'analyse δ et décalage temporel t_c, de la fenêtre d'analyse.*

3.3.3 Matrice de Fisher approchée

L'inversion de la matrice de Fisher, permettant d'obtenir les bornes de Cramer-Rao sur les trois paramètres, s'avère très fastidieuse et ne peut s'obtenir que numériquement dans la pratique. Ce travail n'est d'ailleurs pas indispensable car il est possible, moyennant la prise en compte de quelques hypothèses, de simplifier la forme de $\mathbf{I}(\theta)$. L'ensemble de ces opérations, détaillé en annexe A et dans [71], permet d'aboutir à la matrice de Fisher simplifiée suivante :

$$\mathbf{I}(\theta) \approx \frac{4}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k) x'^2_{\theta_1}(k) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k) x'^2_{\theta_2}(k) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k) x'^2_{\theta_3}(k) \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

L'inversion de cette matrice est immédiate et conduit aux expressions des CRB, correspondant aux éléments $[\mathbf{I}^{-1}(\theta)]_{ii}$ de la diagonale de $\mathbf{I}^{-1}(\theta)$:

$$\mathrm{CRB}(\theta_i) = [\mathbf{I}^{-1}(\theta)]_{ii} = \frac{\sigma^2}{4} \left[\sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k) x'^2_{\theta_i}(k) \right]^{-1}. \tag{3.31}$$

3.3.4 Influence des paramètres de l'acquisition du signal sur les CRB

Les CRB décrites par l'équation (3.31) ont été obtenues sans tenir compte de la manière avec laquelle le signal est acquis de part et d'autre de t_0, instant correspondant au maximum du signal Doppler. Or, dans le cas général, les valeurs de ces bornes dépendent du nombre $N+1$ d'échantillons enregistrés ainsi que de la position t_c de la fenêtre d'acquisition par rapport à celle du signal Doppler. La figure 3.1 illustre ces notions de durée d'acquisition, δ, et de décalage temporel, t_c, de la fenêtre d'analyse par rapport au maximum de l'enveloppe du signal Doppler ainsi que la largeur temporelle d'une bouffée Doppler définie ici arbitrairement par la quantité

$$\Delta = 1/\beta V_{\mathrm{ec}}. \tag{3.32}$$

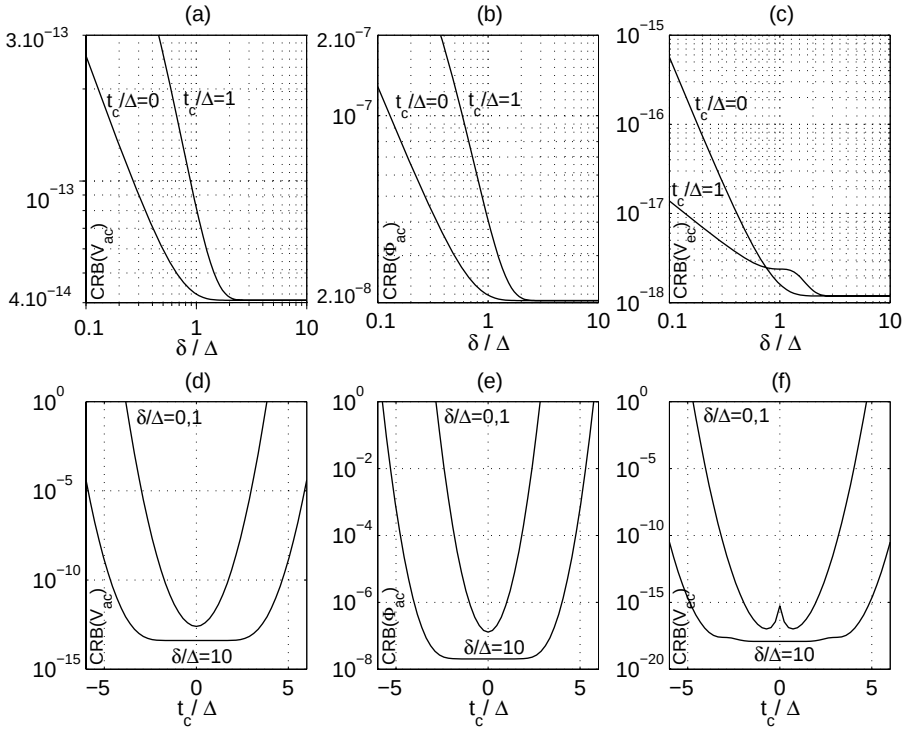

FIG. 3.2 – *Influence de la valeur relative t_c/Δ de la position du centre de la fenêtre d'analyse sur* CRB(V_{ac}) (a), CRB(ϕ_{ac}) (b) *et* CRB(V_{ec}) (c). *Influence de la durée relative d'analyse δ/Δ sur* CRB(V_{ac}) (d), CRB(ϕ_{ac}) (e) *et* CRB(V_{ec}) (f).

En effet la durée du signal Doppler est d'autant plus importante que les dimensions $1/\beta$ du volume de mesure sont grandes et que la vitesse d'écoulement V_{ec} est faible.

La figure 3.2 montre l'influence des paramètres δ et t_c sur les valeurs des CRB. Elle indique en particulier que le choix de t_c est critique pour les valeurs des CRB lorsque la durée de l'analyse δ, donc le nombre d'échantillons retenus, est faible.

La figure 3.2 (d), (e), (f) montre qu'à l'exception de CRB(V_{ec}) les CRB minimales sont obtenues pour un décalage nul, c'est à dire pour $t_c = 0$. Ceci correspond à des amplitudes importantes du signal Doppler et donc à un meilleur RSB local.

Comme il était prévisible les estimations des paramètres de la vitesse sont d'autant plus précises que la durée d'analyse δ est importante c'est à dire que le nombre d'échantillons $N+1$ retenus pour l'analyse est important, les CRB atteignant d'ailleurs des valeurs minimales limites pour N suffisamment important comme le montre la figure 3.2 (a), (b), (c). Dans ce dernier cas de figure les observations comportent la totalité du signal Doppler et le choix de t_c n'est plus critique vis à vis des précisions attendues. Ces observations ont une importance capitale pour le dimensionnement du système d'acquisition. Par ailleurs, le comportement des CRB vis à vis de la dimension et de la position de la fenêtre d'analyse est à rapprocher des phénomènes constatés par GALTIER [8], pour des signaux Doppler de nature différente toutefois[3]. La suite de cette étude supposera que le signal Doppler est acquis symétriquement autour de t_0, cette condition permettant d'atteindre les meilleurs performances d'estimation. Dans le but de simplifier les notations t_0 est choisi arbitrairement égal à zéro, *i.e.* $t_0 = 0$, condition qui devra être réalisée par le système chargé de détecter la présence d'une particule dans le volume de mesure. Les

3. Mesure de vitesse constante, et absence de cellule de Bragg.

CRB (3.31) deviennent alors

$$\mathrm{CRB}(\theta_i) = \frac{\sigma^2}{4}\left[\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} C(k) x'^2_{\theta_i}(k)\right]^{-1}. \tag{3.33}$$

De plus, dans le cas où la totalité du signal Doppler est prise en compte pendant l'acquisition, c'est à dire pour N grand, il est possible de donner les formes analytiques approchées des CRB pour chacun des paramètres de la vitesse.

3.3.5 Formes analytiques approchées des bornes de Cramer-Rao

La CRB pour la vitesse acoustique V_{ac} est donnée par la relation (3.33) dans laquelle $i = 1$:

$$\mathrm{CRB}(\theta_1) = \frac{\sigma^2}{4}\left[\sum_{k=-N}^{k=+N} C(k) x'^2_{\theta_1}(k)\right]^{-1}. \tag{3.34}$$

Lorsque le nombre d'échantillons pris en compte est suffisamment élevé, c'est à dire quand N est grand, la somme (3.34) tend vers sa limite asymptotique et $\mathrm{CRB}(\theta_1)$ s'écrit

$$\mathrm{CRB}(V_{\mathrm{ac}}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\beta T_{\mathrm{e}}}{D^2}\ F_{\mathrm{ac}}^2 V_{\mathrm{ec}}\ \frac{1}{\mathrm{RSB}}. \tag{3.35}$$

Avec les mêmes hypothèses il est possible de trouver les CRB pour la phase acoustique ϕ_{ac} et la vitesse d'écoulement V_{ec} :

$$\mathrm{CRB}(\phi_{\mathrm{ac}}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\beta T_{\mathrm{e}}}{D^2}\ \frac{F_{\mathrm{ac}}^2 V_{\mathrm{ec}}}{V_{\mathrm{ac}}^2}\ \frac{1}{\mathrm{RSB}}, \tag{3.36}$$

$$\mathrm{CRB}(V_{\mathrm{ec}}) = \frac{1}{2\pi^2}\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\beta^3 T_{\mathrm{e}}}{D^2}\ V_{\mathrm{ec}}^3\ \frac{1}{\mathrm{RSB}}. \tag{3.37}$$

Exprimées en dB ces bornes deviennent

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{dB}}(V_{\mathrm{ac}}) = 10\log_{10}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\beta T_{\mathrm{e}}}{D^2}\ F_{\mathrm{ac}}^2 V_{\mathrm{ec}}\right] - \mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}}, \tag{3.38}$$

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{dB}}(\phi_{\mathrm{ac}}) = 10\log_{10}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\beta T_{\mathrm{e}}}{D^2}\ \frac{F_{\mathrm{ac}}^2 V_{\mathrm{ec}}}{V_{\mathrm{ac}}^2}\right] - \mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}}, \tag{3.39}$$

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{dB}}(V_{\mathrm{ec}}) = 10\log_{10}\left[\frac{1}{2\pi^2}\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\beta^3 T_{\mathrm{e}}}{D^2}\ V_{\mathrm{ec}}^3\right] - \mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}} \tag{3.40}$$

avec $\mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}[\mathrm{RSB}]$. Les justifications de ces résultats sont données dans l'annexe A.

L'examen des formes analytiques des CRB données par les relations (3.35), (3.36) et (3.37) amène quelques commentaires. En effet, il apparaît que leurs valeurs dépendent étroitement de la géométrie de la sonde de mesure par l'intermédiaire des facteurs β et D, du dispositif électronique d'acquisition des signaux par le biais de la période d'échantillonnage T_e ainsi que des paramètres V_{ac} et V_{ec} eux mêmes.

Comme cela était prévisible les variances des estimations augmentent lorsque la durée $\Delta = 1/(\beta V_{\mathrm{ec}})$ du signal Doppler diminue. Ce phénomène s'interprète facilement en considérant que plus la durée du signal est importante, pour une période acoustique donnée, plus on dispose d'information pour estimer les paramètres avec précision. La $\mathrm{CRB}(V_{\mathrm{ec}})$ est particulièrement sensible à ce facteur car elle évolue en $1/\Delta^3$. Par ailleurs chacune des bornes est proportionnelle à la période d'échantillonnage T_e, au carré de la fréquence acoustique F_{ac} et à l'inverse du carré de la sensibilité D de la sonde de mesure.

Il faut signaler, enfin, qu'il est possible d'identifier la quantité $DV_{\mathrm{ac}}/F_{\mathrm{ac}}$ comme étant égale à l'indice de modulation α du signal Doppler. Dans ce cas la CRB, exprimée en dB, pour l'estimée de la phase ϕ_{ac} peut s'écrire

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{dB}}(\phi_{\mathrm{ac}}) = 10\log_{10}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{T_{\mathrm{e}}}{\Delta}\right] - 20\log_{10}\alpha - \mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}}. \tag{3.41}$$

relation qui montre que la variance sur la phase résulte de la contribution de trois phénomènes : l'écoulement par l'intermédiaire du terme $10\log_{10}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{T_{\mathrm{e}}}{\Delta}\right]$, l'acoustique par $20\log_{10}\alpha$ et le bruit lui-même par $\mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}}$.

La relation (3.41) s'exprime encore en fonction du terme $20\log_{10}\alpha + \mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}}$ qui peut alors être vu comme un bruit équivalent sur la phase donné par

$$\mathrm{RSB}^{\phi}_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}\alpha + \mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}}. \tag{3.42}$$

Ceci signifie, notamment, que pour un RSB donné, le RSB de phase, et par conséquent $\mathrm{CRB}_{\mathrm{dB}}(\phi_{\mathrm{ac}})$, décroit de 20 dB lorsque que l'indice de modulation α est divisé par 10. Cela montre que la précision sur l'estimation de la phase de la vitesse acoustique est à la fois liée au RSB du signal Doppler et à l'indice de modulation [10]. Ce résultat est proche des conclusions des travaux de Tretter [72] et reprises par Valeau [10] : dans l'hypothèse de forts RSB, le bruit additif blanc et gaussien se superposant au signal peut être perçu comme un bruit additif sur la phase caractérisé par un rapport sur bruit prenant précisément la forme donnée par la relation (3.42). L'examen de $\mathrm{CRB}_{\mathrm{dB}}(\phi_{\mathrm{ac}})$ permet de souligner que l'estimation de la phase acoustique est problématique à faible indice de modulation α.

3.4 Estimation utilisant la dérivée de la phase

3.4.1 Estimation de la vitesse particulaire acoustique

La méthode d'estimation de la vitesse particulaire par MLE, dont le fonctionnement sera détaillé au paragraphe suivant, nécessite d'être initialisée par une première estimation. Pour cela il est nécessaire de prévoir une mesure des paramètres de la vitesse à partir d'une procédure d'estimation simple mais performante.

Une méthode envisageable consiste à se baser sur la définition de la FI donnée par

$$F_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}. \tag{3.43}$$

En effet, l'application de ce principe à la phase instantanée du signal Doppler conduit à l'estimation de la vitesse particulaire donnée par

$$\hat{v}(t) = \frac{1}{2\pi D}\frac{d\phi(t)}{dt}. \tag{3.44}$$

Estimation de la phase instantanée

Cette méthode nécessite de connaître $\phi(t)$. Dans le cas général, la phase instantanée d'un signal réel peut s'extraire à partir du signal analytique complexe qui lui est associé. Cette forme complexe est construite à l'aide d'une transformée de Hilbert. Dans cette étude le signal analytique est défini par les deux composantes basse fréquence $y_1(t)$ et $y_2(t)$, l'opération de démodulation en quadrature pouvant être vue comme une transformée de Hilbert analogique. La phase instantanée s'obtient alors par l'opération

$$\arctan\left[\frac{y_2(k)}{y_1(k)}\right] \tag{3.45}$$

où $y_1(k)$ et $y_2(k)$ représentent les parties réelle et imaginaire du signal analytique associé au signal Doppler. La valeur que retourne l'opérateur arctangente pour une seule variable est comprise dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ et est définie à un multiple entier de 2π près. En examinant séparément le numérateur et le dénominateur il est possible d'obtenir une valeur comprise dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$. Cependant, la détermination de $\phi(k)$ sur $[-\pi, +\pi]$ ne suffit pas à lever l'indétermination modulo 2π qui se manifeste par des sauts égaux à 2π de la phase extraite. L'évolution de la phase réelle étant continue il est nécessaire de prévoir une procédure de déroulement de la phase permettant de supprimer ces discontinuités. Celle-ci consiste à calculer les phases de deux échantillons consécutifs de manière à conserver une différence inférieure à 2π. La phase ainsi déroulée prend ses valeurs sur $\mathbb{R}$ entier et non plus dans l'intervalle $[-\pi; +\pi]$. Ce genre opération est généralement très complexe et ne fonctionne correctement qu'à partir de signaux peu bruités [73].

Calcul de la dérivée de la phase

Dans le domaine fréquentiel l'opération de dérivée par rapport au temps correspond au produit du spectre du signal par un filtre de réponse en fréquence

$$H(F) = j2\pi F. \tag{3.46}$$

La recherche du filtre à temps discret de Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) réel dont la fonction de transfert s'approche au mieux de $j2\pi F$ oblige de synthétiser $H(F)$, qui ne satisfait pas le théorème de l'échantillonnage, en considérant la réponse en fréquence uniquement dans la bande de fréquence $F \in [-F_e/2; +F_e/2]$ [74]. Cela conduit au filtre approché

$$H_a(F) = \begin{cases} j2\pi F & \text{pour } F \in [-F_e/2; +F_e/2], \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases} \tag{3.47}$$

Le calcul de $h_a(t)$, à l'aide de la transformée de Fourier inverse de $H_a(F)$, puis de $h(k)$ par échantillonnage de la réponse impulsionnelle conduit à

$$h(k) = \frac{\pi k \cos(\pi k) - \sin(\pi k)}{\pi k^2 T_e} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad k = 0, \\ \dfrac{\cos(\pi k)}{kT_e} & \text{pour} \quad k \neq 0. \end{cases} \tag{3.48}$$

La figure 3.3 montre l'allure prise par $h(k)$ limité à 21 coefficients. La vitesse estimée s'exprime alors par le produit de convolution

$$\hat{v}(k) = \frac{1}{2\pi D}\phi(k) * h(k). \tag{3.49}$$

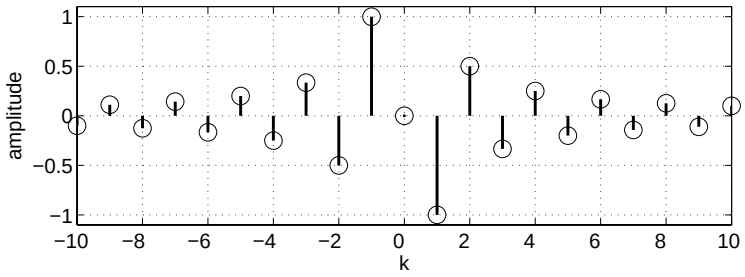

FIG. 3.3 – *Réponse impulsionnelle du filtre dérivateur numérique avec 21 coefficients et* $T_e = 1$.

La mise en œuvre pratique de cette convolution nécessite de tronquer la réponse impulsionnelle de durée infinie, $h(k)$, pour ne conserver que les éléments les plus significatifs. Cette méthode est couramment utilisée pour synthétiser les filtres à réponse impulsionnelle de durée finie (RIF) [74]. Il faut ajouter, de plus, que cette opération de troncature utilise des fenêtres à transitions douces comme les fenêtres de Hanning par exemple. Pour limiter au maximum la complexité de la convolution (3.49) seuls les coefficients de $h(k)$ correspondant à $k = -1; 0; +1$ sont conservés après multiplication avec une fenêtre de Hanning. L'estimation de la vitesse particulaire est alors donnée par

$$\hat{v}(k) = \frac{1}{2\pi D} \frac{[\phi(k+1) - \phi(k-1)]}{2T_e}. \tag{3.50}$$

Exprimée en fonction du déplacement particulaire $x(k)$ et en tenant compte de la relation (2.61) $\hat{v}(k)$ peut encore s'écrire

$$\hat{v}(k) = \frac{1}{2T_e}[x(k+1) - x(k-1)] \tag{3.51}$$

avec

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (k+1)T_{\mathrm{e}}V_{\mathrm{ec}} + \frac{V_{\mathrm{ac}}}{2\pi F_{\mathrm{ac}}} \sin\left[(2\pi f_{\mathrm{ac}}k + \phi_{\mathrm{ac}}) + 2\pi f_{\mathrm{ac}}\right] \\ &= (k+1)T_{\mathrm{e}}V_{\mathrm{ec}} + \frac{V_{\mathrm{ac}}}{2\pi F_{\mathrm{ac}}} \sin(2\pi f_{\mathrm{ac}}k + \phi_{\mathrm{ac}}) \cos(2\pi f_{\mathrm{ac}}) \\ &\quad + \frac{V_{\mathrm{ac}}}{2\pi F_{\mathrm{ac}}} \cos(2\pi f_{\mathrm{ac}}k + \phi_{\mathrm{ac}}) \sin(2\pi f_{\mathrm{ac}}) \end{aligned} \tag{3.52}$$

et

$$\begin{aligned} x(k-1) &= (k-1)T_{\mathrm{e}}V_{\mathrm{ec}} + \frac{V_{\mathrm{ac}}}{2\pi F_{\mathrm{ac}}} \sin\left[(2\pi f_{\mathrm{ac}}k + \phi_{\mathrm{ac}}) - 2\pi f_{\mathrm{ac}}\right] \\ &= (k-1)T_{\mathrm{e}}V_{\mathrm{ec}} - \frac{V_{\mathrm{ac}}}{2\pi F_{\mathrm{ac}}} \sin(2\pi f_{\mathrm{ac}}k + \phi_{\mathrm{ac}}) \cos(2\pi f_{\mathrm{ac}}) \\ &\quad + \frac{V_{\mathrm{ac}}}{2\pi F_{\mathrm{ac}}} \cos(2\pi f_{\mathrm{ac}}k + \phi_{\mathrm{ac}}) \sin(2\pi f_{\mathrm{ac}}). \end{aligned} \tag{3.53}$$

La vitesse estimée devient alors

$$\hat{v}(k) = V_{\mathrm{ec}} + \left(\frac{\sin 2\pi f_{\mathrm{ac}}}{2\pi f_{\mathrm{ac}}}\right) V_{\mathrm{ac}} \cos\left(2\pi f_{\mathrm{ac}}k + \phi_{\mathrm{ac}}\right). \tag{3.54}$$

Un tel estimateur conduit à une mesure biaisée de la valeur de l'amplitude de la vitesse. Ce biais se manifeste par la présence d'un terme en sinus cardinal, $\sin 2\pi f_{\mathrm{ac}}/(2\pi f_{\mathrm{ac}})$, qui témoigne de la troncature subie par la réponse impulsionnelle. Heureusement ce terme s'évalue facilement car il ne dépend que de la fréquence réduite f_{ac} qui est connue.

La figure 3.4 donne, à titre d'exemple, le résultat de l'estimation de la vitesse $v(k)$ à l'aide de la méthode qui vient d'être décrite. Comme le montre cette figure, l'estimée de la vitesse

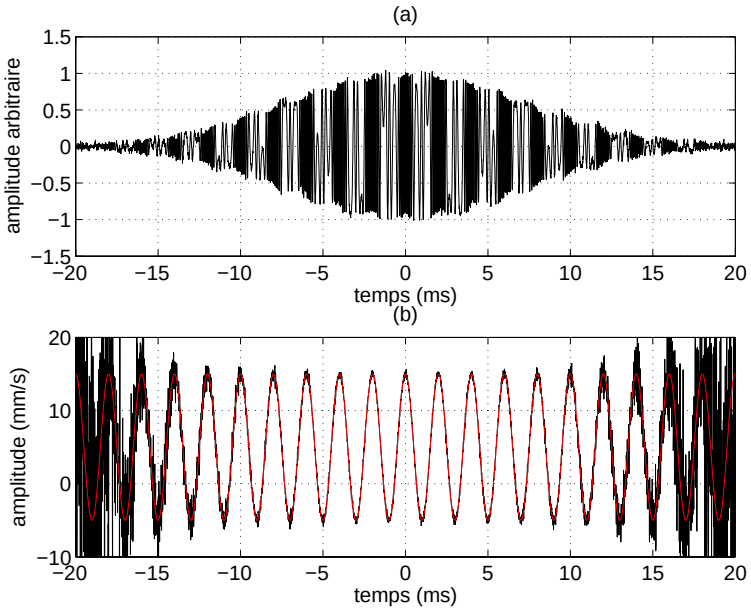

FIG. 3.4 – *Méthode d'estimation basée sur la dérivée de la phase:* (a) *signal d'observation* $y_2(k)$, (b) *vitesse estimée* $\hat{v}(k)$ *(noir), vitesse réelle simulée* $v(k)$ *(rouge) pour* $F_{\text{ac}} = 500$ Hz, $V_{\text{ac}} = 10$ mm/s *et* $V_{\text{ec}} = 5$ mm/s.

est très bruitée. Ce phénomène est d'autant plus sensible que l'amplitude du signal utile est faible, c'est à dire que le RSB local est faible. La présence de ces perturbations se traduit alors par une variance importante de l'estimateur basé sur la dérivée de la phase [75]. Pourtant cette variance n'est pas trop génante. En effet, d'une part la forme exacte que revêt la vitesse $v(k)$ n'est pas d'importance capitale dans la mesure où seuls les paramètres de la vitesse sont intéressants. Ceux-ci seront par la suite estimés à l'aide d'une technique synchrone efficace même en présence de bruit. D'autre part cette première procédure n'a pour but que d'initialiser une méthode d'estimation paramétrique plus performante et n'a pas besoin de présenter un caractère optimal.

3.4.2 Estimation des paramètres de la vitesse acoustique

Un système de démodulation en quadrature, synchronisé sur la fréquence acoustique connue F_{ac}, permet d'extraire les paramètres V_{ac} et ϕ_{ac} de la vitesse acoustique. La génération du signal en *sinus* est obtenue en filtrant le signal de référence, appelée encore *voie en cosinus* par un déphaseur pur, construit à l'aide d'une transformée de Hilbert. La sortie du démodulateur permet d'observer les deux composantes passe-bas

$$V_{cos} = V_{\text{ac}} \cos \phi_{\text{ac}} \tag{3.55}$$

et

$$V_{sin} = V_{\text{ac}} \sin \phi_{\text{ac}}. \tag{3.56}$$

Les paramètres V_{ac} et ϕ_{ac} sont déterminés par les équations de passage de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires

$$V_{\text{ac}} = \sqrt{V_{cos}^2 + V_{sin}^2} \tag{3.57}$$

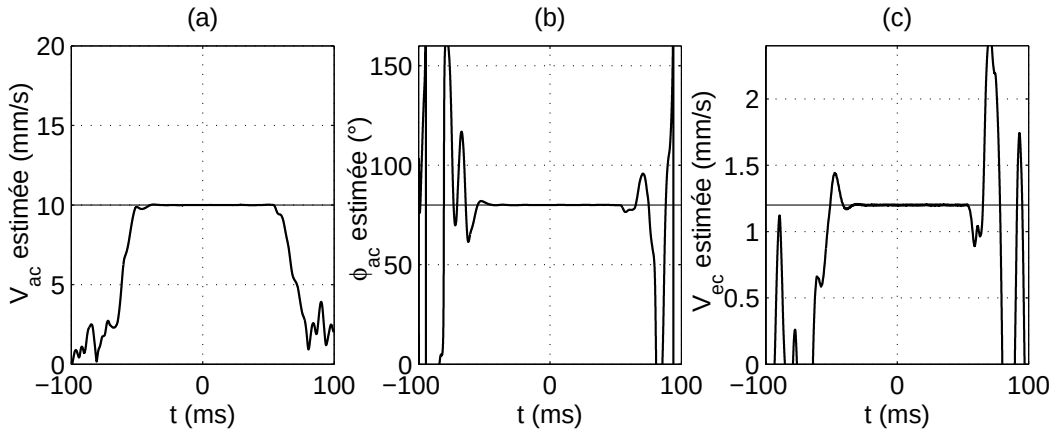

FIG. 3.5 – *Évolution temporelle des estimées des paramètres après démodulation en quadrature :* (a) *amplitude de la vitesse* $\widehat{V}_{\rm ac}(t)$, (b) *phase de la vitesse* $\widehat{\phi}_{\rm ac}(t)$ *et* (c) *vitesse d'écoulement* $\widehat{V}_{\rm ec}(t)$ *pour* $F_{\rm ac} = 1000$ Hz, $V_{\rm ac} = 10$ mm/s, $\phi_{\rm ac} = 80^{\rm o}$ *et* $V_{\rm ec} = 1{,}2$ mm/s.

et

$$\phi_{\rm ac} = \arctan \frac{V_{sin}}{V_{cos}}. \tag{3.58}$$

Enfin, la vitesse de convection, $V_{\rm ec}$, est simplement déterminée par le filtrage passe-bas de $\hat{v}(k)$. À titre d'exemple la figure 3.5 montre les évolutions des estimées de ces trois paramètres en fonction du temps. La figure 3.6 résume quant à elle l'ensemble des opérations exposées dans les lignes précédentes et qui permettent d'accéder aux estimées des trois paramètres de la vitesse particulaire à partir des signaux de mesures $y_1(k)$ et $y_2(k)$.

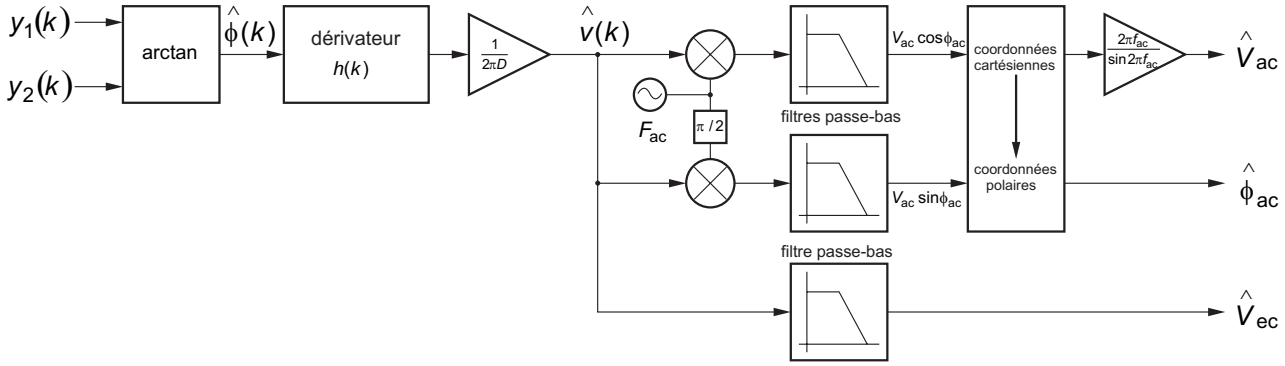

FIG. 3.6 – *Estimation des paramètres de la vitesse acoustique. Méthode basée sur la dérivée de la phase associée à une démodulation en quadrature synchronisée sur la fréquence acoustique.*

3.5 Estimation par maximum de vraisemblance

3.5.1 Principe de la méthode

L'estimateur par maximum de vraisemblance (MLE) est une méthode permettant de déterminer les valeurs des paramètres, pour une observation $\mathbf{y}$ donnée, qui rendent maximum la

fonction de vraisemblance définie par la relation (3.20) [45]. Cette méthode revient donc à chercher les valeurs du vecteur $\boldsymbol{\theta}$ qui produisent le modèle $\mathbf{s} = \left[\mathbf{s_1}^T, \mathbf{s_2}^T\right]^T$ le plus proche possible des observations bruitées $\mathbf{y} = \left[\mathbf{y_1}^T, \mathbf{y_2}^T\right]^T$ [76]. Le MLE présente les propriétés asymptotiques, *i.e.* lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini ($N \to \infty$), suivantes :

- il est non-biaisé;
- il est efficace, c'est à dire qu'il atteint les CRB lorsque $N \to \infty$;
- les estimations présentent une DdP qui converge vers la loi normale.

C'est un bon estimateur si le modèle théorique adopté pour le signal est correctement établi .

La maximisation de la densité de probabilité s'obtient de manière équivalente par la maximisation de la fonction de vraisemblance logarithmique

$$\wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = -(N+1)\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{y_1} - \mathbf{s_1}\|^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{y_2} - \mathbf{s_2}\|^2. \tag{3.59}$$

L'estimateur par maximum de vraisemblance des paramètres acoustiques est donc la solution du problème de maximisation suivant :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MLE}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}) \tag{3.60}$$

avec

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{y_1} - \mathbf{s_1}\|^2 + \|\mathbf{y_2} - \mathbf{s_2}\|^2. \tag{3.61}$$

La fonction $J(\boldsymbol{\theta})$ présente un caractère fortement non-linéaire. En effet les paramètres V_{ac}, ϕ_{ac} et V_{ec} apparaissent simultanément dans l'enveloppe et dans la phase instantanée du signal Doppler. Comme il n'existe pas de solution analytique simple à ce problème d'optimisation, les paramètres doivent être déterminés numériquement.

3.5.2 Détermination numérique du MLE

De façon à assurer l'estimation des paramètres acoustiques de manière simple et avec une complexité algorithmique réduite l'utilisation de la méthode de Levenberg-Marquart [70] est ici proposée. Cette technique a été préférée à d'autres méthodes plus simples et moins couteuses en temps de calcul car elle converge plus rapidement et surtout plus sûrement vers la solution exacte du problème. La méthode de Gauss-Newton présente quant à elle des performances tout à fait comparables, mais semble légèrement moins robuste que l'algorithme de Levenberg-Marquart [77] et a donc été écartée.

Cette technique d'optimisation au sens des moindres carrés non linéaires nécessite de connaître la dérivée première de $J(\boldsymbol{\theta})$ donnée par la relation

$$\frac{\partial J(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = -2\sigma^2 \cdot \frac{\partial \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \tag{3.62}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{\partial J(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = -2\left(\mathbf{b_1^T}\mathbf{s'_{1\theta_i}} + \mathbf{b_2^T}\mathbf{s'_{2\theta_i}}\right). \tag{3.63}$$

Dans cette dernière relation

$$\mathbf{s'_{1\theta_i}} = \frac{\partial \mathbf{s_1}}{\partial \theta_i} = [s'_{1\theta_i}(-N/2), \ldots, s'_{1\theta_i}(0), \ldots, s'_{1\theta_i}(+N/2)]^T \tag{3.64}$$

$$\mathbf{s'_{2\theta_i}} = \frac{\partial \mathbf{s_2}}{\partial \theta_i} = [s'_{2\theta_i}(-N/2), \ldots, s'_{2\theta_i}(0), \ldots, s'_{2\theta_i}(+N/2)]^T \tag{3.65}$$

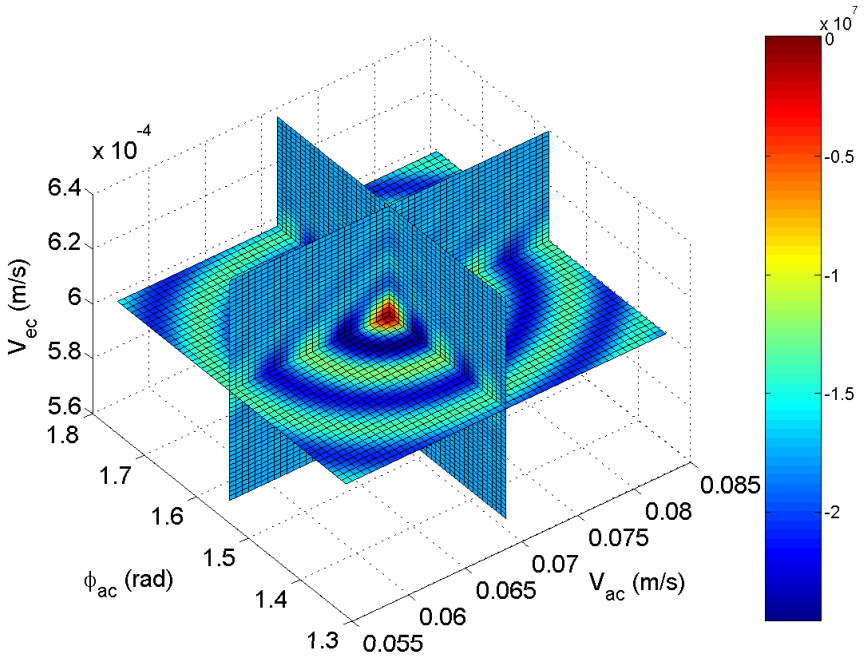

FIG. 3.7 – *Visualisation de la fonction de vraisemblance logarithmique pour* $F_{\mathrm{ac}} = 1000$ Hz, $V_{\mathrm{ac}} = 70$ mm/s, $\phi_{\mathrm{ac}} = \pi/2$ rd *et* $V_{\mathrm{ec}} = 6$ mm/s.

et

$$\mathbf{b_1} = \mathbf{y_1} - \mathbf{s_1} \tag{3.66}$$

$$\mathbf{b_2} = \mathbf{y_2} - \mathbf{s_2}. \tag{3.67}$$

Le développement des calculs ayant conduit à cette dérivée est disponible en annexe A (équations A.30 à A.38).

La procédure d'optimisation a pour but de trouver les paramètres optimaux qui rendent la fonction $J(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})$ minimale et qui, par conséquent *maximisent* la fonction de vraisemblance. L'une des difficultés majeures de mise en œuvre de cette méthode réside dans la présence de maxima locaux sur lesquels la procédure de recherche du maximum risque de converger [78]. La figure 3.7 montre d'ailleurs l'allure de la fonction de vraisemblance en fonction des trois paramètres V_{ac}, ϕ_{ac} et V_{ec}. Elle met clairement en évidence la présence de maxima locaux autour du maximum global correspondant ici à $V_{\mathrm{ac}} = 70$ mm/s, $\phi_{\mathrm{ac}} = \pi/2$ rd et $V_{\mathrm{ec}} = 0{,}6$ mm/s. Ce maximum est matérialisé par la zone rouge située au centre de la figure, à l'intersection des trois plans. Ce type de comportement est proche des résultats que présente Mellet [16] mais pour une fonction de vraisemblance bâtie autour du signal analytique et pour laquelle il suggère d'employer une procédure d'optimisation à partir uniquement des deux paramètres, l'amplitude et la phase de la vitesse acoustique. Il est alors indispensable d'initialiser la recherche itérative avec des valeurs crédibles de $\boldsymbol{\theta}$. Ceci est obtenu en procédant à une première estimation, sous-optimale, à partir de l'estimateur basé sur la dérivée de la phase (PDBE) développé au paragraphe 3.4. Les itérations s'arrêtent dès que la précision relative de la fonction $J(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})$, entre deux itérations successives, atteint une valeur ϵ prédéfinie. Ceci s'exprime par

$$\frac{|J_{n+1}(\mathbf{y};\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - J_n(\mathbf{y};\widehat{\boldsymbol{\theta}})|}{|J_n(\mathbf{y};\widehat{\boldsymbol{\theta}})|} \leq \epsilon \tag{3.68}$$

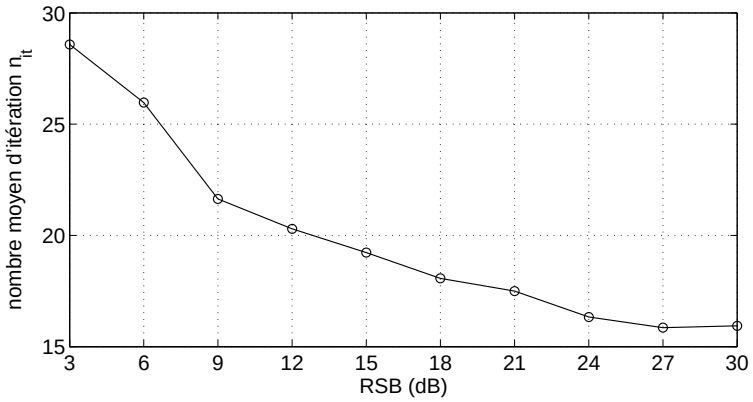

FIG. 3.8 – *Nombre moyen n_{it} d'itérations en fonction du rapport signal sur bruit.* $F_{\text{ac}} = 1000$ Hz, $V_{\text{ac}} = 10$ mm/s et $V_{\text{ec}} = 1{,}2$ mm/s.

où $J_{n+1}(\mathbf{y};\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ et $J_n(\mathbf{y};\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ représentent les valeurs respectives de $J(\mathbf{y};\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ à la $n+1$ ième et n ième itération. La valeur de ϵ conditionne l'erreur finale des estimations. En effet, celles-ci seront d'autant plus précises que la valeur de ϵ sera faible, le nombre n_{it} d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme augmentant alors en conséquence. Dans cette étude $\epsilon = 0{,}0001$, valeur permettant aux estimées des paramètres de la vitesse acoustique d'atteindre les CRB. La figure 3.8 montre dans ce cas l'évolution du nombre moyen d'itérations n_{it}, calculé à partir de 250 simulations, en fonction du RSB et l'accroissement de la valeur de ce paramètre dès que le RSB devient inférieur à 9 dB. Ce paramètre est important car il influe fortement le temps de calcul. De manière à éviter malgré tout la convergence vers un maximum local, dans le cas où l'estimation initiale des paramètres n'est pas suffisamment précise, la recherche est interrompue au bout de 25 itérations, les paramètres estimés à l'issue de la première étape étant alors conservés. La figure 3.9 résume la procédure d'estimation par MLE initialisée par la méthode PDBE.

3.5.3 Limite de la méthode

Les paragraphes précédents ont montré qu'il est possible d'estimer les paramètres de la vitesse acoustique au moyen d'une méthode statistique utilisant un modèle du signal Doppler et l'hypothèse d'un bruit blanc additif gaussien. Un des inconvénients de la méthode réside dans le fait que la maximisation de la fonction de vraisemblance ne peut être assurée tant que toutes les observations ne sont pas disponibles, autrement dit tant que l'ensemble des mesures n'a pas été acquis. Ainsi la complexité des calculs augmente rapidement avec la longueur des séquences d'observation.

Une approche envisageable pour résoudre ce problème consiste alors à traiter le problème de maximisation en utilisant une méthode itérative comme le propose le paragraphe 3.6.

3.6 Notion de processus gaussien-markovien

3.6.1 Représentation dans l'espace d'état

De nombreux problèmes de physique peuvent se résoudre en estimant l'état d'un système dynamique évoluant au cours du temps et en utilisant des mesures bruitées supposées dispo-

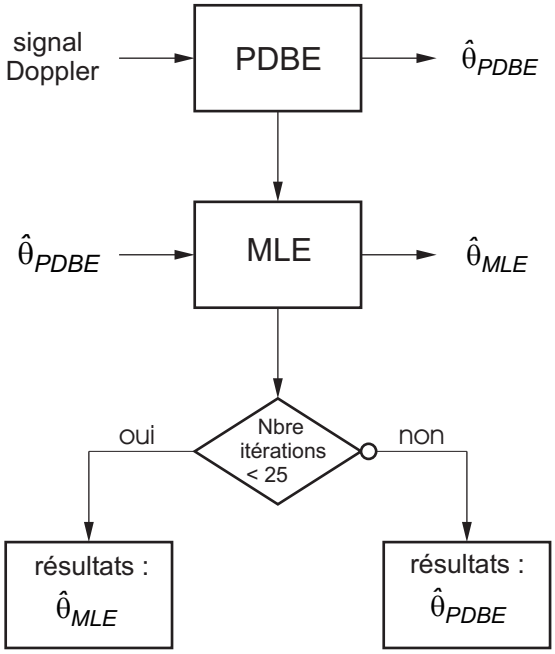

FIG. 3.9 – *Principe de la procédure d'estimation par MLE initialisée par la méthode PDBE.*

nibles à chaque instant. De cette façon il est possible de déterminer l'état du système à l'aide d'un jeu réduit de variables, appelées *variables d'état*, regroupées dans un *vecteur d'état* appartenant à un espace vectoriel appelé *espace d'état*. La connaissance de l'état initial, à l'instant $t = 0$, ainsi que celle des valeurs des entrées du système à $t \geq 0$ permet donc de déterminer de façon unique les valeurs des sorties du système pour $t \geq 0$. Le vecteur d'état représente alors la mémoire minimale du passé nécessaire à la prédiction du comportement futur du système [79, 80].

D'une manière générale l'analyse dans l'espace d'état implique trois types de variables : les variables d'entrée, les variables de sortie et les variables d'état. L'étude du comportement d'un système dynamique ou d'un signal passe par la construction d'un modèle auquel est associé un système de deux équations établissant les relations qui existent entre les variables.

Une première équation rend compte des évolutions du vecteur d'état du système au cours du temps. Pour les systèmes à temps discrets, linéaires ou non-linéaires, elle est décrite par

$$\mathbf{X}(k+1) = F[k,\mathbf{X}(k),\mathbf{U}(k),\mathbf{W}(k)] \tag{3.69}$$

où

$$\mathbf{X}(k) = [X_1(k),X_2(k),\cdots,X_m(k)]^T, \tag{3.70}$$

qui désigne l'état du système à l'instant k, est représenté par un vecteur de dimension $m \times 1$ et où

$$\mathbf{U}(k) = [U_1(k),U_2(k),\cdots,U_p(k)]^T, \tag{3.71}$$

représente les données, connues, à l'entrée du système.

À l'équation aux différences (3.69), appelée *équation d'état*, est associé une seconde équation qui traduit le fait que les grandeurs accessibles à la mesure ne sont par forcément les états mais plutôt une fonction de ces états. Cette deuxième équation est souvent appelée *équation d'observation* et s'écrit

$$\mathbf{Y}(k) = G\,[k,\mathbf{X}(k),\mathbf{V}(k)] \tag{3.72}$$

où

$$\mathbf{Y}(k) = [Y_1(k), Y_2(k), \cdots, Y_n(k)]^T, \tag{3.73}$$

désigne un vecteur de dimension $n \times 1$, appelé observation. Les vecteurs $\mathbf{W}(k)$ et $\mathbf{V}(k)$ représentent, quant à eux, deux séquences de bruits de dimensions respectives $m \times 1$ et $n \times 1$.

Certains processus aléatoires pour lesquels il est possible d'observer indirectement une réalisation à la sortie d'un opérateur de transformation linéaire bruité peuvent aussi être représentés par un modèle d'état. Dans ce cas particulier le problème consiste généralement à estimer de façon optimale un certain nombre de paramètres inconnus. Le modèle adopté pour décrire le signal ne nécessite alors pas de prendre en compte les signaux d'entrée $\mathbf{U}(k)$ mais uniquement le bruit d'état $\mathbf{W}(k)$. L'équation d'état (3.69) se résume alors à

$$\mathbf{X}(k+1) = F[k, \mathbf{X}(k), \mathbf{W}(k)]. \tag{3.74}$$

Le paragraphe 3.8.3 montrera qu'il est possible, en ce basant sur ce principe, de proposer un modèle d'état du signal Doppler.

Par ailleurs l'équation (3.74) montre que la fonction F, donnant l'état du système à l'instant $k+1$ est une fonction de l'état à l'instant k, $\mathbf{X}(k)$, uniquement et ne dépend pas de $\mathbf{X}(k-1)$, $\mathbf{X}(k-2)$, etc. Ce comportement caractérise un processus de Markov d'ordre un. Autrement dit, lorsque la totalité du passé est connue, les propriétés statistiques de $\mathbf{X}(k+1)$ à l'instant $k+1$ ne dépendent uniquement que du passé d'ordre un, c'est à dire de l'état à l'instant k [81]. Cette propriété est particulièrement intéressante car elle autorise l'estimation du vecteur d'état sans qu'il soit nécessaire, contrairement au MLE par exemple, de mémoriser la totalité de l'information passée. Si, de plus, $\mathbf{W}(k)$ et $\mathbf{V}(k)$ sont des séquences gaussiennes le processus est dit gaussien-markovien.

3.6.2 Estimation bayésienne des états d'un processus gaussien-markovien

Le principe de l'estimation optimale des états du système décrit précédemment par une approche bayésienne repose sur la construction de $p[\mathbf{X}(k)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k)]$, la densité de probabilité *a priori* des états $\mathbf{X}(k)$. Les informations disponibles sont

- l'ensemble des mesures $\mathbf{Y}(k)$ réalisées de l'instant $k=0$ à l'instant k et regroupées dans le vecteur
$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k) = [\mathbf{Y}^T(k), \mathbf{Y}^T(k-1), \cdots, \mathbf{Y}^T(0)]^T; \tag{3.75}$$
- les propriétés statistiques des vecteurs aléatoires $\mathbf{W}(k)$ et $\mathbf{V}(k)$;
- le modèle précis du système ou du signal à analyser donné par les équations d'état (3.69) et d'observation (3.72).

En supposant que la DdP initiale $p[\mathbf{X}(0)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(0)] = p[\mathbf{X}(0)]$ du vecteur d'état est connue et en utilisant toute l'information disponible de l'instant 0 à l'instant k, il est possible de construire $p[\mathbf{X}(k)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k)]$, à partir d'une procédure récursive en deux étapes : une phase de prédiction suivie d'une phase de mise à jour ou de correction.

Dans un premier temps l'exploitation de l'équation d'état (3.69) permet de prédire la DdP des états. Ainsi, avec l'hypothèse que la DdP, $p[\mathbf{X}(k)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k)]$, est disponible, l'équation de Chapman-Kolmogorov donnée par

$$p[\mathbf{X}(k+1)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k)] = \int p[\mathbf{X}(k+1)|\mathbf{X}(k)] p[\mathbf{X}(k)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k)] d\mathbf{X}(k), \tag{3.76}$$

permet de déterminer la DdP de l'état à l'instant $k+1$ [82].

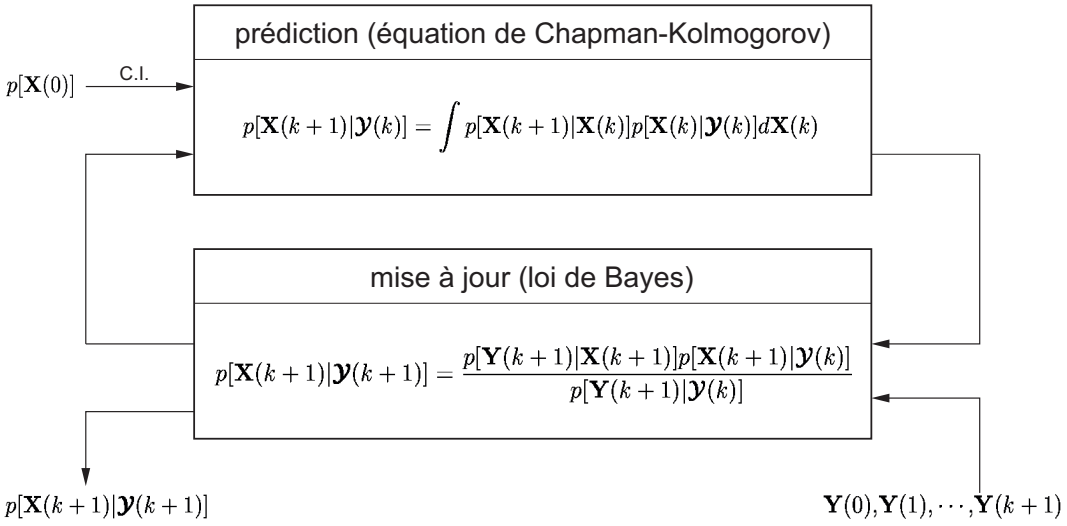

FIG. 3.10 – *Principe de l'estimation récursive de Bayes.*

Dans un second temps, une nouvelle mesure $\mathbf{Y}(k+1)$ est devenue disponible et est mise à profit pour actualiser $p[\mathbf{X}(k+1)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k+1)]$ par l'intermédiaire de la loi de Bayes

$$p[\mathbf{X}(k+1)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k+1)] = \frac{p[\mathbf{Y}(k+1)|\mathbf{X}(k+1)]p[\mathbf{X}(k+1)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k)]}{p[\mathbf{Y}(k+1)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k)]} \tag{3.77}$$

où la DdP normalisée

$$p[\mathbf{Y}(k+1)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k))] = \int p[\mathbf{Y}(k+1)|\mathbf{X}(k+1)]p[\mathbf{X}(k+1)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k)]d\mathbf{X}(k) \tag{3.78}$$

dépend de $p[\mathbf{Y}(k+1)|\mathbf{X}(k+1)]$ définie par l'équation d'observation (3.72).

Les relations de récurrence (3.76) et (3.77), résumées par la figure 3.10, constituent la base de l'estimation récursive de Bayes. Dans la pratique il est, cependant, très difficile de trouver une solution analytique à un tel problème. Néanmoins, dans un certain nombre de cas la solution existe et peut être apportée, notamment, par le filtre de Kalman dont le principe est maintenant exposé.

3.7 Estimation par filtrage de Kalman

En 1960 KALMAN publie un article [83] décrivant une méthode de filtrage récursif linéaire particulièrement adaptée au traitement des signaux non-stationnaires.

Cette technique utilise une représentation dans l'espace d'état du système ou du signal à étudier. Son principe consiste à évaluer par récurrence l'estimée du vecteur d'état à l'instant k, en tenant compte à la fois de l'estimée de ce même vecteur à l'instant $k-1$ et de l'information acquise depuis cet instant. Ainsi le filtre de Kalman ne nécessite pas de conserver la totalité des informations passées. Les calculs sont donc considérablement simplifiés et surtout beaucoup plus rapides, ce qui rend la méthode très intéressante pour des applications en temp-réel. Compte tenu de ces avantages cette technique s'est beaucoup développée les années suivantes principalement en automatique et en particulier dans le domaine de la navigation et de suivi de trajectoire [84]. Les ouvrages de ANDERSON et MOORE [85], de BROWN et HWANG [86] et de HAYKIN [63] proposent une introduction complète à ses méthodes de filtrage.

Dans un premier temps les principes du filtrage de Kalman appliqués au traitement de systèmes et de signaux linéaires sont exposés. Ce travail permettra d'aboutir à l'algorithme général du filtre de Kalman, estimateur d'état courant et à un pas. Par la suite cette méthode de filtrage optimal est appliquée au cas de l'estimation de la vitesse acoustique. Cependant, comme le montrera le paragraphe 3.8, ce problème exige une représentation d'état non-linéaire qui n'est pas, en toute rigueur, adaptée au filtrage classique de Kalman. Néanmoins, cette technique peut être étendue au cas non-linéaire et porte le nom de filtrage de Kalman étendu (EKF) [87]. Cette méthode et son adaptation au problème de l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique fait l'objet des sections suivantes.

3.7.1 Principe du filtrage de Kalman

La méthode d'estimation par filtrage de Kalman suppose que la DdP $p[\mathbf{X}(k)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k)]$ à chaque instant k est de nature gaussienne, paramétrée par une moyenne et une covariance. Si $p[\mathbf{X}(k)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k)]$ est gaussienne il est possible de montrer [85] que $p[\mathbf{X}(k+1)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k+1)]$ l'est aussi pourvu que certaines hypothèses soient vérifiées :

- $\mathbf{W}(k)$ et $\mathbf{V}(k)$ doivent être des processus gaussiens;
- $F[k,\mathbf{X}(k),\mathbf{U}(k),\mathbf{W}(k)]$ doit être une fonction linéaire de $\mathbf{X}(k)$ et de $\mathbf{W}(k)$;
- $G\,[k,\mathbf{X}(k),\mathbf{V}(k)]$ doit être une fonction linéaire de $\mathbf{X}(k)$ et de $\mathbf{V}(k)$;

De cette façon les équation d'état (3.74) et d'observation (3.72) s'écrivent

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{W}(k) \tag{3.79}$$

et

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{V}(k). \tag{3.80}$$

Les équations (3.79) et (3.80) font apparaître plusieurs signaux et données qu'il convient de préciser :

- $\mathbf{A}(k)$ est une matrice $(m \times m)$ connue qui peut évoluer au cours du temps. Dans ce cas le filtre de Kalman permet de prendre en compte les non-stationnarités du signal.
- $\mathbf{C}(k)$ est une matrice $(n \times m)$ connue qui peut évoluer au cours du temps.
- $\mathbf{W}(k) = \mathbf{W}(k,\xi) = [W_1(k),W_2(k),\cdots,W_m(k)]^T$ est un vecteur aléatoire $(m \times 1)$ inconnu et inaccessible à la mesure, souvent appelée bruit d'état.
- $\mathbf{V}(k) = \mathbf{V}(k,\xi) = [V_1(k),V_2(k),\cdots,V_m(k)]^T$ est un vecteur aléatoire $(n \times 1)$ inconnu lui aussi et inaccessible à la mesure. Il est souvent appelée bruit de mesure.

La figure 3.11 illustre le principe de la modélisation, décrite par les équations (3.79) et (3.80) d'un signal dans l'espace d'état.

Ainsi le filtre de Kalman issu des relations de récurrence définies par l'équation de Chapman-Kolgomorov (3.76) et la loi de Bayes (3.77) peut être considéré comme la solution aux deux relations récursives

$$p[\mathbf{X}(k)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k)] = \mathcal{N}[\widehat{\mathbf{X}}(k|k),\mathbf{P}(k|k)] \tag{3.81}$$

et

$$p[\mathbf{X}(k+1)|\boldsymbol{\mathcal{Y}}(k)] = \mathcal{N}[\widehat{\mathbf{X}}(k+1|k),\mathbf{P}(k+1|k)] \tag{3.82}$$

où $\mathcal{N}(\widehat{\mathbf{X}},\mathbf{P})$ désigne une DdP gaussienne de moyenne $\widehat{\mathbf{X}}$ et de matrice de covariance $\mathbf{P}$. La moyenne $\widehat{\mathbf{X}}$ représente l'estimation de l'état du système alors que $\mathbf{P}$ donne la covariance de l'erreur d'estimation avec

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathrm{E}\left\{\tilde{\mathbf{X}}(k|k-1)\tilde{\mathbf{X}}^T(k|k-1)\right\}. \tag{3.83}$$

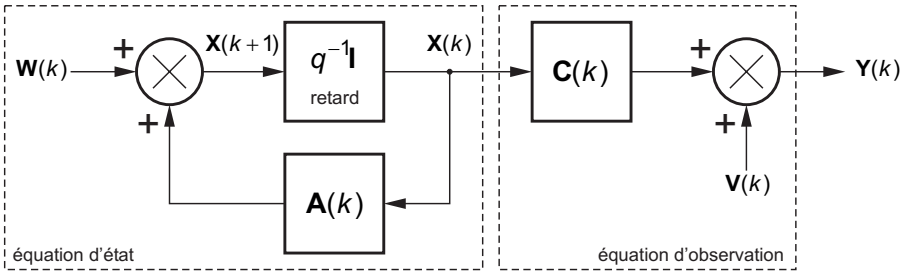

FIG. 3.11 – *Schéma général d'un modèle de signal dans l'espace d'état.*

Dans cette dernière relation $\tilde{\mathbf{X}}(k|k-1) = \mathbf{X}(k|k-1) - \widehat{\mathbf{X}}(k|k-1)$ représente l'erreur d'estimation.

Les deux équations (3.81) et (3.82) montrent que le filtre de Kalman représente la solution récursive d'un problème linéaire gaussien. Il peut être considéré comme un algorithme d'optimisation permettant de résoudre, de manière récursive, un problème de maximum de vraisemblance grâce à une hypothèse de Gauss-Markov.

Par ailleurs, les statistiques du premier et du deuxième ordre des vecteurs $\mathbf{W}(k)$ et $\mathbf{V}(k)$ sont supposées connues. Dans le cadre de cette étude elles sont données par les moyennes

$$E[\mathbf{W}(k)] = 0 \tag{3.84}$$

et

$$E[\mathbf{V}(k)] = 0 \tag{3.85}$$

ainsi que par les matrices de covariance

$$\mathbf{R}_W(k,l) = E[\mathbf{W}(k)\mathbf{W}^T(l)] = \begin{cases} \mathbf{Q}(k) & \text{pour} \quad k = l \\ \mathbf{0} & \text{pour} \quad k \neq l \end{cases} \tag{3.86}$$

et

$$\mathbf{R}_V(k,l) = E[\mathbf{V}(k)\mathbf{V}^T(l)] = \begin{cases} \mathbf{R}(k) & \text{pour} \quad k = l \\ \mathbf{0} & \text{pour} \quad k \neq l. \end{cases} \tag{3.87}$$

De plus les processus vectoriels $\mathbf{W}(k)$ et $\mathbf{V}(k)$ sont supposés non corrélés, c'est à dire que

$$E[\mathbf{W}(k)\mathbf{V}^T(l)] = 0, \quad \text{quels que soient } k \text{ et } l. \tag{3.88}$$

3.7.2 Objectif du filtrage de Kalman

Grâce au filtre de Kalman il est possible d'obtenir une estimation optimale de $\mathbf{Y}(k)$ et de $\mathbf{X}(k)$ à partir de mesures $\mathbf{Y}(k)$ réalisées de l'instant 0 jusqu'à l'instant k. Les informations disponibles pour cette mesure sont l'ensemble des observations de $\mathbf{Y}(k)$ regroupées dans le vecteur

$$\mathcal{Y}(k) = [\mathbf{Y}^T(k), \mathbf{Y}^T(k-1), \cdots, \mathbf{Y}^T(0)]^T, \tag{3.89}$$

les propriétés statistiques des vecteurs aléatoires $\mathbf{W}(k)$ et $\mathbf{V}(k)$, ainsi que le modèle précis du système ou du signal à analyser décrit par les équations d'état et d'observation.

La méthode proposée consiste alors à extraire toute l'information contenue dans $\mathcal{Y}(k)$ de manière à estimer de façon optimale et conditionnellement aux observations $\mathcal{Y}(k)$

- le signal $\mathbf{Y}(k)$ à l'instant $k+1$;
- l'état du système $\mathbf{X}(k)$ à l'instant $k+1$;
- puis $\mathbf{X}(k)$ et $\mathbf{Y}(k)$ à l'instant k.

La prédiction de ces deux signaux est réalisée en utilisant une Estimation Linéaire en Moyenne Quadratique (ELMQ). Cette méthode nécessite cependant de mémoriser un nombre croissant d'information au fur et à mesure que le temps s'écoule. De ce fait cette technique est difficile à mettre en œuvre, notamment pour des valeurs de k importantes. Compte tenu du caractère markovien de l'équation d'état (paragraphe 3.6.1) l'algorithme de filtrage de Kalman peut résoudre ce problème en proposant des calculs récursifs d'ELMQ n'encombrant pas trop la mémoire d'un processeur de signal.

3.7.3 Algorithme général de filtrage de Kalman récursif

Première phase : expression de la prédiction optimale des observations en fonction de l'innovation

Le filtrage est donc mené de manière récursive en estimant $\widehat{\mathbf{Y}}[k+1|\mathcal{Y}(k)]$ pour $k=0$, puis $k=1$, puis $k=2$, etc. Le terme $\widehat{\mathbf{Y}}[k+1|\mathcal{Y}(k)]$ designe l'estimation optimale de l'observation à l'instant $k+1$ connaissant toutes les valeurs de $\mathbf{Y}(k)$ jusqu'à l'instant k.

Par ailleurs l'erreur de prédiction, appelée encore *innovation*, du processus $\mathbf{Y}(k)$ est définie par

$$\widetilde{\mathbf{Y}}[k|\mathcal{Y}(k-1)] = \mathbf{Y}(k) - \widehat{\mathbf{Y}}[k|\mathcal{Y}(k-1)]. \tag{3.90}$$

Cette erreur renseigne sur la partie de l'information contenue dans $\mathbf{Y}(k)$ qui est nouvelle et donc non-prédictible à partir de $\mathcal{Y}(k-1)$. Les valeurs des innovations obtenues aux différentes étapes $0,1,2,\cdots,k$ peuvent être regroupées dans le vecteur $\widetilde{\mathbf{Y}}(k)$. Il est alors possible de montrer qu'il existe une transformation affine entre $\mathcal{Y}(k)$ et $\widetilde{\mathbf{Y}}(k)$ et d'en déduire que $\widetilde{\mathbf{Y}}(k)$ véhicule autant d'information que $\mathcal{Y}(k)$ [86, 85]. Ceci permet d'estimer, sans changement de résultat, $\mathbf{Y}(k+1)$ et $\mathbf{X}(k+1)$ aussi bien à partir $\mathcal{Y}(k)$ que de $\widetilde{\mathcal{Y}}(k)$. Afin de ne pas alourdir inutilement les notations le terme $\mathcal{Y}()$ sera omis dans la suite de cette présentation. L'innovation, décrite par l'équation (3.90) devient alors

$$\widetilde{\mathbf{Y}}[k|(k-1)] = \mathbf{Y}(k) - \widehat{\mathbf{Y}}[k|(k-1)]. \tag{3.91}$$

Deuxième phase : estimation des états courant et à un pas

L'estimation optimale de $\mathbf{X}(k+1)$, basée sur la connaissance de toutes les innovations de l'instant 0 à l'instant k s'écrit alors

$$\widehat{\mathbf{X}}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\widehat{\mathbf{X}}(k|k). \tag{3.92}$$

Dans cette équation $\widehat{\mathbf{X}}(k|k)$ représente l'estimation de l'état courant et est donné par

$$\widehat{\mathbf{X}}(k|k) = \widehat{\mathbf{X}}(k|k-1) + \mathbf{L}(k)\widetilde{\mathbf{Y}}[k|(k-1)]. \tag{3.93}$$

L'équation (3.92) devient alors

$$\widehat{\mathbf{X}}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\widehat{\mathbf{X}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{Y}(k) - \mathbf{C}(k)\widehat{\mathbf{X}}(k|k-1)] \tag{3.94}$$

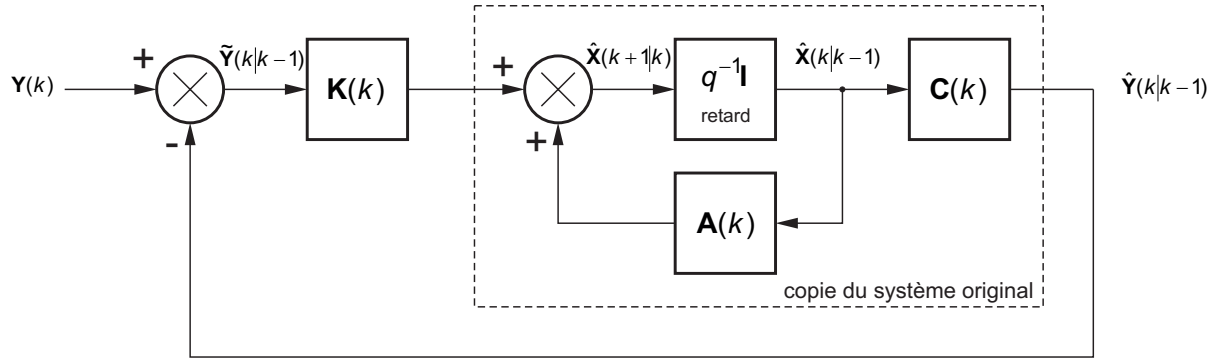

FIG. 3.12 – *Représentation graphique de l'algorithme de Kalman.*

avec

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{L}(k). \tag{3.95}$$

La relation (3.94) se compose de deux termes :

- $\mathbf{A}(k)\widehat{\mathbf{X}}(k|k-1)$ qui représente l'évolution de l'état estimé sans tenir compte de l'information nouvelle apportée par l'innovation. Ce résultat est conforme au bon sens : en effet en l'absence de mesure $\mathbf{Y}(k)$ la meilleure approximation *a priori* est celle qui vérifie l'équation d'état déterministe dans laquelle on ne tient pas compte du bruit d'état ;
- $\mathbf{K}(k)[\mathbf{Y}(k) - \mathbf{C}(k)\widehat{\mathbf{X}}(k|k-1)] = \mathbf{K}(k)[\mathbf{Y}(k) - \widehat{\mathbf{Y}}(k|k-1)] = \mathbf{K}(k)\widetilde{\mathbf{Y}}(k|k-1)$, terme de correction qui permet d'affiner l'estimation grossière précédente par la prise en compte de l'erreur de prédiction du signal de sortie.

Le terme $\mathbf{K}(k)$ est appelé *matrice de gain de Kalman*. Sa valeur traduit le degré de confiance qu'il est possible d'avoir dans la mesure. La représentation graphique de l'équation (3.94), donnée par la figure 3.12, met en évidence la présence d'une contre-réaction et montre que l'algorithme de Kalman se comporte comme un régulateur.

La troisième étape de la démonstration montre comment la matrice de gain de Kalman, $\mathbf{K}(k)$, peut être calculée.

Troisième phase : calcul de la matrice de gain de Kalman

Cette matrice s'écrit

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k)\left\{\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}_V(k,k)\right\}^{-1} \tag{3.96}$$

où $\mathbf{P}(k|k-1)$, définie par l'équation (3.83), représente la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. La relation (3.96) peut encore s'écrire $\mathbf{K}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{L}(k)$ avec

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k)\left\{\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}_V(k,k)\right\}^{-1}. \tag{3.97}$$

C'est cette dernière matrice qui est calculée dans la pratique.

Quatrième phase : calcul de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation

Cette matrice donne les moyens de juger la qualité des estimations. Elle peut être calculée de manière récursive à l'aide de la relation

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{R}_W(k,k) \tag{3.98}$$

avec

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{L}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1). \tag{3.99}$$

Ainsi

$$\mathbf{P}(k+1|k) = [\mathbf{A}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)]\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{R}_W(k,k). \tag{3.100}$$

Résumé de l'algorithme de Kalman

L'ensemble des résultats établis précédemment permet trouver la prédiction de $\mathbf{X}(k+1)$ à partir de toutes les mesures de $\mathbf{Y}(k)$ de $k=0$ à k. Cette procédure est donc équivalente ici à une opération de prédiction à un pas. De plus par cette méthode il est aussi possible d'obtenir l'estimation de $\mathbf{X}(k)$ à partir de toutes les valeurs de $\mathbf{Y}(k)$, c'est à dire $\mathbf{X}(k|k)$. Le filtrage de Kalman est alors équivalent à une opération de filtrage dont l'algorithme le plus général, satisfaisant néanmoins la condition de linéarité, peut se résumer ainsi :

À partir des conditions initiales suivantes

1. $\mathbf{P}(0|-1) = \mathbf{P}_0$
2. $\widehat{\mathbf{X}}(0|-1) = E[\mathbf{X}(0)] = \mathbf{X}_0$
3. $\mathbf{L}(0) = \mathbf{P}_0\mathbf{C}^T(0)\left\{\mathbf{C}(0)\mathbf{P}_0\mathbf{C}^T(0) + \mathbf{R}_V(0,0)\right\}^{-1}$
4. $\widehat{\mathbf{X}}(0|0) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{L}(0)[\mathbf{Y}(0) - \mathbf{C}(0)\mathbf{X}_0]$

effectuer les calculs suivants pour $k = 0,1,2,\cdots$:

1. détermination de la matrice

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k)\left\{\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}_V(k,k)\right\}^{-1} \tag{3.101}$$

2. estimation de l'état courant

$$\widehat{\mathbf{X}}(k|k) = \widehat{\mathbf{X}}(k|k-1) + \mathbf{L}(k)[\mathbf{Y}(k) - \mathbf{C}(k)\widehat{\mathbf{X}}(k|k-1)] \tag{3.102}$$

3. détermination de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{L}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1) \tag{3.103}$$

4. estimation de l'état à un pas

$$\widehat{\mathbf{X}}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\widehat{\mathbf{X}}(k|k) \tag{3.104}$$

5. prédiction de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{R}_W(k,k) \tag{3.105}$$

La figure 3.13 résume la procédure de filtrage de Kalman et met en évidence les phases d'estimation courante, appelée encore *phase de mise à jour* et de prédiction à un pas.

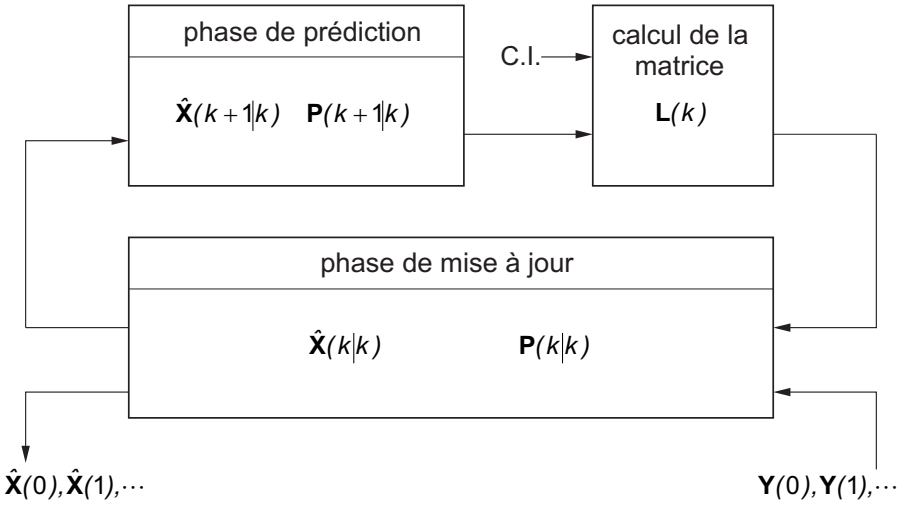

FIG. 3.13 – *Résumé de l'algorithme de Kalman.*

3.8 Estimation par filtre de Kalman étendus

Le filtrage de Kalman tel qu'il a été présenté précédemment ne permet l'estimation des état d'un système qu'à la condition où les équations d'états et d'observation sont des fonctions linéaires des états. Cependant de nombreux problèmes de physique susceptibles d'être résolus à l'aide des méthodes de Kalman présentent un caractère fortement non-linéaire. Il est possible de citer, à titre d'exemple le suivi de trajectoire radar, la commande sans capteur de machine asynchrone, la démodulation de fréquence et les systèmes de synchronisation en télécommunications comme les PLL, catégorie à laquelle appartient le problème d'estimation des paramètres de la vitesse acoustique en ALD.

L'objectif de ce paragraphe est de montrer de quelle manière les méthodes à base de filtrage de Kalman peuvent être adaptées à la résolution de tels problèmes, moyennant certaines approximations.

3.8.1 Principe de la méthode

Le principe de la méthode de traitement d'un système non-linéaire à l'aide d'un EKF repose sur la linéarisation du problème à l'aide d'un développement de Taylor limité à l'ordre un, autour de l'estimation courante $\widehat{\mathbf{X}}(k|k)$. Il est alors possible d'écrire

$$\mathbf{X}(k+1) = F[k,\widehat{\mathbf{X}}(k|k)] + \mathbf{A}(k)[\mathbf{X}(k) - \widehat{\mathbf{X}}(k|k)] + \cdots \tag{3.106}$$

où

$$\mathbf{A}(k) = \left.\frac{\partial F[k,\mathbf{X}(k)]}{\partial \mathbf{X}(k)}\right|_{\mathbf{X}(k)=\widehat{\mathbf{X}}(k|k)}. \tag{3.107}$$

Sur le même principe le développement limité à l'ordre 1 de l'équation d'observation donne

$$\mathbf{Y}(k) = G[k,\widehat{\mathbf{X}}(k|k)] + \mathbf{C}(k)[\mathbf{X}(k) - \widehat{\mathbf{X}}(k|k)] + \cdots \tag{3.108}$$

où

$$\mathbf{C}(k) = \left.\frac{\partial G[k,\mathbf{X}(k)]}{\partial \mathbf{X}(k)}\right|_{\mathbf{X}(k)=\widehat{\mathbf{X}}(k|k)}. \tag{3.109}$$

Les matrices $\mathbf{A}(k)$ et $\mathbf{C}(k)$, définies par les relations (3.107) et (3.109), sont donc utilisées ici dans une adaptation au cas non linéaire de l'algorithme général de Kalman présenté au paragraphe 3.7.3. Des développement de Taylor d'ordre supérieur à un sont, malgré tout, envisageables mais au prix d'un accroissement de la complexité des calculs.

3.8.2 Algorithme général de l'EKF

À partir des conditions initiales suivantes :

1. $\mathbf{P}(0|-1) = \mathbf{P}_0$
2. $\widehat{\mathbf{X}}(0|-1) = E[\mathbf{X}(0)] = \mathbf{X}_0$
3. $\mathbf{C}(0) = \left.\dfrac{\partial G[0,\mathbf{X}(k)]}{\partial \mathbf{X}(k)}\right|_{\mathbf{X}(k)=X_0}$

effectuer les calculs suivants pour $k = 0,1,2,\cdots$:

1. détermination de la matrice

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}_V(k,k)\right]^{-1} \tag{3.110}$$

2. estimation de l'état courant

$$\widehat{\mathbf{X}}(k|k) = \widehat{\mathbf{X}}(k|k-1) + \mathbf{L}(k)[\mathbf{Y}(k) - \mathbf{C}(k)\widehat{\mathbf{X}}(k|k-1)] \tag{3.111}$$

3. calcul de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{L}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1) \tag{3.112}$$

4. estimation de l'état à un pas

$$\widehat{\mathbf{X}}(k+1|k) = F[k,\widehat{\mathbf{X}}(k|k)][\mathbf{Y}(k) - \mathbf{C}(k)\widehat{\mathbf{X}}(k|k-1)] \tag{3.113}$$

5. développement limité à l'ordre 1 de l'équation d'état

$$\mathbf{A}(k) = \left.\dfrac{\partial F[k,\mathbf{X}(k)]}{\partial \mathbf{X}(k)}\right|_{\mathbf{X}(k)=\widehat{\mathbf{X}}(k|k)} \tag{3.114}$$

6. détermination de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{R}_W(k,k) \tag{3.115}$$

7. développement limité à l'ordre 1 de l'équation d'observation

$$\mathbf{C}(k) = \left.\dfrac{\partial G[k,\mathbf{X}(k)]}{\partial \mathbf{X}(k)}\right|_{\mathbf{X}(k)=\widehat{\mathbf{X}}(k|k)} \tag{3.116}$$

3.8.3 Modélisation du signal Doppler dans l'espace d'état

Pour pouvoir estimer les paramètres de la vitesse acoustique à l'aide d'un EKF il convient de proposer un modèle d'état du signal Doppler décrit par les signaux en quadrature $y_1(t)$ et $y_2(t)$ donnés respectivement par les équations (2.53) et (2.54). Pour cela il faut rechercher le système d'équations aux différences dont les signaux $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont solutions. Il existe une infinité de solutions permettant de modéliser les signaux Doppler. En pratique, par soucis d'efficacité et de rapidité de calcul, il est nécessaire de limiter le nombre d'états à estimer.

Pour établir un modèle d'état simple décrivant l'évolution des signaux d'observation $y_1(k)$ et $y_2(k)$, l'enveloppe réelle $A(k)$ du signal est supposée être disponible à chaque instant k[4]. En effet celle-ci peut être évaluée à partir de l'opération non-linéaire

$$A(k) = \sqrt{y_1^2(k) + y_2^2(k)}. \tag{3.117}$$

Le calcul de $A(k)$ par l'expression (3.117) n'est correct que si les signaux $y_1(k)$ et $y_2(k)$ sont non-bruités ou, au moins, si les RSB sont suffisamment élevés. La détermination du modèle d'état associé au signal Doppler passe alors par quatre étapes successives :

- choix des variables d'état;
- écriture des équations d'état;
- formulation des équations d'observation;
- calcul des développements de Taylor de ces équations.

Choix des états du système

Le signal Doppler peut être entièrement décrit à l'aide de quatre états, $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ et $x_4(k)$ judicieusement choisis. Les états retenus pour ce problème sont

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \phi(k), && (3.118)\\ x_2(k) &= V_{\text{ac}} \cos\phi_{\text{ac}}, && (3.119)\\ x_3(k) &= V_{\text{ac}} \sin\phi_{\text{ac}}, && (3.120)\\ x_4(k) &= V_{\text{ec}}. && (3.121) \end{aligned}$$

Ce choix rend possible l'estimation conjointe, dans le temps, de l'amplitude, V_{ac} et de la phase, ϕ_{ac} de la vitesse acoustique ainsi que la vitesse d'écoulement, V_{ec}.

Écriture des équations d'état

Le calcul de la différence $x_1(k+1) - x_1(k)$ donne l'équation d'état vérifiée par le premier état du système

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \frac{D}{F_{\text{ac}}}\Delta_S(k+1)x_2(k) + \frac{D}{F_{\text{ac}}}\Delta_C(k+1)x_3(k) + 2\pi D T_e x_4(k). \tag{3.122}$$

Cette expression fait intervenir deux variables dépendant du temps

$$\begin{aligned} \Delta_S(k+1) &= \sin[2\pi f_{\text{ac}}(k+1)] - \sin(2\pi f_{\text{ac}}k) && (3.123)\\ \Delta_C(k+1) &= \cos[2\pi f_{\text{ac}}(k+1)] - \cos(2\pi f_{\text{ac}}k). && (3.124) \end{aligned}$$

4. L'enveloppe réelle du signal Doppler, définie par $A(k)$, ne doit pas être confondue ici avec la matrice d'état notée $\mathbf{A}(k)$.

Les états $x_2(k)$, $x_3(k)$ et $x_4(k)$ caractérisent quant à eux des constantes aléatoires. Pour ce cas particulier, les équations d'état associées s'écrivent simplement

$$x_2(k+1) = x_2(k), \tag{3.125}$$
$$x_3(k+1) = x_3(k), \tag{3.126}$$
$$x_4(k+1) = x_4(k). \tag{3.127}$$

Les quatre équations (3.122), (3.125), (3.126) et (3.127) peuvent être regroupées et présentées en utilisant la formulation matricielle

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D}{F_{\mathrm{ac}}}\Delta_S(k+1) & \frac{D}{F_{\mathrm{ac}}}\Delta_C(k+1) & 2\pi DT_e \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}. \tag{3.128}$$

En introduisant la matrice

$$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D}{F_{\mathrm{ac}}}\Delta_S(k+1) & \frac{D}{F_{\mathrm{ac}}}\Delta_C(k+1) & 2\pi DT_e \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.129}$$

et le vecteur d'état

$$\mathbf{X}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k)]^T \tag{3.130}$$

la réécriture de la relation (3.128) conduit à l'équation d'état

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{X}(k). \tag{3.131}$$

L'examen de la matrice (3.129) montre que le signal Doppler est modélisé par une équation d'état non stationnaire mais linéaire. En effet, pour calculer $\mathbf{A}(k)$ il est indispensable d'évaluer à chaque instant k les deux termes $\Delta_S(k+1)$ et $\Delta_C(k+1)$.

Formulation des équations d'observation

L'introduction dans les expressions (2.55) et (2.56) de la définition des états proposée précédemment, conduit aux deux équations d'observations associées au problème

$$y_1(k) = A(k)\cos[x_1(k)] + v_1(k) \tag{3.132}$$
$$y_2(k) = A(k)\sin[x_1(k)] + v_2(k). \tag{3.133}$$

Ces deux équations supposent que l'enveloppe $A(k)$ du signal est évaluée à chaque instant, sans trop d'erreur, par la relation (3.117).

Calcul des développements de Taylor des équations d'état et d'observation

L'équation d'état proposée par la relation (3.131) est linéaire. Il n'est donc pas nécessaire de lui rechercher un développement limité autour de l'estimation du vecteur d'état $\mathbf{X}(k) = \widehat{\mathbf{X}}(k|k)$. Il n'en va pas de même pour les deux équations d'observation (3.132) et (3.133) qui présentent un caractère non linéaire très marqué. La matrice d'observation est alors donnée par

$$\mathbf{C}(k+1) = \left.\frac{\partial G[k+1,\mathbf{X}(k)]}{\partial \mathbf{X}(k)}\right|_{\mathbf{X}(k)=\widehat{\mathbf{X}}(k+1|k)} = \begin{bmatrix} -A(k+1)\sin[\widehat{x}_1(k+1|k)] & 0 & 0 & 0 \\ +A(k+1)\cos[\widehat{x}_1(k+1|k)] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.134}$$

Le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ regroupant les paramètres de la vitesse acoustique peut alors être estimé à chaque instant k à partir de $\widehat{\mathbf{X}}(k+1|k)$. En effet

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k) = [\widehat{V}_{\rm ac}(k),\widehat{\phi}_{\rm ac}(k),\widehat{V}_{\rm ec}(k)]^T \tag{3.135}$$

avec

$$\widehat{V}_{\rm ac}(k) = \sqrt{\widehat{x}_2(k)+\widehat{x}_3(k)}, \tag{3.136}$$

$$\widehat{\phi}_{\rm ac}(k) = \arctan\left[\frac{\widehat{x}_3(k)}{\widehat{x}_2(k)}\right], \tag{3.137}$$

$$\widehat{V}_{\rm ec}(k) = \widehat{x}_4(k). \tag{3.138}$$

3.8.4 Application du filtre de Kalman étendu à l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique

Les lignes précédentes ont permis de donner les principes et les algorithmes généraux du filtrage de Kalman récursif, dans les cas linéaire et non-linéaire. Ce travail a permis par la suite de proposer un modèle d'état du signal Doppler adapté à cette méthode d'estimation.

Ce paragraphe s'attache à décrire comment le principe de filtrage de Kalman peut être adapté pour l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique. Dans un premier temps, l'influence de la mesure de l'enveloppe $A(k)$ sur le fonctionnement et les performances de l'algorithme de Kalman est étudiée.

Influence de la mesure de l'enveloppe

Pour établir un modèle d'état simple décrivant l'évolution des signaux d'observation $y_1(k)$ et $y_2(k)$ il a été supposé que l'enveloppe réelle $A(k)$ du signal Doppler était disponible à chaque instant grâce à l'opération non-linéaire (3.117). Or le calcul de $A(k)$ par cette expression n'est juste que si les mesures de $y_1(k)$ et de $y_2(k)$ sont non-bruitées ou tout au moins si les rapports signal sur bruit sont bons. Dans la pratique $y_1(k)$ et de $y_2(k)$ sont perturbés par un bruit supposé additif, gaussien, de valeur moyenne nulle et de variance σ^2. L'utilisation de la mesure de $A(k)$ est alors susceptible d'engendrer un biais d'estimation voire d'empêcher la convergence de l'algorithme de Kalman vers les valeurs correctes des paramètres de la vitesse acoustique.

Afin d'étudier plus finement ce dernier point il est indispensable d'évaluer l'effet de ce bruit sur la valeur moyenne de l'enveloppe estimée du signal Doppler. Dans un premier temps les amplitudes des signaux d'observation sont supposées constantes, *i.e.* $A(k) = A$. Ces signaux,

donnés par les équations (2.57) et (2.58), deviennent alors

$$y_1(k) = s_1(k) + b_1(k) = A\cos\phi(k) + b_1(k), \tag{3.139}$$
$$y_2(k) = s_2(k) + b_2(k) = A\sin\phi(k) + b_2(k). \tag{3.140}$$

L'enveloppe du signal perturbé s'obtient par

$$A_b = \sqrt{y_1^2(k) + y_2^2(k)} = \sqrt{[s_1(k) + b_1(k)]^2 + [s_2(k) + b_2(k)]^2}. \tag{3.141}$$

Si σ^2 est la puissance de bruit perturbateur la densité de probabilité de A_b s'écrit [18]

$$p(A_b) = \frac{A_b}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{A_b^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{A_b A}{\sigma^2}\right) \tag{3.142}$$

où

$$A = \sqrt{s_1^2(k) + s_2^2(k)} \tag{3.143}$$

est l'enveloppe du signal utile, *i.e.* non-perturbé par le bruit additif, et

$$I_0(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(u\cos\phi)d\phi \tag{3.144}$$

désigne la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro [88].

Dans la pratique l'amplitude réelle du signal Doppler dépend du temps. La DdP (3.142) devient alors

$$p\left[A_b(k)\right] = \frac{A_b(k)}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{A_b(k)^2 + A(k)^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left[\frac{A_b(k)A(k)}{\sigma^2}\right]. \tag{3.145}$$

En l'absence de particule dans le volume de mesure $A(k)$ est très proche de zéro et les signaux d'observation ne comportent que du bruit. La relation (3.145) devient

$$p\left[A_b(k)\right] \equiv \frac{A_b(k)}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{A_b(k)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{3.146}$$

La DdP de l'enveloppe se réduit alors à une distribution de Rayleigh de moyenne et de variance respectivement égales à [89]

$$\mu_A = E[A_b] = \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} = 1{,}25\sigma \tag{3.147}$$

et

$$\sigma_A^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2 = 0{,}43\sigma^2. \tag{3.148}$$

En revanche, pour un rapport signal sur bruit *local*[5] important la DdP se rapproche d'une distribution gaussienne [89, 18]. Dans ce cas en effet

$$p\left[A_b(k)\right] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{[A_b(k) - A(k)]^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{3.149}$$

L'enveloppe estimée est donc en moyenne égale à l'enveloppe réelle, c'est à dire que

$$\mu_A(k) = A(k), \tag{3.150}$$

et présente une variance

$$\sigma_A^2(k) = \sigma^2 \tag{3.151}$$

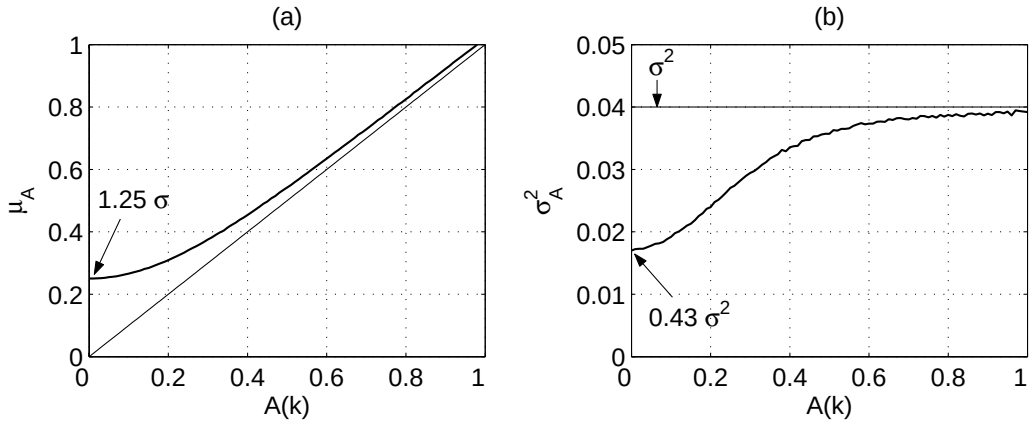

FIG. 3.14 – *Évolution de la moyenne* (a) *et de la variance* (b) *de l'enveloppe du signal Doppler en fonction de l'amplitude* $A(k)$. RSB = 14 dB.

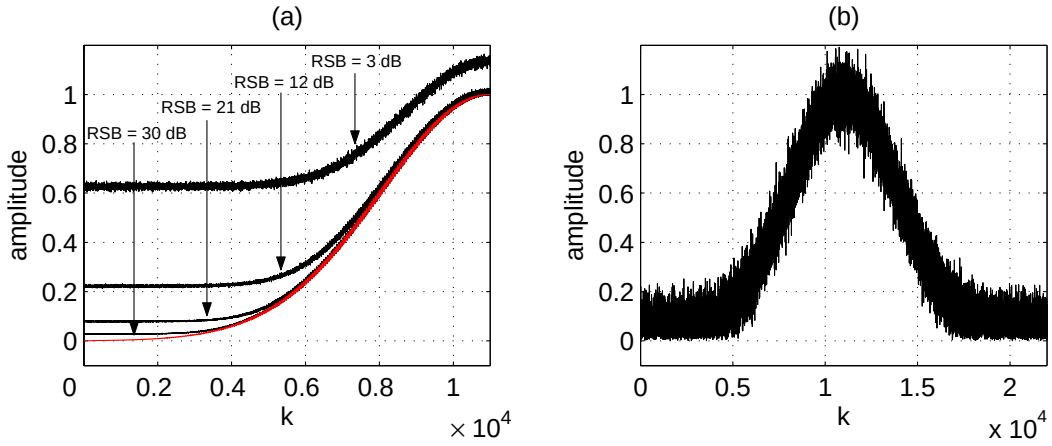

FIG. 3.15 – (a) *Allure de la valeur moyenne de l'enveloppe du signal Doppler pour différents* RSB*; la courbe rouge présente la forme de l'enveloppe en l'absence de bruit.* (b) *Allure de l'enveloppe pour* RSB = 21 dB.

égale à celle du bruit. La figure 3.14 montre les évolutions de la moyenne et de la variance de l'enveloppe d'un signal Doppler en fonction de l'amplitude $A(k)$. La figure 3.15 (a) illustre quant à elle les allures prises par la valeur moyenne, calculée à partir de 2000 points, de l'enveloppe estimée pour quatre valeurs différentes du RSB. De nombreux essais ont mis en évidence l'incapacité de l'algorithme de Kalman à estimer correctement les valeurs des paramètres de la vitesse acoustique lorsque l'analyse débute dans une zone où les signaux d'observation ne présentent pas encore une amplitude suffisante par rapport au niveau de bruit. Après de nombreuses simulations il est possible d'admettre, de manière tout à fait empirique, que la mise en œuvre de l'algorithme conduit à des valeurs crédibles de paramètres pour des amplitudes A_{seuil} supérieures à environ deux fois la valeur seuil de $1{,}25\sigma$ soit en fait

$$A_{\text{seuil}} > 2{,}5\sigma \tag{3.152}$$

5. Le RSB *local* peut se définir comme le rapport entre la puissance d'un signal sinusoïdal d'amplitude constante égale à celle de l'enveloppe $A(k)$ à l'instant considéré et la puissance de bruit.

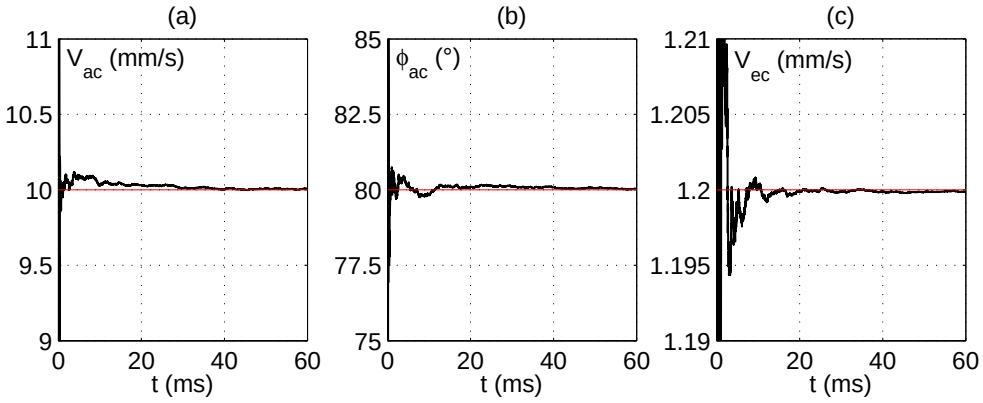

FIG. 3.16 – *Exemple d'estimation des paramètres de la vitesse acoustique par EKF.* $V_{\text{ac}} = 10$ mm/s, $\phi_{\text{ac}} = 80^{\text{o}}$ *et* $V_{\text{ec}} = 1{,}2$ mm/s, *RSB* $= 3$ dB.

pour une amplitude maximale $K = 1$ du signal Doppler. Dans ces conditions l'enveloppe estimée est proche de l'enveloppe réelle et présente une DdP presque gaussienne comme on peut le constater à l'examen des figures 3.14 et 3.15. Ce seuil s'exprime encore en fonction du rapport signal sur bruit par

$$A_{\text{seuil}} > \frac{2{,}5K}{\sqrt{2\text{RSB}}}. \tag{3.153}$$

Dans cette étude il est proposé d'activer le filtrage au moment où l'enveloppe du signal Doppler atteint sa valeur maximale, c'est à dire lorsque $t = t_0$. De cette manière il est possible de s'affranchir de la connaissance de la largeur du signal Doppler, les durées des bouffées n'étant pas connues *a priori*. Ce choix prive malgré tout le filtre de Kalman de la moitié de l'information concernant le signal Doppler. Cependant la vitesse de convergence de l'algorithme est suffisamment rapide, les lignes qui suivent vont le montrer, pour qu'il soit possible d'estimer avec précision les paramètres de la vitesse à partir d'un nombre réduit d'échantillons.

Vitesse de convergence de l'algorithme lorsque les conditions initiales sont mal connues

La figure 3.16 montre le comportement de l'EKF lorsqu'il est utilisé pour estimer les paramètres de la vitesse acoustique. Ces courbes ont été obtenues à partir de signaux de synthèse où $F_{\text{ac}} = 1000$ Hz, $V_{\text{ac}} = 10$ mm/s, $\phi_{\text{ac}} = 80^{\text{o}}$ et $V_{\text{ec}} = 1{,}2$ mm/s et pour un RSB $= 3$ dB, l'algorithme de filtrage étant initialisé avec $\mathbf{X}_0 = 0$. Or la rapidité de convergence de l'algorithme peut être améliorée en adoptant des conditions initiales plus probables, voire même, le cas échéant, en procédant à une mesure initiale moins précise, à l'image de ce qui a déjà été proposé pour l'estimation par MLE. Cette dernière solution présente néanmoins l'inconvénient d'être coûteuse sur le plan du temps de calcul et ne sera donc pas retenue. En fait il est également possible de règler la convergence du filtre de Kalman en agissant sur les valeurs de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $\mathbf{P}_0$. La figure 3.17 présente, pour différentes valeurs de $\mathbf{P}_0$ et pour des conditions initiales non-nulles, les évolutions des erreurs d'estimation des différents paramètres de la vitesse acoustique. Elle permet d'observer que, même en présence d'une erreur sur les conditions initiales, l'erreur d'estimation devient très faible au bout d'une vingtaine échantillons environ. À l'issue de cette période transitoire la puissance de l'erreur d'estimation, calculée par l'algorithme récursif, se stabilise comme le montre la figure 3.18.

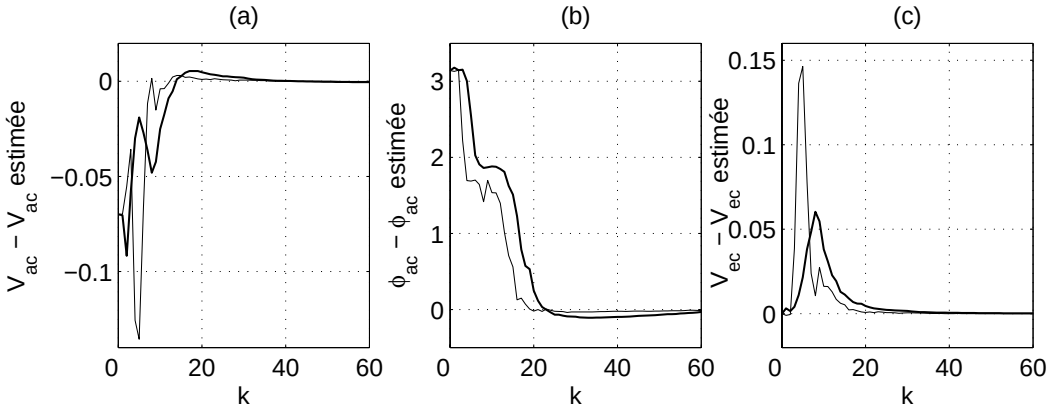

FIG. 3.17 – *Vitesse de convergence de l'algorithme de Kalman : erreurs d'estimation des paramètres* V_{ac} (a), ϕ_{ac} (b) *et* V_{ec} (c) *pour* $\mathbf{P}_0 = 10^{-4}\mathbf{I}$ (—) *et* $\mathbf{P}_0 = 10^{-2}\mathbf{I}$ (—). $V_{\text{ac}} = 10$ mm/s, $\phi_{\text{ac}} = 80^{\text{o}}$ *et* $V_{\text{ec}} = 1{,}2$ mm/s.

Dans ce cas le filtre de Kalman corrige très rapidement l'erreur d'estimation initiale. De plus la vitesse de recalage de l'algorithme dépend de la puissance de l'erreur d'estimation initiale $\mathbf{P}_0$. Plus cette puissance est élevée et plus le gain de Kalman initial est important, ce qui permet de corriger rapidement les erreurs d'estimation.

Les valeurs de $\mathbf{P}_0$ doivent souvent être choisies par tâtonnement à l'aide d'essais successifs en simulation. Dans cette application, pour des conditions initiales nulles, c'est à dire

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}, \tag{3.154}$$

la variance d'erreur d'estimation initiale adoptée est la matrice diagonale

$$\mathbf{P}_0 = 10^{-4}\mathbf{I}. \tag{3.155}$$

Par ailleurs les matrices de covariance des bruits d'état et d'observation sont souvent mal connues. Elles sont alors considérées comme des degrés de liberté qui permettent, notamment, de jouer sur la vitesse de convergence de l'algorithme. En particulier une valeur importante pour $\mathbf{R}_W(k,k)$ associée à une valeur faible de $\mathbf{R}_V(k,k)$ augmente cette vitesse, au détriment toutefois du bruit d'estimation dont la variance augmente. Comme la convergence de l'algorithme est rapide, malgré les conditions initiales nulles, il est possible de choisir une puissance de bruit fictif nulle, *i.e.*

$$\mathbf{R}_W(k,k) = \mathbf{0}. \tag{3.156}$$

Le bruit d'observation, quant à lui ne peut pas être nul car l'algorithme de Kalman fait apparaître, dans la relation (3.110), le calcul de $\mathbf{R}_V^{-1}$. Une solution simple permettant de résoudre ce problème consiste à choisir une valeur faible $\mathbf{R}_V$ en s'appuyant sur des résultats de simulations ce qui conduit, ici, à retenir comme bruit d'observation la matrice

$$\mathbf{R}_V(k,k) = 10^{-4}\mathbf{I}. \tag{3.157}$$

Il faut noter toutefois que cette méthode engendre une diminution du gain de Kalman ainsi qu'une augmentation de la variance des erreurs d'estimation. Le filtre de Kalman n'est alors plus optimal [85].

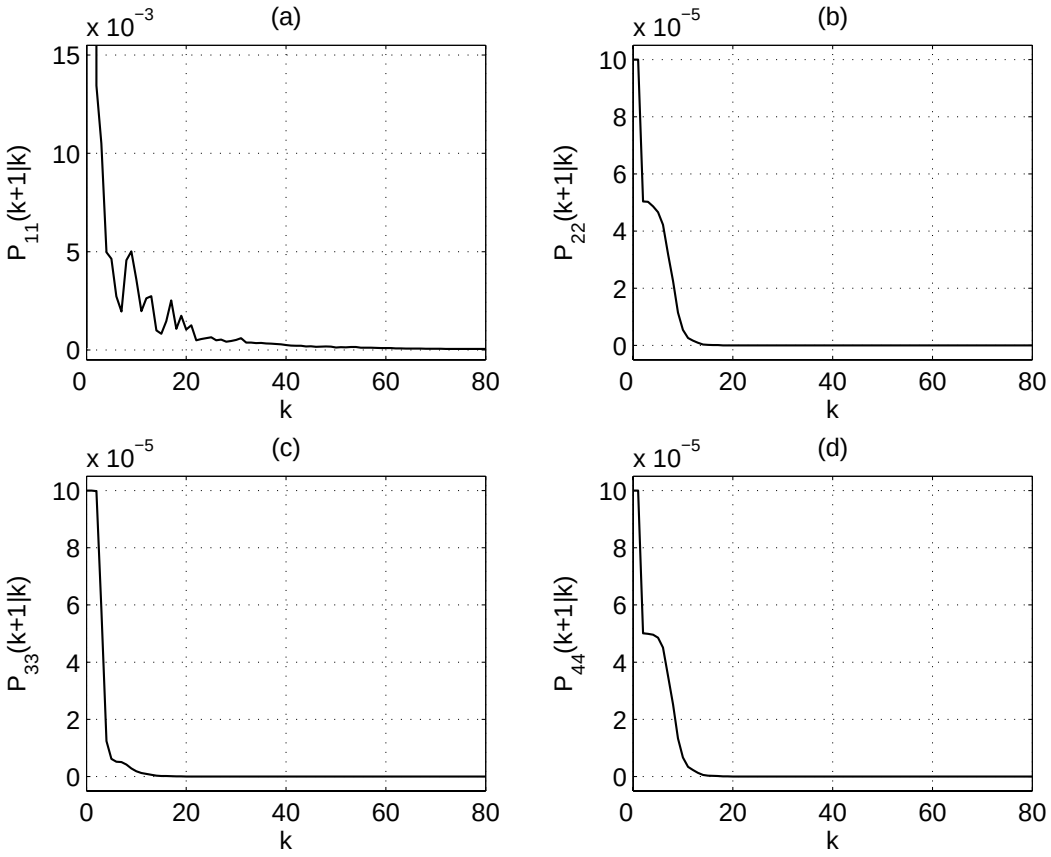

FIG. 3.18 – *Évolution temporelle de la puissance de l'erreur d'estimation pour* $\mathbf{P}_0 = 10^{-4}\mathbf{I}$. (a) $\mathbf{P}_{11}(k+1|k)$, (b) $\mathbf{P}_{22}(k+1|k)$, (c) $\mathbf{P}_{33}(k+1|k)$, (d) $\mathbf{P}_{44}(k+1|k)$. $V_{\text{ac}} = 10$ mm/s, $\phi_{\text{ac}} = 80^{\text{o}}$ *et* $V_{\text{ec}} = 1{,}2$ mm/s

Problème de fausse détection à faible RSB

La mise en œuvre du filtre de Kalman étendu tel qu'il a été présenté précédemment met en évidence un comportement particulier. En effet, dans le cas de l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique à partir de signaux Doppler à faible rapport signal sur bruit, il apparaît que l'estimation des paramètres par l'algorithme de l'EKF conduit fréquemment à des valeurs très éloignées des valeurs réelles comme l'illustre la figure 3.19 (a). Celle-ci donne, à titre d'exemple, la répartition des valeurs estimées de la vitesse d'écoulement et montre que des estimations de l'ordre de 200 mm/s peuvent être associées à des vitesses nominales de 1,2 mm/s. Ce phénomène se traduit alors par la présence de deux ou trois modes distincts dans l'histogramme. La représentation de cet histogramme à trois échelles différentes, -200 mm/s $< V_{\text{ec}} <$ +200 mm/s (figure 3.19 (a)), 1,17 mm/s $< V_{\text{ec}} <$ 1,23 mm/s (figure 3.19 (b)) et 1,199 mm/s $< V_{\text{ec}} <$ 1,201 mm/s (figure 3.19 (c)), obtenu à l'aide de 3000 simulations de Monte-Carlo, montre clairement que ces modes sont suffisamment éloignés entre eux pour qu'il soit possible de considérer deux classes de résultats : une classe de résultats dits *crédibles*, dont les valeurs se regroupent autour de la valeur *vraie*, et une classe de résultats dits *non-crédibles* très éloignée de la première classe.

Afin d'éviter de prendre en compte les résultats non-crédibles, ce qui aurait pour effet de fausser l'évaluation statistique de la qualité des estimations, il est indispensable de pouvoir trier les valeurs dès que le RSB est faible. Ce problème de décision binaire se résume alors au

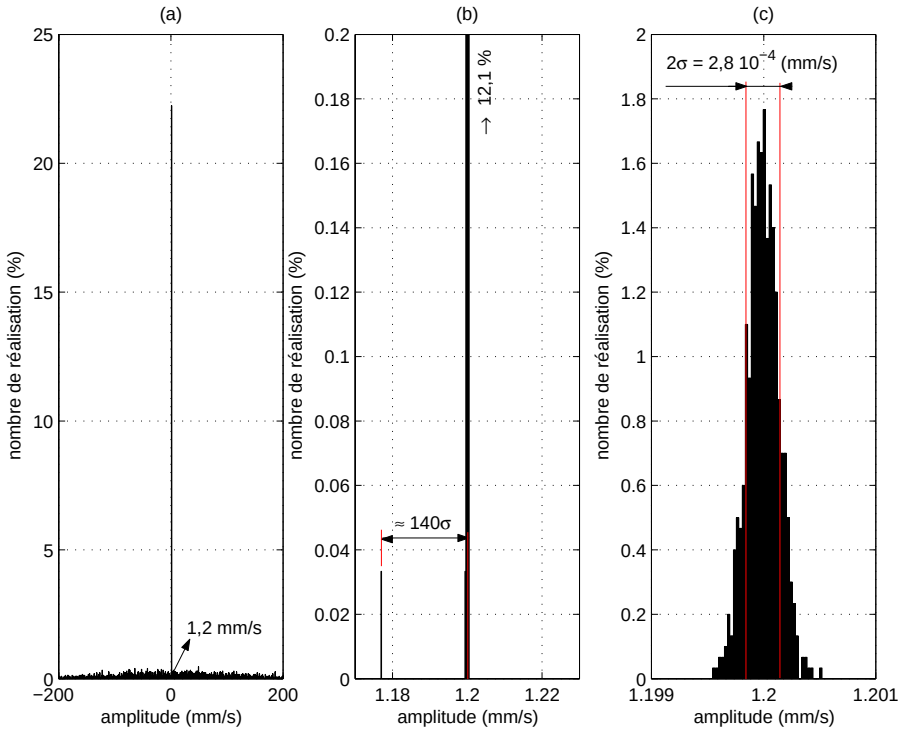

FIG. 3.19 – *Répartition des résultats de l'estimation du paramètre* V_{ec} *pour trois échelles* (a), (b) *et* (c) *différentes.* $F_{\mathrm{ac}} = 100$ Hz, $V_{\mathrm{ac}} = 10$ mm/s, $V_{\mathrm{ec}} = 1{,}2$ mm/s, RSB $= 3$ dB.

choix entre deux alternatives : l'estimation est crédible ou non-crédible. La règle de décision est obtenue en divisant l'espace des résultats possibles, appelés encore *évènements*, en deux régions distinctes de façon à rendre minimum le risque de fausses décisions.

Dans cette application un taux élevé de décisions correctes est envisageable car les modes de l'histogramme sont nettement séparés sur l'ensemble de la gamme des valeurs des paramètres acoustiques. De plus, le processus de décision peut être basé sur la seule observation des résultats concernant V_{ec} les histogrammes de V_{ac} et de ϕ_{ac} présentant des formes analogues.

Les probabilités d'apparition des deux résultats possibles n'étant pas connues *a priori* les critères de décision de Bayes ou de Neyman-Pearson ne sont pas utilisables ici par exemple. Par contre les formes analytiques des bornes de Cramer-Rao données par les relations (3.35), (3.36) et (3.37) renseignent sur l'ordre de grandeur des variances des estimations et donc sur la dispersion des résultats crédibles autour des valeurs vraies des paramètres de la vitesse acoustique. Même si les CRB ne donnent pas les variances exactes des estimations par EKF, le chapitre suivant montre que les variances réelles en sont suffisamment proches pour qu'il soit possible de prendre une décision correcte moyennant la prise en compte d'un coefficient de sécurité. De plus l'examen de $\mathrm{CRB}(V_{\mathrm{ec}})$ montre que les variances d'estimation de la vitesse d'écoulement ne dépend que de V_{ec} elle-même. Il est alors possible de proposer la procédure de décision suivante :

- acquisition des bouffées Doppler;
- recherche de la position du maximum de l'histogramme donnant une estimation grossière $\widehat{V}_{ec}$ de la vitesse d'écoulement;
- calcul de $\mathrm{CRB}(V_{\mathrm{ec}})$ puis de l'écart-type correspondant à partir de la relation (3.37);
- détermination de deux seuils $V_{ec_1} = \widehat{V}_{ec} - 10\sqrt{\mathrm{CRB}(V_{\mathrm{ec}})}$ et $V_{ec_2} = \widehat{V}_{ec} + 10\sqrt{\mathrm{CRB}(V_{\mathrm{ec}})}$

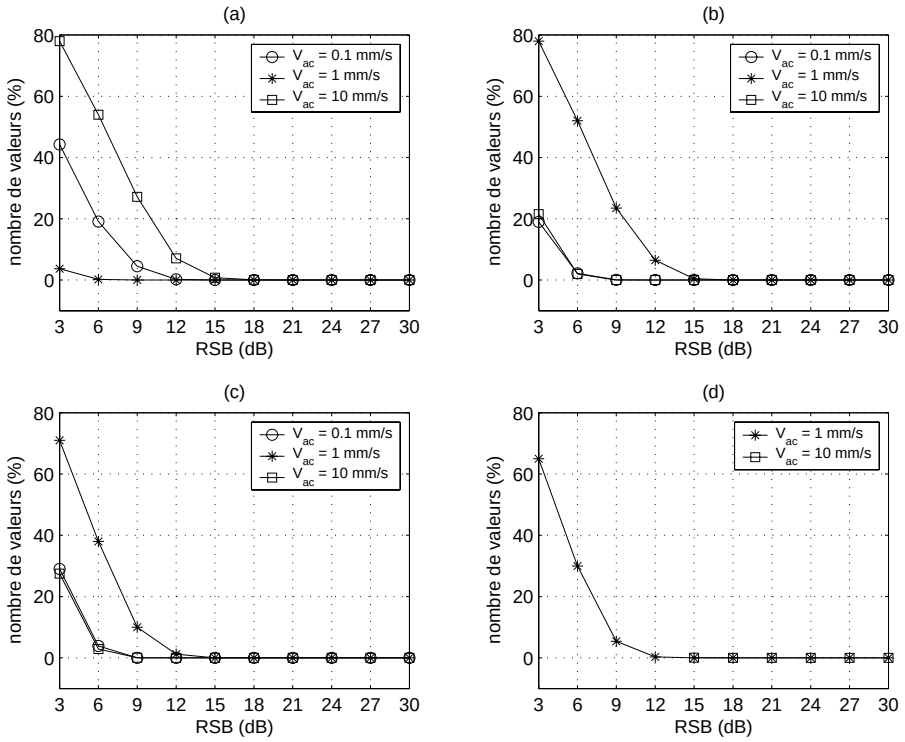

FIG. 3.20 – *Pourcentage de valeurs non-crédibles en fonction du* RSB. (a) $F_{\mathrm{ac}} = 100$ Hz, (b) $F_{\mathrm{ac}} = 500$ Hz, (c) $F_{\mathrm{ac}} = 1000$ Hz, (d) $F_{\mathrm{ac}} = 4000$ Hz.

(le facteur 10 a été déterminé expérimentalement en procédant à de nombreux essais recouvrant la gamme des paramètres à estimer);

– seuls sont conservés les résultats situés entre les deux seuils V_{ec_1} et V_{ec_2}. Cette solution permet alors d'obtenir des variances d'estimations proches des bornes de Cramer-Rao.

L'application de cette procédure sur 3000 résultats d'estimation par EKF, obtenus pour différentes valeurs de la fréquence acoustique F_{ac}, de la vitesse acoustique V_{ac} et du rapport signal sur bruit montre que le nombre de valeurs non-crédibles est d'autant plus important que le RSB est faible comme l'illustre la figure 3.20. Par contre dès lors que le RSB devient supérieur à 15 dB il n'est plus possible d'observer de valeurs non-crédibles, l'algorithme se calant alors systématiquement sur des valeurs proches des valeurs vraies. Ces résultats ont une incidence directe sur la conception du système chargé de détecter les bouffées Doppler. En effet, d'une manière très schématique, dans le cas où les signaux retenus par le détecteur présentent de faibles amplitudes, conduisant à des RSB inférieurs à 15 dB, il est indispensable que la validation des paramètres acoustiques estimés, basée sur l'examen de l'histogramme, s'opère à partir d'un nombre important de bouffées acquises. Dans le cas contraire, c'est à dire pour des signaux d'amplitude suffisante, cette précaution n'est pas indispensable.

3.9 Estimation de l'instant correspondant à la valeur maximale du signal Doppler

Les paragraphes précédents ont mis en évidence l'importance de connaître t_0, instant pour lequel le signal Doppler présente une amplitude maximale ce qui correspond, il faut le rappeler,

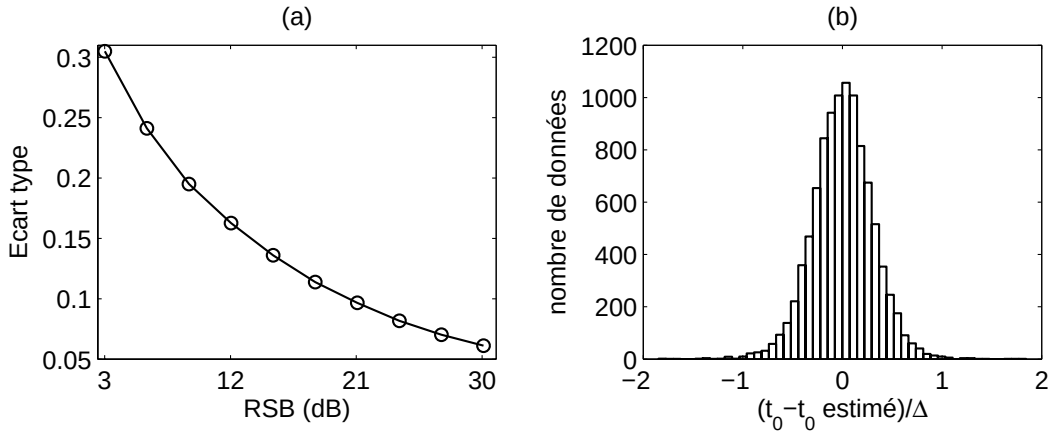

FIG. 3.21 – *Évolution de l'écart type des erreurs relatives d'estimation de* t_0 *en fonction du* RSB (a) *et allure de cette distribution pour* RSB = 3 dB (b).

à l'instant de passage de la particule au centre du volume de mesure. En effet, le calcul des CRB, mené au paragraphe 3.3.3, permet d'établir que les meilleures performances d'estimation sont obtenues lorsque t_c, instant correspondant au centre de la fenêtre d'observation du signal, est égal à t_0. De plus, dans le cas de l'utilisation du filtre de Kalman le début d'analyse est fixé là encore par t_c qui doit être proche de t_0 pour obtenir de bonnes performances.

Il faut noter qu'il aurait été possible d'estimer t_0 en prenant en compte ce paramètre dans le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ dès le départ de l'étude. Ceci aurait permis de trouver les valeurs de t_0 minimisant les CRB pour des valeurs des paramètres V_{ac}, ϕ_{ac} et V_{ec} fixées. Cette procédure aurait cependant conduit à des calculs fastidieux donnant des résultats difficilement interprétables. Il est en fait préférable d'adopter une méthode sous-optimale qui consiste à évaluer t_0 préalablement à l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique regroupés dans le vecteur $\boldsymbol{\theta}$.

Par ailleurs il n'est pas indispensable que l'évaluation de t_0 soit très précise. En effet si le nombre d'échantillons pris en compte dans l'analyse est suffisamment important, un certain débattement de t_c autour de la valeur optimale t_0 est envisageable sans modification notable des CRB. La figure 3.2 du paragraphe 3.3.4 montre en particulier qu'un débattement relatif

$$-2{,}5 < \frac{t_c}{\Delta} < +2{,}5 \tag{3.158}$$

où Δ représente la largeur du signal Doppler, modifie très peu chacune des CRB.

Toutes ces réflexions conduisent à proposer l'estimateur sous-optimal dont le principe consiste à retenir l'instant du maximum de l'enveloppe du signal Doppler. Cet estimateur, qui peut se formuler par

$$\widehat{t_0} = \arg \max_t A(t), \tag{3.159}$$

offre d'assez bonnes estimations de t_0 pour un coût calculatoire très réduit et donne $\widehat{t_0} = t_0$ pour des valeurs élevées du RSB. Pour des valeurs plus faibles du RSB, l'estimation $\widehat{t_0}$ varie, mais dans des proportions raisonnables. La figure 3.21 montre l'allure de la distribution des erreurs relatives d'estimation $(t_0 - \widehat{t_0})/\Delta$ pour un RSB = 3 dB ainsi que l'évolution de l'écart type de cette distribution pour différentes valeurs du RSB. Ces caractéristiques statistiques ont été obtenues au moyen de 10000 simulations de Monte-Carlo. Il ressort de cette étude que dans

le cas limite où RSB = 3 dB les écarts relatifs n'excèdent pas ±2, autrement dit

$$-2 < \frac{t_0 - \widehat{t}_0}{\Delta} < +2. \tag{3.160}$$

Ce résultat est conforme à la relation (3.158) et confirme l'idée qu'il est possible de se contenter d'un estimateur sous-optimal pour évaluer t_0 sans pour autant pénaliser de trop la précision des estimées des paramètres de la vitesse acoustique.

3.10 Conclusions

La détermination des Bornes de Cramer-Rao est d'une importance capitale lorsque l'on cherche à évaluer l'influence des paramètres du problème sur les performances des estimateurs. La première partie de ce chapitre a permis de mettre en évidence l'existence de formes analytiques approchées mais précises des CRB pour chacun des paramètres à estimer. Leur analyse permettra par la suite de guider le choix des paramètres, notamment celui de la période d'échantillonnage T_e, en fonction des contraintes qui seront imposées par le cahier des charges.

La suite de ce chapitre a permis de proposer trois méthodes pour l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique :

La première, basée sur le calcul de la dérivée de la phase (PDBE) du signal Doppler suivi d'une estimation des paramètres de la vitesse acoustique par une technique synchrone de la fréquence acoustique, se formule très simplement et ne nécessite que quelques opérations élémentaires.

Cette méthode, non-optimale, est essentiellement destinée à initialiser une technique d'estimation plus performante, basée sur l'estimation par maximum de vraisemblance (MLE). Le caractère périodique du signal Doppler est à l'origine de la présence de maxima locaux dans la fonction de vraisemblance ce qui impose l'initialisation de la procédure d'optimisation chargée de déterminer les paramètres de la vitesse acoustique. Cette deuxième méthode donne théoriquement les meilleurs résultats à condition toutefois que l'initialisation soit suffisamment fine pour assurer la convergence de la phase d'optimisation. Dans le cas contraire, lorsque des valeurs trop faibles des RSB ne permettent pas d'assurer cette convergence, seules les estimations initiales sont retenues. Par ailleurs cette opération de maximisation ne peut être assurée qu'une fois que toutes les observations sont disponibles ce qui augmente rapidement la complexité des calculs. Une approche envisageable pour résoudre ce problème consiste alors à traiter l'opération de maximisation en utilisant une méthode récursive représentée par le filtre de Kalman. En effet cette méthode, grâce à une hypothèse gaussienne-markovienne, peut être considérée comme un algorithme d'optimisation permettant de résoudre de manière récursive un problème de maximum de vraisemblance.

Enfin, le filtre de Kalman étendu au cas non-linéaire (EKF) appliqué à l'estimation de la vitesse acoustique constitue le dernier estimateur développé. L'emploi d'une telle méthode se justifie par le caractère fortement non-linéaire présenté par les équations d'observation du signal Doppler. Cette méthode, particulièrement adaptée à l'estimation en temps-réel, est utilisée ici pour estimer les états du signal Doppler et en déduire les paramètres de la vitesse acoustique.

Ces deux dernières méthodes présentent l'avantage d'estimer les paramètres de la vitesse acoustique de manière optimale à condition toutefois de disposer d'un modèle précis du signal et du bruit perturbateur, de la connaissance de la fréquence de l'excitation sinusoïdale ainsi que de l'instant correspondant au maximum du signal Doppler.

Le chapitre suivant est consacré à la comparaison des performances de ces trois estimateurs en terme de précision et de rapidité algorithmique.

Chapitre 4

Performances des estimateurs

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'évaluation numérique des performances des algorithmes d'estimation étudiés au chapitre 3, c'est à dire le PDBE, le MLE et l'EKF . Ce travail permettra notamment de comparer ces trois méthodes entre elles et de situer leurs performances respectives par rapport aux bornes de Cramer-Rao. Pour cela les statistiques de ces estimateurs et plus particulièrement leur biais et leur variance sont étudiés. Ceci permettra de mettre en évidence l'influence de la fréquence acoustique F_{ac}, de l'amplitude de la vitesse acoustique V_{ac} et du rapport signal sur bruit sur la qualité des estimations. Pour terminer ce chapitre, et compléter cette évaluation, une détermination sommaire des coûts calculatoires de ces méthodes est proposée.

4.2 Comparaison des performances des estimateurs avec les bornes de Cramer-Rao

4.2.1 Propriétés d'un estimateur

La qualité d'un estimateur et son comportement en présence de bruit sont habituellement jugés à partir du biais, donnant l'erreur systématique commise, et de la variance, grandeur significative de la dispersion des résultats autour de la valeur moyenne [18].

Le biais b correspond à la différence entre l'espérance mathématique (valeur moyenne) de l'estimation $\widehat{\theta}$ et celle de la valeur à estimer θ. Comme dans cette étude les paramètres à estimer sont déterministes, $\mathrm{E}\left[\theta\right] = \theta$ et le biais prend la forme

$$b_{\hat{\theta}} = \mathrm{E}[\widehat{\theta}] - \theta. \tag{4.1}$$

Dans le cas où $b = 0$ l'estimateur est *non-biaisé* et converge en probabilité vers la valeur vraie.

La variance indique, quant à elle, l'importance de la dispersion des estimations autour de la valeur moyenne. Elle est définie par

$$\sigma^2_{\hat{\theta}} = \mathrm{E}\left[(\widehat{\theta} - \mathrm{E}[\widehat{\theta}])^2\right]. \tag{4.2}$$

La variance d'une estimation non-biaisée est bornée inférieurement par les CRB. De plus, dans le cas particulier où l'estimation atteint cette limite l'estimateur est dit *efficace*. Un bon estimateur

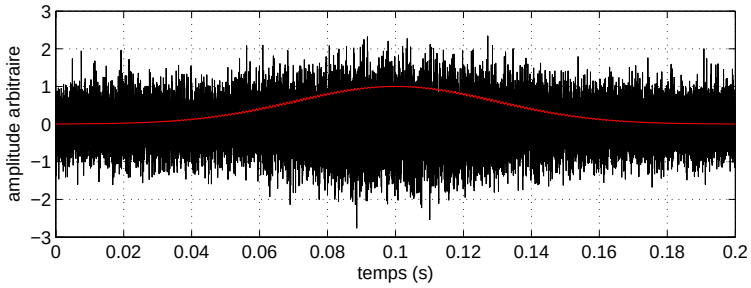

FIG. 4.1 – *Signal d'observation en phase* $y_1(t)$ *pour* RSB $= 3$ dB *et l'enveloppe réelle correspondante en rouge.* $F_{\text{ac}} = 1000$ Hz, $V_{\text{ac}} = 10$ mm/s et $V_{\text{ec}} = 1{,}2$ mm/s.

conduit donc à donner des estimations présentant un biais nul et une variance tendant vers les CRB.

L'évaluation du biais et de la variance de chaque estimateur est menée à partir de simulations numériques de Monte-Carlo qui consistent à générer, pour chaque jeu de paramètres $[V_{\text{ac}},\phi_{\text{ac}},V_{\text{ec}}]$, 500 signaux Doppler. Ceux-ci sont ensuite dégradés en y additionnant un bruit constitué d'une séquence pseudo-aléatoire à distribution gaussienne. En ajustant la puissance de ce bruit il est ainsi possible d'étudier le comportement des estimateurs pour des paramètres connus et des rapports signal sur bruit variables. Pour ce travail les valeurs suivantes ont été retenues :

$$F_{\text{ac}} = [100 \text{ Hz } 500 \text{ Hz } 1000 \text{ Hz } 2000 \text{ Hz } 4000 \text{ Hz}], \tag{4.3}$$

et

$$V_{\text{ac}} = [0{,}1\text{mm/s } 1\text{mm/s } 10\text{mm/s}]. \tag{4.4}$$

Ces valeurs recouvrent l'ensemble de la gamme des paramètres à estimer et conduisent à des indices de modulation $\alpha = DV_{\text{ac}}/F_{\text{ac}}$ compris entre 0,02 et 97. Ceux-ci présentent des ordres de grandeur proches de ceux des signaux auxquels se sont intéressées les recherches précédentes du LAUM.

La phase ϕ_{ac} n'intervenant pas dans la qualité des estimations, comme le montrent les formes analytiques des CRB (3.35), (3.36) et (3.37), sa valeur est fixée à 80°La vitesse d'écoulement V_{ec} est égale à 1,2 mm/s. Les autres paramètres du signal Doppler, choisis arbitrairement, sont $\phi_0 = 0$, $t_0 = 0$, $K = 1$ et $M = 1$. D'autre part, les constantes β et D, définies par les caractéristiques géométriques du dispositif expérimental et la longueur d'onde de la source laser, sont données par $\beta = 2 \cdot 10^4$ m^{-1} et $D = 9{,}7087 \cdot 10^5$ m^{-1}. Enfin, la fréquence d'échantillonnage retenue est $F_e = 100$ kHz.

4.2.2 Étude des performances des estimateurs

Les performances des estimateurs sont alors étudiées pour chaque couple $[F_{\text{ac}},V_{\text{ac}}]$ en fonction du RSB évoluant entre 3 dB et 30 dB par pas de 3 dB. Il est important de noter que dans la pratique un rapport signal sur bruit de l'ordre de 3 dB, pour un signal Doppler en bande de base, correspond à un signal très perturbé comme le montre la figure 4.1. Or il apparaît que la version de ce signal avant démodulation, c'est à dire présentant une fréquence porteuse égale à 40 MHz, est encore plus bruitée. En effet l'ordre de grandeur du facteur de forme F, donné par la relation (4.5),

$$\text{F} = \frac{\text{RSB}_p}{\text{RSB}_y} = \frac{B_y}{B_p}. \tag{4.5}$$

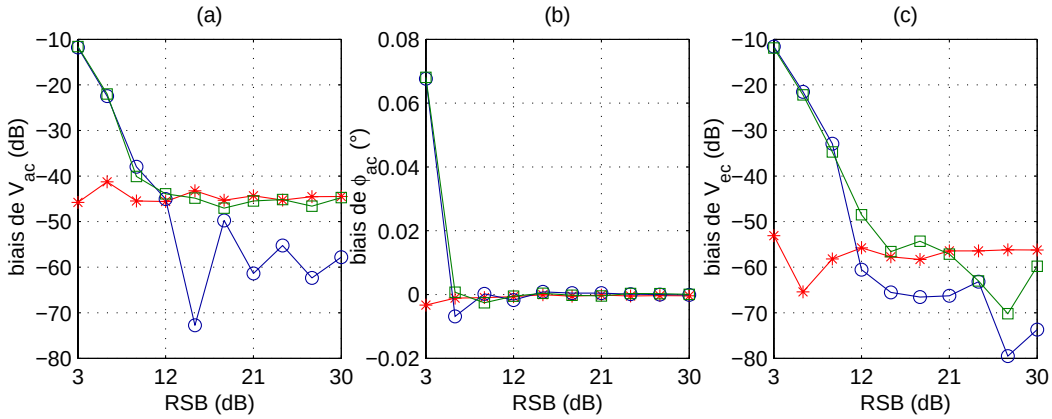

FIG. 4.2 – *Biais relatifs d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 1000$ Hz, $V_{ac} = 10$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

est égal au rapport entre les bandes passantes du photomultiplicateur, B_p, et du démodulateur en quadrature, B_y. À titre d'exemple pour $B_p \approx 100$ MHz et compte tenu de la fréquence de coupure du filtre passe-bas du démodulateur en quadrature $B_y = 10$ MHz, le facteur de forme $F \approx 1/10$ ce qui engendre un écart de l'ordre de -10 dB entre les RSB avant et après démodulation : $RSB_p \approx RSB_y - 10dB$. Ainsi il conviendra de tenir compte de cet écart dans l'interprétation des résultats, notamment lorsqu'ils seront comparés aux travaux déjà réalisés au LAUM obtenus pour des conditions d'échantillonnage et de filtrage différentes.

Biais des estimateurs

Le biais des estimations est obtenu en mesurant l'écart entre la moyenne de 500 réalisations des moyennes statistiques $\mathrm{E}[\hat{V}_{ac}]$, $\mathrm{E}[\hat{\phi}_{ac}]$ et $\mathrm{E}[\hat{V}_{ec}]$ et les valeurs des paramètres correspondants adoptés pour la synthèse des signaux Doppler. La figure 4.2 donne, à titre d'exemple, l'allure de ces biais relatifs, exprimés en dB, en fonction du RSB pour V_{ac} (a), ϕ_{ac} (b) et V_{ec} (c). La totalité des résultats recouvrant l'ensemble de la gamme des fréquences et des vitesses acoustiques est placé en annexes C. L'exemple typique de la figure 4.2 montre que les biais d'estimation sont d'autant plus faibles que le RSB est fort. L'examen des figures données en annexes C montre, de plus, que cette tendance est vérifiée quelles que soient les valeurs des fréquences et des vitesses acoustiques.

D'une façon générale, pour F_{ac} et V_{ac} données, l'estimateur EKF offre des biais sensiblement constants qui, dans tous les cas de figure, n'excèdent pas -25 dB, soit une erreur relative inférieure à 0,3%, pour l'estimation de V_{ac}, et -45 dB (0,003%) pour l'estimation de V_{ec}. Les erreurs sur l'estimation de la phase sont quant à elles toujours très proches de 0. Pour d'autres combinaisons de la fréquence et de la vitesse acoustique ces biais prennent même des valeurs extrêmement faibles, de l'ordre de -45 dB (0,003%) pour V_{ac} et -55 dB (0,0003%) pour V_{ec} lorsque $F_{ac} = 100$ Hz et $V_{ac} = 1$ mm/s par exemple. En revanche dans le cas particulier où $F_{ac} = 4000$ Hz et $V_{ac} = 0{,}1$ mm/s le biais augmente sensiblement. En effet les valeurs de la fréquence et de la vitesse acoustique correspondent dans ce cas à un taux de modulation $\alpha = 0{,}024$ à partir duquel l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique devient moins précise. Dans ce cas, et pour RSB > 9dB les biais d'estimation de V_{ac} et de V_{ec} atteignent respectivement -17 dB (2%) et -54 dB ($4 \cdot 10^{-4}$%).

L'utilisation des estimateurs PDBE et MLE permet, quant à elle, d'atteindre des biais encore

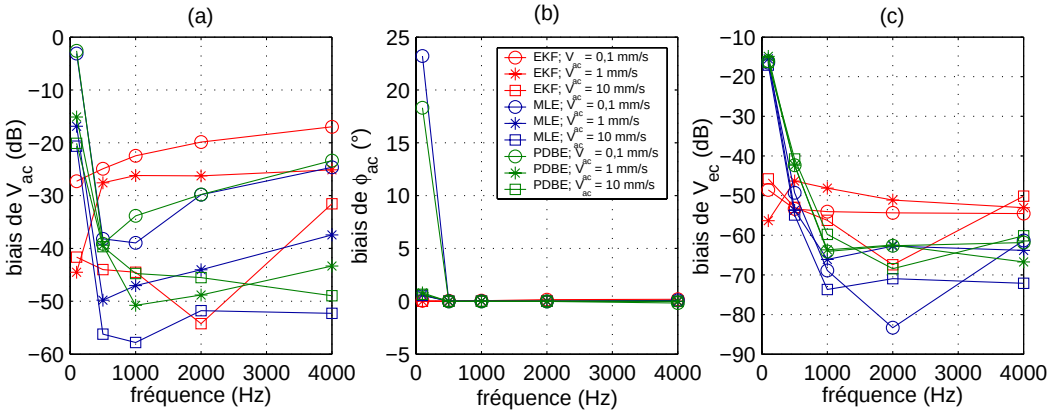

FIG. 4.3 – *Biais relatifs d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction de* F_{ac}. RSB = 30 dB, V_{ec} = 1,2 mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

plus faibles pour de forts RSB. Dans ce cas cette dernière méthode fournit les meilleurs résultats. En revanche dès lors que le RSB diminue la qualité des estimations se dégrade fortement pour présenter des erreurs toujours supérieures à -15 dB (3%), lorsque RSB = 3 dB pour l'estimation de V_{ac} par exemple. Par ailleurs ces deux méthodes présentent systématiquent des erreurs très importantes, même à forts RSB, dès que la fréquence acoustique diminue. Notamment, pour F_{ac} = 100 Hz, les meilleures performances ne sont atteintes que pour un RSB = 30 dB et restent néanmoins très modestes. Ces résultats s'expliquent en partie par les difficultés que rencontre la méthode PDBE pour estimer les paramètres de la vitesse acoustique à partir d'un nombre restreint de périodes acoustiques. En effet lorsque F_{ac} diminue, le nombre de périodes acoustiques disponibles pour l'analyse et pour une durée donnée du signal Doppler diminue, ce qui pénalise fortement les méthodes ne prenant pas en compte l'information *a priori* sur le signal Doppler. Ces résultats montrent, par ailleurs, que le fonctionnement de la méthode MLE est largement tributaire de son initialisation à partir de la méthode PDBE.

La figure 4.3, quant à elle, est représentative du comportement général des trois estimateurs pour un RSB = 30 dB, condition permettant d'obtenir, en principe, les meilleures performances d'estimation. Elle permet d'établir qu'à partir de fréquences acoustiques supérieures à 500 Hz l'utilisation des méthodes PDBE et surtout MLE offre les biais les plus faibles. En deça de ce seuil les biais deviennent plus importants. Même si la méthode d'estimation par EKF n'offre pas, dans l'absolu, les meilleures performances, elle engendre néanmoins des biais toujours faibles quelles que soient F_{ac} et V_{ac}. Le caractère non-linéaire des équations d'observation et l'exigence qui en découle de prévoir, à chaque itération, le calcul de leurs développements de Taylor à l'ordre un autour de l'estimation courante expliquent que les biais observés soient généralement supérieurs à ceux obtenus par les deux autres méthodes d'estimation. L'amélioration de la précision des développements limités obtenue en augmentant la fréquence d'échantillonnage T_e permettrait, entre autre, d'améliorer les performances de l'EKF vis à vis du biais. Enfin, il est possible aussi que le bruit d'état fictif joue un rôle non négligeable dans la présence de ce biais. Un meilleur réglage de la matrice $\mathbf{W}(k)$ est alors envisageable.

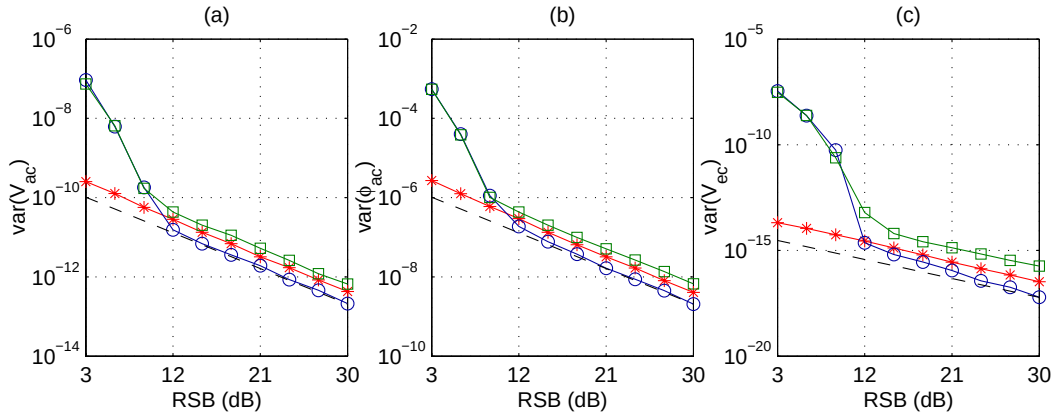

FIG. 4.4 – *Variances d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 1000$ Hz, $V_{ac} = 10$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

Variance des estimateurs

Les variances des trois estimateurs ont été estimées à partir de 500 simulations de Monte-Carlo, valeur suffisante dans la pratique pour assurer la convergence vers les vrais valeurs de la variance. Les CRB étant définies comme la limite inférieure des variances des estimateurs non-biaisées, leurs formes analytiques, établies en fonction du RSB par les équations (3.35), (3.36) et (3.37), sont également présentées. Ceci permet la comparaison, par rapport aux CRB, des variances des estimations de V_{ac}, ϕ_{ac} et V_{ec} utilisant les trois méthodes étudiées.

De la même façon que pour l'étude du biais, la figure 4.4 illustre de manière typique le comportement des estimateurs vis à vis de la variance. Cette figure montre que pour des RSB suffisamment importants la méthode MLE est celle qui conduit aux variances les plus faibles, leurs valeurs atteignant les CRB comme cela était d'ailleurs prévisible. Les variances les plus importantes sont obtenues par la méthode PDBE. Cependant, l'ensemble des résultats exposés à l'annexe C montre que ces performances ne sont atteintes que pour des RSB suffisamment élevés et pour des fréquences acoustiques supérieures à 100 Hz. Comme cela se rencontre fréquemment dans les problèmes d'estimation, la variance est soumise ici à un effet de seuil : à partir de 12 dB celle-ci s'éloigne nettement des CRB pour prendre des valeurs importantes. Là encore la qualité des estimations à partir du MLE dépend très étroitement de celle fournie par le PDBE.

En revanche, sans être optimales, les estimations des paramètres de la vitesse acoustique données par la méthode EKF, suivent asymptotiquement les CRB. De plus, l'examen attentif de ces courbes met en évidence que les variances, tout en restant très proches des CRB, en sont toutefois éloignées d'une distance presque constante, pour un couple donné de la fréquence et de vitesse acoustique. Ce constat est confirmé par la figure 4.5 donnant précisément ces écarts en dB entre les variances des estimations des paramètres et les CRB pour les trois méthodes PDBE, MLE et EKF. Pour des fréquences acoustiques à partir de 500 Hz il apparaît que les écarts par rapport aux CRB sont sensiblement constants. Pour l'estimation de l'amplitude V_{ac}, et de la phase ϕ_{ac}, ils sont de l'ordre de 5 dB (3%), 3 dB (2%) et 1 dB (1,3%) respectivement pour les méthodes PDBE, EKF et MLE. Pour l'estimation de la vitesse d'écoulement V_{ec} les écarts deviennent proches de 20 dB (100%), 8 dB (6%) et 8 dB (6%). Il convient ici de relativiser l'importance de ces derniers résultats et les amplitudes élevées des écarts, en considérant que les valeurs des CRB pour les estimées de V_{ec} sont, par nature, très faibles, de l'ordre de 10^{-16}.

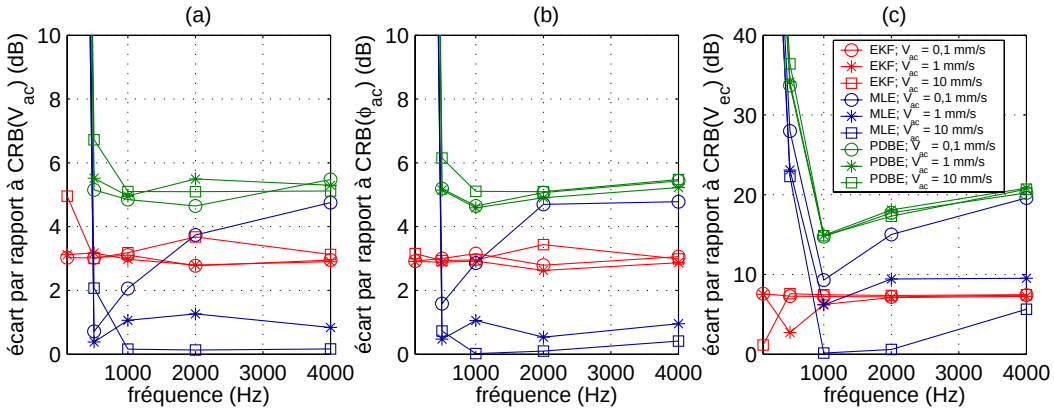

FIG. 4.5 – *Variances d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction de* F_{ac}. RSB = 30 dB.

4.2.3 Commentaire

Il ressort de ces évaluations que les méthodes d'estimation étudiées permettent, moyennant la prise en compte d'un maximum d'information *a priori* dans le modèle du signal Doppler, d'estimer avec des précisions acceptables les paramètres de la vitesse acoustique pour des indices de modulation α proches de 0,02. Cet ordre de grandeur, voisin des performances atteintes par l'estimateur par maximum de vraisemblance mis en œuvre par MELLET [16], est inférieur aux valeurs de α établies lors d'études antérieures [7, 10, 16].

Cependant, la comparaison de l'ensemble des résultats du paragraphe 4.2.2 avec ceux obtenus précédemment au LAUM reste délicate. En effet, la prise en compte de l'amplitude variable dans la modélisation du signal Doppler ne permet plus de considérer ici l'indice de modulation $\alpha = DV_{ac}/F_{ac}$ comme le paramètre *invariant* comme cela était le cas dans les travaux antérieurs. Dans cette étude la précision des estimations des paramètres de la vitesse acoustique est étroitement liée à la fréquence acoustique F_{ac} pour une vitesse d'écoulement V_{ec} donnée dont la valeur détermine, il faut le rappeler, la durée de la bouffée Doppler. Ainsi, les évaluations précédentes, menées à partir de V_{ec} = 1,2 mm/s, permettent d'observer une diminution sensible de la précision des estimations dès que F_{ac} devient inférieure à 500 Hz. Autrement dit, pour une largeur donnée du signal Doppler, la précision des estimations décroît lorsque le nombre de périodes acoustiques disponibles pour la mesure diminue. Ce type de comportement est par ailleurs confirmé par l'examen des bornes de Cramer-Rao (3.35) et (3.36).

Dans la pratique il est souvent difficile d'acquérir une bouffée Doppler de durée suffisamment importante au regard de la période acoustique, notamment en basse-fréquence. L'hypothèse d'amplitude constante, à la base des travaux de VALEAU [10] et de MELLET [16], n'est plus suffisante dans ce cas de figure pour assurer l'estimation des paramètres avec une précision acceptable. La prise en compte de la nature variable de l'amplitude du signal Doppler s'avère alors indispensable.

Toutefois, il faut noter que l'appareil BSA, dont l'utilisation a été explorée en détail par POGGI [7], autorise cette prise en compte mais au prix d'un ensemencement important perturbant inévitablement le champ acoustique à explorer. Par ailleurs, cet équipement commercial, dont le fonctionnement s'articule autour d'une transformée de Fourier à court terme (TFCT), permet l'estimation des paramètres de la vitesse particulaire lorsque les niveaux acoustiques

sont élevés ou la fréquence basse [1] ou bien encore en présence d'un écoulement important superposé au mouvement acoustique. Cependant, l'utilisation du BSA limite l'analyse à des indices de modulation proches de l'unité et ne permet pas d'optimiser indépendamment la précision sur les mesures de l'amplitude et de la phase. Les techniques d'estimation proposées dans ce travail de thèse doivent alors constituer une avancée importante vers l'élaboration d'un système expérimental de mesure de la vitesse particulaire acoustique.

4.3 Évaluation des coûts calculatoires

L'un des objectifs de ce travail est de proposer une méthode facilement intégrable dans un système électronique de traitement du signal. Dans ce contexte il apparaît alors indispensable d'inclure, dans la comparaison des performances des méthodes d'estimation développées, le critère de temps de calcul.

Une mesure envisageable pour évaluer le coût numérique qu'exige chacun des algorithmes est le nombre de *flops* (Floating Operation). Cette quantité désigne le coût équivalent, exprimée en opération élémentaire, d'un calcul correspondant à l'addition de nombres réels en virgule flottante. En première approximation il est possible de considérer qu'il existe une relation de proportionalité entre le coût algorithmique Ct, exprimée en nombre de *flop*, et la durée d'un calcul. Le coefficient de proportionalité dépend étroitement du processeur chargé du calcul ainsi que du langage de programmation. La connaissance de Ct permet, de plus, d'observer la croissance du coût en fonction du volume des données, *i.e.* le nombre N d'échantillons.

L'ensemble des algorithmes d'estimation des paramètres de la vitesse acoustique présentés dans ce travail a été developpé à l'aide du logiciel Matlab®. Il est donc difficile d'estimer avec précision les temps de calcul car ceux-ci dépendent des méthodes de calcul et du protocole employés par le logiciel. Cependant la décomposition des différents algorithmes et l'analyse des différentes étapes les constituant permettent de trouver les ordres de grandeurs des coûts calculatoires. Ce travail peut être complété, à l'aide du logiciel Matlab®, en procédant à des mesures de référence exprimées en nombre de *flops*.

La complexité algorithmique Ct s'évalue en comptabilisant le nombre d'opérations élémentaires à partir des hypothèses suivantes :

- coût d'une addition ou d'une soustraction réelle : 1 *flop*;
- coût d'une addition ou d'une soustraction complexe : 2 *flops*;
- coût d'une multiplication ou d'une division réelle : 1 *flop*;
- coût d'une multiplication ou d'une division complexe: 6 *flops*.

Par ailleurs, seules les opérations arithmétiques sont comptabilisées. Ainsi les accès en mémoire, les opérations de contrôle et de comparaison ne sont pas pris en compte dans le calcul de Ct.

4.3.1 Coût calculatoire de l'estimateur PDBE

Sans entrer dans les détails des calculs, l'ordre de grandeur du coût calculatoire de l'algorithme d'estimation basé sur la dérivée de la phase est donné par

$$Ct_{\mathrm{PDBE}} \approx 9N \log_2 N + 92N. \tag{4.6}$$

Ces valeurs sont données par la figure 4.6(a) où elles sont comparées aux résultats de l'évaluation expérimentale à l'aide du logiciel Matlab®. Les discontinuités présentes dans la courbe

1. cas de figure correspondant à un indice de modulation α élevé.

expérimentale s'expliquent par la présence du calcul de la transformée de Hilbert nécessaire à la formation du démodulateur en quadrature décrit au paragraphe 3.4.2. En effet cette transformée obtenue par le passage dans le domaine fréquentiel, nécessite le calcul d'une FFT et d'une FFT inverse. Or ces algorithmes sont optimisés en complétant les signaux, dont les dimensions ne correspondent pas à une puissance de deux, par des séquences de valeurs nulles (technique du *zero padding*).

4.3.2 Coût calculatoire de l'estimateur MLE

Il est très difficile dans la pratique d'évaluer analytiquement le coût calculatoire de la phase d'optimisation conduisant à l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique par la méthode du maximum de vraisemblance. De nombreux essais en simulation permettent malgré tout de déterminer un coût empirique donné par

$$Ct_{\mathrm{MLE}} \approx n_{it}\,(80N + 4000)\,. \tag{4.7}$$

La figure 4.6(b) permet de comparer cette dernière relation, dans le cas où $n_{it} = 1$, au coût expérimental moyen obtenu à l'aide de 100 simulations.

La relation (4.7) montre que dans le cas de l'estimation par MLE le coût calculatoire dépend non seulement de la quantité N d'échantillons mais aussi du nombre n_{it} d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme d'optimisation. De plus il ne faut ne faut pas oublier que cette méthode nécessite d'être initialisée à l'aide de l'estimateur PDBE dont le coût propre s'additionne à celui des itérations.

4.3.3 Coût calculatoire de l'estimateur EKF

Le bilan des opérations nécessaires à l'estimation des paramètres acoustique à l'aide de filtre de Kalman conduit, quant à lui, à la relation

$$Ct_{\mathrm{EKF}} \approx 842N + 300. \tag{4.8}$$

La figure 4.6 (c) montre à nouveau la concordance entre cette formule et l'évaluation expérimentale du coût calculatoire dans le cas de l'utilisation de l'EKF.

4.3.4 Commentaire

La convergence de l'algorithme d'optimisation dans le cas de l'estimation par MLE nécessite, au meilleur des cas un nombre moyen d'itérations n_{it} égal à 16, comme cela a été établi au paragraphe 3.5.2. En tenant compte du coût propre de la phase d'initialisation la complexité de la méthode est au minimum de l'ordre de $9N \log_2 N + 92N + 16\,(80N + 4000)$. À titre d'exemple lorsque le signal Doppler se compose de N = 10000 échantillons l'ordre de grandeur du coût calculatoire de la méthode est alors de 15 M*flops*. Dans ces mêmes conditions le PDBE ne réclame que 2 M*flops* alors que la méthode par EKF nécessite 8 M*flops*.

Cette étude a donc permis de vérifier la concordance entre les résultats théoriques et les coûts moyens expérimentaux des procédures PDBE, MLE et EKF. Sans fournir d'indication précises sur la rapidité des algorithmes, les formules (4.6), (4.7) et (4.8) donnent malgré tout un aperçu des complexités algorithmiques des trois méthodes d'estimation permettant d'établir une hiérarchie des coûts de ces méthodes : Comme cela était prévu la méthode PDBE se montre la moins coûteuse. Elle est suivie par la méthode EKF qui malgré des performances statistiques nettement supérieures à celles du PDBE ne nécessite que quatre fois plus de calcul. Enfin le MLE présente une complexité très importante dès lors que le nombre d'itération devient élevé.

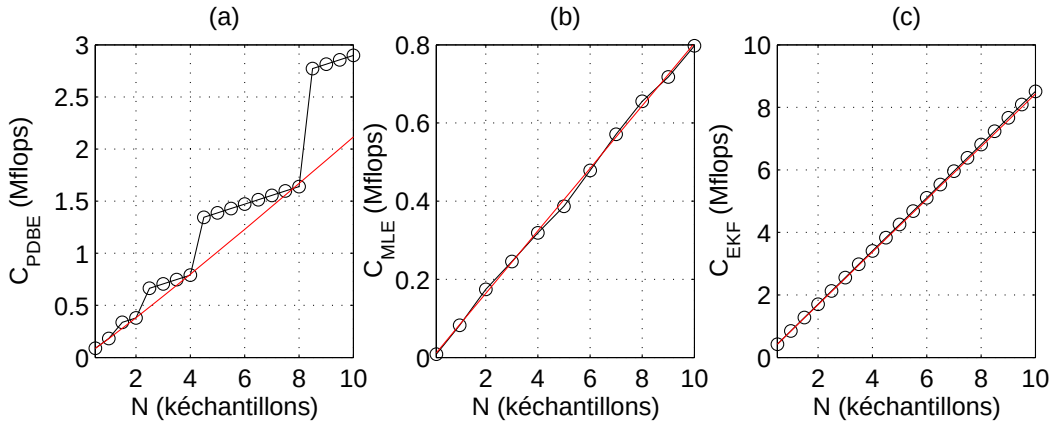

FIG. 4.6 – *Évaluation du coût calculatoire en fonction du nombre d'échantillons.* PDBE (a), MLE (coût équivalent à une itération) (b) et EKF (c). *Coût expérimentaux* (-o), *coût calculés* (-).

4.4 Conclusions

L'étude statistique présentée au paragraphe 4.2 a permis de préciser les limites d'utilisation des méthodes PDBE, MLE et EKF pour l'estimation de l'amplitude et de la phase de la vitesse acoustique ainsi que la vitesse d'écoulement. Elle permet d'établir que le MLE représente le meilleur estimateur à partir de rapports signal sur bruit de 12 dB ainsi que pour des fréquences acoustiques F_{ac} supérieures à 500 Hz. En deça de ces valeurs le comportement de cette méthode est très étroitement lié à son initialisation obtenue à l'aide du PDBE. Cette dernière méthode, malgré un coût calculatoire modique, est pénalisée par des performances médiocres surtout à faible RSB et en basse fréquence. Une initialisation de mauvaise qualité ne permet donc pas d'amélioration significative des performances d'estimation à l'aide du MLE. Une solution possible peut consister à choisir pour l'estimation initiale une méthode plus robuste, notamment vis à vis du bruit, comme certaines transformées temps-fréquence (transformée de Fourier à court terme - TFCT - ou distributions de Wigner-Ville - DWV) techniques qui ne nécessitent pas, elles non plus, de connaissance *a priori* sur la forme du signal. Cependant une telle modification n'est envisageable qu'au prix d'une augmentation conséquente de la complexité algorithmique. La méthode d'estimation par MLE étant asymptotiquement efficace pour des rapports signal sur bruit élevés, son intérêt dans le cadre de ce travail, repose essentiellement sur sa capacité à valider les formes analytiques des CRB.

La méthode d'estimation par EKF, sans être optimale, offre quant à elle de bonnes performances même pour de faibles RSB. Ce point est important car, pour des conditions expérimentales données, la puissance de bruit peut être considérée comme constante et le RSB, défini par la relation (2.43), dépend alors de l'amplitude du signal Doppler. La possibilité de travailler à faible RSB autorise en conséquence la prise en compte des signaux Doppler de faibles amplitudes augmentant ainsi le nombre de bouffées disponibles pour la mesure. Toutefois il est important de rappeler que la mesure de signaux à faible RSB s'accompagne nécessairement de la procédure de seuillage d'histogramme décrite au paragraphe 3.8.4[2]. Par ailleurs, les variances de cet estimateur sont suffisamment proches des CRB pour qu'il soit possible, en examinant les formes analytique des CRB, d'en fixer les performances, *a priori*, par le choix judicieux des

2. Ce cas de figure correspond à la définition (e) de la notion de temps réel définie au paragraphe 2.5.3.

paramètres de l'acquisition, comme la période d'échantillonnage T_e par exemple.

L'utilisation d'un filtre de Kalman étendu pour la mesure de vitesse particulaire acoustique est préférable aux deux autres techniques. En effet, même si cette méthode n'est pas optimale, elle offre, néanmoins, un comportement très stable pour une large plage de situations contrairement au PDBE et au MLE. De plus, elle ne requiert aucune procédure d'initialisation et présente un coût calculatoire au minimum deux fois moins important que la méthode MLE. Enfin, il faut noter que le caractère adaptatif de la méthode ainsi que le calcul, à chaque instant, de l'amplitude du signal Doppler lui confère, contraitrement au MLE, une meilleure robustesse vis à vis des modifications du modèle. Ceci lui permet, notamment, de s'adapter aux modifications de l'aspect temporel de l'enveloppe liés, par exemple, aux défauts du dispositif optique ou des effets de quantification et de saturation de la partie électronique. Par ailleurs les différentes simulations mettent en évidence la capacité de l'EKF à estimer les paramètres de la vitesse acoustique pour des indices de modulation de l'ordre de $2 \cdot 10^{-2}$ ($F_{\mathrm{ac}} = 4000$ Hz et $V_{\mathrm{ac}} = 0{,}1$ mm/s). Les précisions obtenues dans ce cas de figure, tout en étant acceptables (biais de l'ordre de 3%), sont malgré tout limitées par la fréquence d'échantillonnage, égale ici à 100 kHz, dont dépendent les développements limités des équations d'observation. Des simulations de Monte-Carlo, portant sur 500 mesures, montrent qu'il est possible, moyennant une fréquence $F_e = 2$ MHz, d'envisager la mesure de signaux Doppler pour des indices de modulation de l'ordre de 10^{-3} ($F_{\mathrm{ac}} = 4000$ Hz et $V_{\mathrm{ac}} = 0{,}0042$ mm/s). Les erreurs sont alors respectivement de l'ordre de -0,4%, 1,7° et de $1{,}2 \cdot 10^{-5}$% pour les estimées de V_{ac}, de ϕ_{ac} et de V_{ec}. Les variances observées sont conformes, quant à elles, à ce que prédisent les CRB.

La relative complexité algorithmique imposée par l'utilisation de la méthode d'estimation par MLE ainsi que son manque de robustesse à faible rapport signal sur bruit ne plaide pas en faveur du choix de cette technique pour l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique. Dans la phase expérimentale de ce travail elle sera donc écartée au bénéfice de l'EKF, plus simple et plus robuste.

Le chapitre suivant va maintenant permettre d'observer le comportement du filtrage de Kalman étendu appliqué à la mesure de vitesse acoustique en champ libre. Afin de disposer d'une méthode de référence, simple à mettre en œuvre et ne faisant pas intervenir le modèle du signal Doppler, le PDBE sera lui aussi utilisé.

Chapitre 5

Validation expérimentale des mesures par ALD

5.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de décrire, dans un premier temps, l'ensemble du dispositif expérimental de mesure de vitesse acoustique particulaire, tant sur le plan de l'optique que sur les aspects électroniques. Dans un second temps, de manière à valider expérimentalement les différents outils de traitement du signal proposés pour l'estimation des paramètres de la vitesse particulaire acoustique, deux types d'expériences sont conduits.

La première expérience propose l'étude du comportement des méthodes de traitement du signal Doppler appliquées à la mesure de la vitesse d'une pointe d'aiguille montée sur l'axe d'un pot vibrant. Ce travail préliminaire permet d'évaluer le comportement de la chaine de mesure à partir de signaux Doppler reproductibles et présentant des ordres de grandeur de vitesse proches de ceux rencontrés en acoustique. Cette méthode permet, de plus, de s'affranchir de l'amplitude variable et du caractère aléatoire de l'apparition des bouffées Doppler. Des vitesses de référence sont alors obtenues en mesurant la vitesse de déplacement de la pointe à l'aide d'un vibromètre laser [7].

La seconde expérience est consacrée à l'étude du champ de vitesse acoustique rayonné par un haut-parleur électrodynamique monté dans une enceinte. Les valeurs des vitesses mesurées dans l'axe du haut-parleur sont alors comparées à des vitesses de référence obtenues à partir d'une méthode intensimétrique utilisant le relevé de deux pressions acoustiques. Ce travail reprend en partie le protocole de mesure décrit dans [90].

L'estimateur basé sur la dérivée de la phase (PDBE) et le filtre de Kalman étendu (EKF) sont les deux algorithmes retenus pour cette étude expérimentale. Le modèle du signal Doppler sur lequel s'appuie l'estimateur par maximum de vraisemblance (MLE), repose sur l'existence d'une enveloppe de forme gaussienne et ne permet pas un fonctionnement correct de cette méthode pour la mesure de vitesses structurelles. Elle ne peut donc pas être retenue dans le cadre de ce travail.

5.2 Description du dispositif expérimental

La figure 5.1 présente l'organisation du dispositif expérimental qui peut se décomposer schématiquement en deux parties principales :

– une partie optique, regroupant l'ensemble des dispositifs d'émission et de réception (laser,

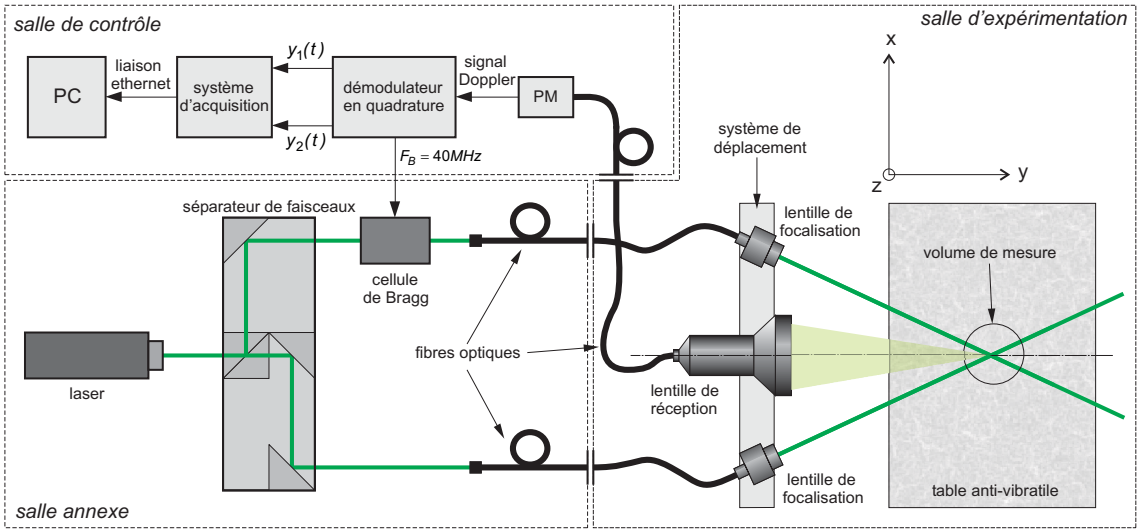

FIG. 5.1 – *Dispositif expérimental.*

séparateur de faisceaux, cellule de Bragg, lentille de focalisation, fibres optiques, photomultiplicateur, etc.);

– une partie électronique intégrant le démodulateur en quadrature, le système d'acquisition des signaux et un ordinateur de type PC.

Ces différents composants, constituant le dispositif ALD utilisé pour la validation expérimentale des algorithmes de traitement du signal sont détaillés, dans les lignes qui suivent.

5.2.1 Dispositif optique

Le banc ALD disponible au laboratoire est configuré selon le mode Doppler différentiel dont le principe a été présenté en détail au paragraphe 2.2, et permet, pour le moment, la mesure que d'une seule composante de la vitesse acoustique. Par ailleurs le montage est conçu pour une utilisation en rétrodiffusion cette configuration étant la seule à autoriser la prise de mesures au voisinage de surfaces rayonnantes non transparentes, comme la membrane d'un haut-parleur par exemple [7]. Enfin les mesures acoustiques sont réalisées dans une chambre semi-anéchoïque faisant office de salle d'expérimentation.

Émission

La source optique utilisée est un laser à argon ionisé de puissance maximale de 1 W émettant sur le mode de polarisation fondamental TEM_{00} et de longueur d'onde principale de 514,5 nm, correspondant à la couleur verte. De manière à ne pas perturber le champ acoustique par l'émission parasite de bruits liés au fonctionnement du système de refroidissement et de l'alimentation du laser, celui-ci est situé dans une salle annexe, les faisceaux lumineux, issus d'un séparateur, étant alors acheminés dans la salle de mesure à l'aide de deux fibres optiques monomodes. L'un des faisceaux laser est décalé en fréquence au moyen d'une cellule de Bragg placée sur son parcours.

Des lentilles de focalisation Beam Optics 41×168 assurent la convergence des deux faisceaux en sortie de fibre à une distance focale de 600 mm. L'ensemble de ce dispositif, auquel il convient de rajouter le système de réception, est supporté par un système de déplacement tridimensionnel

permettant le balayage spatial du champ de vitesses avec un pas de 2,5 μm selon les trois axes. Le déplacement de cet équipage est assuré par un PC via une liaison IEEE488. Ce banc de mesure est enfin complété d'une table anti-vibratile accueillant, si nécessaire, les dispositifs acoustiques à étudier. Ces différents matériels équipent la salle d'expérimentation

Volume de mesure

L'angle θ formé par les faisceaux laser incidents vaut environ 30°Cette valeur constitue un compromis permettant d'obtenir une bonne sensibilité[1] pour des dimensions raisonnables du volume de mesure[2] [7]. Compte tenu de la longueur d'onde optique, λ_L, et de la valeur retenue pour θ le réseau d'interférences se compose de 120 franges espacées d'une distance $i = 1{,}03$ μm, la sensibilité

$$D = \frac{2 \sin \theta/2}{\lambda_L} \tag{5.1}$$

du dispositif étant égale à 0,972 mm/s/kHz. Les dimensions du volume de mesure selon les axes x, y et z sont de l'ordre de respectivement 0,1 mm, 0,5 mm et 0,5 mm respectivement.

Réception

La lumière une fois focalisée est filtrée spatialement à l'aide d'un diaphragme de très faible ouverture destiné à masquer les rayons lumineux ne provenant pas du volume de mesure, telles que les réflexions au niveau des parois par exemple. De plus, un filtre interférentiel, centré sur la longueur d'onde λ_L, est chargé d'atténuer les contributions des sources lumineuses parasites. Le signal optique ainsi formé est recueilli puis transformé en signal électrique (signal Doppler) par un photomultiplicateur (PM) de type Burle 4526 dont l'efficacité quantique vaut 16,4%.

Technique d'ensemencement

La lumière diffusée par les particules présentes naturellement dans l'air n'est pas suffisante pour offrir des bouffées Doppler présentant des rapports signal sur bruit élevés. Il est donc indispensable d'ensemencer le milieu avec des particules jouant le rôle de traceurs et chargées de suivre les déplacements du fluide. Ceci est obtenu à l'aide d'un dispositif commercial, le Safex Fog Generator 2001, qui génère un aérosol de micro-goutelettes, de taille moyenne se situant autour de 1 μm, produites en chauffant un mélange d'eau et d'alcool.

Dans la pratique la concentration en traceur est contrôlée par la période d'attente séparant l'ensemencement de la pièce et l'instant du début de la mesure. Après un délai supérieur à un quart d'heure environ les particules les plus légères se sont évaporées ou condensées alors que les plus lourdes se sont déposées. Dans ces conditions, correspondant à une faible concentration en traceur, les propriétés thermodynamiques du milieu ne sont pas trop modifiées [7, 90]. Par ailleurs, la probabilité d'observer simultanément deux particules dans le volume de mesure reste faible, cette condition étant conforme au modèle retenu pour le signal Doppler et exposé au chapitre 2.

Les caractéristiques principales du banc de mesure ALD sont résumées dans le tableau 5.1.

1. Une grande sensibilité permet d'accéder à la mesure de faibles vitesses acoustiques.

2. La résolution spatiale est d'autant meilleure que la dimension du volume de mesure, dans la direction perpendiculaire aux franges, est petite.

Caractéristiques principales du banc de mesure ALD				
Émission	Source lumineuse		Laser argon	—
	Puissance optique		1	W
	Longueur d'onde		514,5	nm
	Distance focale		600	mm
	Fréquence de Bragg		40	MHz
Volume de mesure	Angle d'incidence θ		28,873	°
	Nombre de franges		120	—
	Interfrange i		1,03	μm
	Sensibilité D		0,972	mm/s/kHz
	Dimensions	x	0,1	mm
		y	0,5	mm
		z	0,5	mm
Réception	∅ de la lentille de focalisation		100	mm
	photomultiplicateur	Type	Brule 4526	—
		Sensibilité	16,4	%

Tab. 5.1 – *Caractéristiques principales du banc ALD.*

5.2.2 Dispositif électronique et de traitement du signal

Le traitement du signal Doppler est pris en charge par un dispositif électronique composé d'un démodulateur en quadrature analogique, d'un système d'acquisition et d'enregistrement des signaux et d'un micro-ordinateur de type PC accueillant les algorithmes qui ont fait l'objet de cette étude. Ces équipements sont installés dans une salle de contrôle située au dessus de la salle d'expérimentation.

Démodulateur en quadrature

Ce dispositif, étudié et développé à l'ESEO pour les besoin de cette thèse, est un matériel qui réalise en temps réel et analogiquement la translation en bande de base[3] du signal Doppler $s(t)$ issu du PM. Le principe de fonctionnement de cet équipement, illustré par le synoptique de la figure 5.2, consiste à proposer en permanence deux signaux en quadrature, $y_1(t)$ (appelée encore, voie en phase, voie I ou voie en cosinus) et $y_2(t)$ (appelée voie en quadrature, voie Q ou voie en sinus) nécessaires à la description du signal. Une des entrées (PM IN) accepte le signal de sortie du PM qui, avant d'être soumis à la démodulation, subit un filtrage de type passe-haut, permettant de supprimer le piédestal, suivi d'une amplification de 32 dB. Une recopie de ce signal est également disponible sur la sortie DOPPLER afin d'être éventuellement visualisée, sur un écran d'oscilloscope par exemple. Les deux composantes en phase et en quadrature s'obtiennent par la démodulation de la version sans piédestal du signal Doppler à l'aide de deux signaux HF, synchrones, et de fréquence égale à 40 MHz. Une des voies est par ailleurs utilisée pour exciter, via un amplificateur, la cellule de Bragg chargée du défilement des franges d'interférence à 40 MHz. Ceci permet de s'assurer que la démodulation du signal Doppler s'effectue de manière synchrone. Enfin le dispositif électronique est doté d'un système de détection d'enveloppe du signal Doppler dont le fonctionnement s'articule autour d'un opérateur analogique qui réalise l'opération $\sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)}$. La comparaison de l'enveloppe ainsi estimée avec un seuil

3. La fréquence porteuse est ramenée à la fréquence nulle

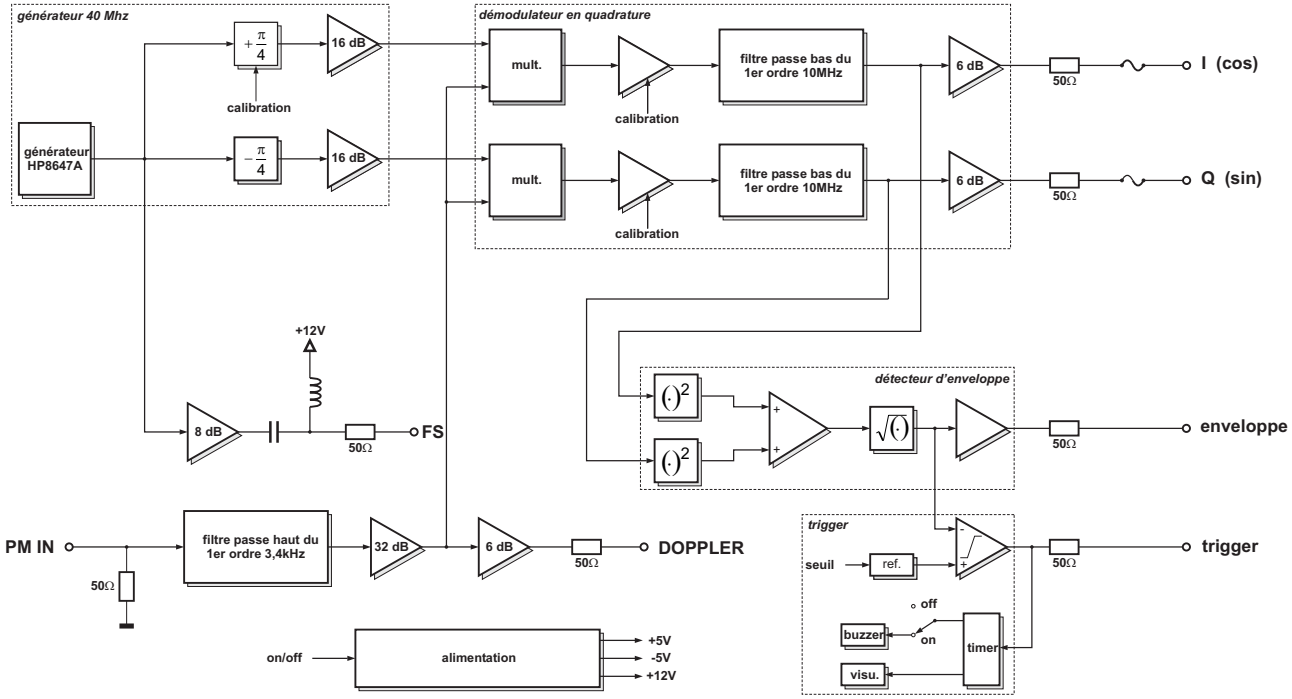

FIG. 5.2 – *Organisation du démodulateur en quadrature* 40 MHz.

fixé par l'opérateur génère deux signaux, visuel (LED [4]) et sonore (Buzzer), l'alertant sur la présence d'une bouffée Doppler, elle-même liée au passage d'une particule dans le volume de mesure. Une sortie logique de niveau TTL est également disponible permettant, par exemple, la synchronisation d'un système d'acquisition.

Système d'acquisition et d'enregistrement des signaux

La démodulation du signal Doppler engendre donc deux signaux analogiques qui, pour être traités numériquement, nécessitent d'être échantillonnés puis enregistrés. Dans cette phase expérimentale, ce travail est pris en charge par un enregistreur de signaux portable de type *vision*® proposé par la société Nicolet Technologies. Cet appareil dispose de 8 entrées analogiques, chacune étant équipée d'un CAN 16 bits autorisant des fréquences d'échantillonnage allant jusqu'à 100 kHz. La bande passante analogique est égale à 20 kHz. Parmi de nombreuses fonctionnalités l'enregistreur est équipé d'un disque dur d'une capacité de 8 Go et d'une fonction de pré-déclenchement permettant de conserver en mémoire les signaux qui ont précédé le phénomène ayant déclenché l'acquisition. Enfin, l'appareil est également doté d'une liaison ethernet de 100 Mb/s pour le transfert des données, au format Matlab® par exemple, vers un PC.

Outils de traitement numérique du signal

Deux estimateurs ont été retenus pour le traitement numérique des signaux Doppler réels, *i.e.* acquis expérimentalement. Il s'agit de

– l'estimateur basée sur la dérivée de la phase (PDBE). Cette méthode est la plus rapide et la plus simple à mettre en œuvre. Malgré sa sensibilité importante vis à vis du bruit

4. Light Emitting Diode

elle ne requiert, en contrepartie, aucune connaissance préalable sur la forme du signal Doppler. Cet estimateur sera employé comme méthode de référence.
- l'estimateur par filtrage de Kalman étendu (EKF). Cette méthode est décrite en détail au chapitre 3.

Les algorithmes décrivant ces trois méthodes ont été programmés en langage Matlab® version 6.5 sur un micro-ordinateur NEC Versa C140 doté d'un processeur AMD Athlon de 1,5 GHz.

5.3 Procédure de calibration du démodulateur en quadrature

5.3.1 Formulation du problème

Cette section propose l'estimation par maximum de vraisemblance des erreurs des paramètres des signaux issus du démodulateur en quadrature analogique. Ces paramètres, au nombre de six sont les amplitudes maximales, les phases initiales et les tensions de décalage[5] de chacune des deux voies en quadrature. Ils témoignent des imperfections du démodulateur.

Le principe de la calibration consiste à appliquer en entrée du démodulateur un signal de test, d'amplitude et de fréquence connue, en lieu et place du signal de sortie du photomultiplicateur. Ce signal de calibration,

$$s_{cal}(t) = A\cos(2\pi F_c t), \tag{5.2}$$

d'amplitude A constante et de fréquence F_c est issu d'un générateur de signal HF synchrone du signal de démodulation de fréquence $F_\mathrm{B} = 40$ MHz. En l'absence de défaut du dispositif électronique de démodulation, les deux signaux en quadrature observés à la sortie du démodulateur sont donnés par

$$y_1(t) = A\cos\phi(t) \tag{5.3}$$
$$y_2(t) = A\sin\phi(t) \tag{5.4}$$

où est A est l'amplitude constante des deux signaux en quadrature,

$$\phi(t) = 2\pi F_\mathrm{D} + \phi_0 \tag{5.5}$$

la phase instantanée et

$$F_\mathrm{D} = F_\mathrm{B} - F_c \tag{5.6}$$

la fréquence de battement entre les deux générateurs.

Dans la réalité ces deux signaux sont affectés par des erreurs, d'amplitude, de phase et de décalage en tension, ainsi que par la présence de bruits additifs. En particulier il est impossible d'obtenir deux signaux parfaitement en quadrature. Les versions numériques de ces signaux réels, échantillonnés à la fréquence F_e, sont alors données par

$$y_1(k) = A_1\cos\left[2\pi f_\mathrm{D} k + \phi_0\right] + D_1 + b_1(k) = s_1(k) + b_1(k) \tag{5.7}$$
$$y_2(k) = A_2\cos\left[2\pi f_\mathrm{D} k + \phi_0 + \phi_{12}\right] + D_2 + b_2(k) = s_2(k) + b_2(k) \tag{5.8}$$

avec $f_\mathrm{D} = F_\mathrm{D}/F_\mathrm{e}$ la fréquence de battement réduite. Dans les relations (5.7) et (5.8) A_1 et A_2 représentent les amplitudes respectives des deux signaux, D_1 et D_2 les décalages en tension, ϕ_0 la

5. offset

phase initiale et ϕ_{12} la phase relative, proche de $\frac{\pi}{2}$, entre $y_1(k)$ et $y_2(k)$. Les termes $b_1(k)$ et $b_2(k)$ représentent deux bruits gaussiens de moyennes nulles et de variances égales respectivement à σ_1 et à σ_2. Par la suite ces variances seront supposées égales, *i.e.* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$. Par ailleurs la période d'échantillonnage est $T_\mathrm{e} = 1/F_\mathrm{e}$ et le nombre d'échantillon est N.

En notant

$$\phi_\mathrm{D} = 2\ \pi\ f_\mathrm{D}\ k \tag{5.9}$$

et

$$\phi_2 = \phi_0 + \phi_{12} \tag{5.10}$$

les équations (5.7) et (5.8) peuvent s'écrire

$$y_1(k) = A_1 \cos\left[\phi_\mathrm{D}(k) + \phi_0\right] + D_1 + b_1(k) \tag{5.11}$$
$$y_2(k) = A_2 \cos\left[\phi_\mathrm{D}(k) + \phi_2\right] + D_2 + b_2(k). \tag{5.12}$$

Le problème ici consiste à estimer les six paramètres A_1, A_2, D_1, D_2, ϕ_0 et ϕ_2 afin de pouvoir effectuer les corrections indispensables sur les signaux en phase et en quadrature avant d'appliquer les techniques d'estimation des paramètres acoustiques. Une estimation par la méthode du maximum de vraisemblance va permettre de résoudre ce problème. Par la suite la phase $\phi_\mathrm{D}(k)$ sera supposée connue à chaque instant, ce qui revient à considérer que la fréquence F_c du générateur de calibration est connue avec suffisamment de précision.

Les principes du MLE ont été largement décrits au chapitre 3. Les lignes qui suivent se contenteront donc d'en rappeler les étapes essentielles, le détails des différents développements et l'ensemble des calculs étant disponibles à l'annexe D.

5.3.2 Écriture des équations d'observation

Le jeu d'équations (5.11) et (5.12) fait apparaître des non-linéarités en ϕ_0 et ϕ_2. Un changement de coordonnées permet de linéariser ces expressions et d'écrire

$$s_1(k) = A_1 \cos\phi_\mathrm{D}(k) \cos\phi_0 - A_1 \sin\phi_\mathrm{D}(k) \sin\phi_0 + D_1 \tag{5.13}$$
$$s_2(k) = A_2 \cos\phi_\mathrm{D}(k) \cos\phi_2 - A_2 \sin\phi_\mathrm{D}(k) \sin\phi_2 + D_2. \tag{5.14}$$

En notant

$$A_1 \cos\phi_0 = R_1 \tag{5.15}$$
$$A_1 \sin\phi_0 = I_1 \tag{5.16}$$
$$A_2 \cos\phi_2 = R_2 \tag{5.17}$$
$$A_2 \sin\phi_2 = I_2, \tag{5.18}$$

ainsi que

$$\cos\phi_\mathrm{D}(k) = C_D(k) \tag{5.19}$$
$$\sin\phi_\mathrm{D}(k) = S_D(k), \tag{5.20}$$

les équations (5.13) et (5.14) deviennent

$$s_1(k) = R_1 C_D(k) - I_1 S_D(k) + D_1 \tag{5.21}$$
$$s_2(k) = R_2 C_D(k) - I_2 S_D(k) + D_2. \tag{5.22}$$

Le vecteur regroupant les six paramètres à estimer est alors donné par

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}} = [R_1,I_1,D_1,R_2,I_2,D_2]^T = [\theta_{1_{\text{cal}}},\theta_{2_{\text{cal}}},\theta_{3_{\text{cal}}},\theta_{4_{\text{cal}}},\theta_{5_{\text{cal}}},\theta_{6_{\text{cal}}}]^T . \tag{5.23}$$

L'estimation des paramètres des signaux en quadrature s'obtient alors à l'aide des transformations

$$A_1 = \sqrt{R_1^2 + I_1^2} \tag{5.24}$$

$$A_2 = \sqrt{R_2^2 + I_2^2} \tag{5.25}$$

$$\phi_0 = \arctan \frac{I_1}{R_1} \tag{5.26}$$

$$\phi_2 = \arctan \frac{I_2}{R_2}. \tag{5.27}$$

5.3.3 Fonction de vraisemblance logarithmique

La fonction de vraisemblance logarithmique est donnée par

$$\wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}) = -N \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{k=N} \left\{ -[y_1(k) - s_1(k)]^2 - [y_2(k) - s_2(k)]^2 \right\}. \tag{5.28}$$

L'estimateur par maximum de vraisemblance est alors défini par le vecteur paramètres $\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}$ qui rend maximum la fonction (5.28). Cette maximisation conduit au système d'équation

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\theta}_{\text{cal}} = \mathbf{Y} \tag{5.29}$$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} +M_1 & -M_2 & +M_3 & 0 & 0 & 0 \\ +M_2 & -M_4 & +M_5 & 0 & 0 & 0 \\ +M_3 & -M_5 & N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +M_1 & -M_2 & +M_3 \\ 0 & 0 & 0 & +M_2 & -M_4 & +M_5 \\ 0 & 0 & 0 & +M_3 & -M_5 & N \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

et

$$\mathbf{Y} = [Y_{1C},Y_{1S},Y_1,Y_{2C},Y_{2S},Y_2]^{\text{T}} . \tag{5.31}$$

Les éléments de la matrice $\mathbf{M}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 2\omega_{\text{D}} + \cos 2\omega_{\text{D}} N - \cos 2\omega_{\text{D}}(N+1) - 1}{1 - \cos 2\omega_{\text{D}}} + \frac{N}{2} \\ M_2 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 2\omega_{\text{D}} + \sin 2\omega_{\text{D}} N - \sin 2\omega_{\text{D}}(N+1)}{1 - \cos 2\omega_{\text{D}}} \\ M_3 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \omega_{\text{D}} + \cos \omega_{\text{D}} N - \cos \omega_{\text{D}}(N+1) - 1}{1 - \cos \omega_{\text{D}}} \\ M_4 &= \frac{N}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 2\omega_{\text{D}} + \cos 2\omega_{\text{D}} N - \cos 2\omega_{\text{D}}(N+1) - 1}{1 - \cos 2\omega_{\text{D}}} \\ M_5 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin \omega_{\text{D}} + \sin \omega_{\text{D}} N - \sin \omega_{\text{D}}(N+1)}{1 - \cos \omega_{\text{D}}} \end{aligned} \tag{5.32}$$

et ceux du vecteur $\mathbf{Y}$ par

$$\begin{aligned} Y_{1C} &= \sum_{k=1}^{k=N} y_1(k)\cos\phi_{\mathrm{D}}(k) \\ Y_{1S} &= \sum_{k=1}^{k=N} y_1(k)\sin\phi_{\mathrm{D}}(k) \\ Y_1 &= \sum_{k=1}^{k=N} y_1(k) \\ Y_{2C} &= \sum_{k=1}^{k=N} y_2(k)\cos\phi_{\mathrm{D}}(k) \\ Y_{2S} &= \sum_{k=1}^{k=N} y_2(k)\sin\phi_{\mathrm{D}}(k) \\ Y_2 &= \sum_{k=1}^{k=N} y_2(k). \end{aligned} \tag{5.33}$$

La résolution numérique du système de six équations à six inconnues (5.29), nécessitant l'inversion de la matrice $\mathbf{M}$, se formule par

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{cal}} = \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{Y}. \tag{5.34}$$

Cette opération permet alors de déterminer l'estimée du vecteur $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{cal}} = \left[\widehat{R}_1,\widehat{I}_1,\widehat{D}_1,\widehat{R}_2,\widehat{I}_2,\widehat{D}_2\right]^T$ et, à l'aide des changements de variable (5.24), (5.25), (5.26) et (5.27), d'en déduire les estimées

$$\widehat{A}_1 = \sqrt{\widehat{R}_1^2+\widehat{I}_1^2} \tag{5.35}$$

$$\widehat{A}_2 = \sqrt{\widehat{R}_2^2+\widehat{I}_2^2} \tag{5.36}$$

$$\widehat{\phi}_0 = \arctan\frac{\widehat{I}_1}{\widehat{R}_1} \tag{5.37}$$

et

$$\widehat{\phi}_2 = \arctan\frac{\widehat{I}_2}{\widehat{R}_2}. \tag{5.38}$$

La phase relative entre les deux voies en quadrature s'exprime alors

$$\widehat{\phi}_{12} = \widehat{\phi}_2 - \widehat{\phi}_0. \tag{5.39}$$

5.3.4 Procédure de correction des signaux d'observation

La procédure de calibration a pour but de corriger les signaux d'observation $y_1(k)$ et $y_2(k)$ une fois que les défauts du dispositif électronique, représentés par $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$, $\widehat{D}_1$, $\widehat{D}_2$ et $\widehat{\phi}_{12}$, ont été évalués.

Cette procédure s'opère en deux temps : Dans une première phase l'opérateur est invité à intervenir sur le démodulateur lui-même par un réglage des gains des deux voies en quadrature d'une part et de leur phase relative d'autre part. Cette étape n'est réalisée qu'une seule fois. Dans une seconde phase, afin d'ajuster plus finement ces premiers réglages et pour corriger les dérives éventuelles du système, la procédure de calibration numérique décrite ci-dessus est

appliquée. De plus, cette étape permet de tenir compte des décalages en tension qui ne sont pas pris en compte par le réglage analogique. L'ensemble de ces mesures est réalisé à partir d'une fréquence de battement égale à 1000 Hz supposée donner lieu à des résultats représentatifs de la totalité de la gamme des fréquences prise par les signaux d'observation. Ce travail peut encore être envisagé en tenant compte de toutes les fréquences. Il faut noter que cette méthode, qui consiste à estimer séparément les défauts du démodulateur et les paramètres de la vitesse acoustique, n'est pas optimale. En effet pour conserver un caractère optimal la procédure mise en œuvre nécessiterait de prendre en compte, dans le modèle paramétrique du signal Doppler, non-seulement les paramètres acoustiques, représentés par le vecteur $\boldsymbol{\theta}$, mais aussi les défauts observés sur les signaux en quadrature regroupés dans le vecteur $\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}$. Cependant la complexité engendrée par une telle procédure n'est pas compatible avec les contraintes, notamment temps-réelles, fixées initialement et n'améliorerait pas dans des proportions significatives la qualité des mesures.

La procédure de calibration qui vient d'être décrite est appliquée préalablement à toute opération d'estimation des paramètres de la vitesse acoustique. Elle conduit alors aux signaux d'observation calibrés obtenus en appliquant la procédure suivante :

1. Correction de l'amplitude et du décalage en tension de la voie en phase : cette opération est décrite par l'équation
$$y_{1_{cal}}(k) = \frac{A}{\widehat{A}_1}\left[y_1(k) - \widehat{D}_1\right] \tag{5.40}$$
2. Correction de l'amplitude et du décalage en tension de la voie en quadrature
$$y'_{2_{cal}}(k) = \frac{A}{\widehat{A}_2}\left[y_2(k) - \widehat{D}_2\right] \tag{5.41}$$
3. Correction de la phase de la voie en quadrature
   - Calcul du signal analytique associé à $y'_{2_{\text{cal}}}(k) \longrightarrow y'_{2a_{\text{cal}}}(k)$
   - Multiplication de $y'_{2a_{\text{cal}}}(k)$ par le terme $\exp\left\{-j\left[\widehat{\phi}_{12} - \frac{\pi}{2}\right]\right\} \longrightarrow y_{2a_{\text{cal}}}(k)$
   - Détermination de la partie réelle de $y_{2a_{\text{cal}}}(k) \longrightarrow y_{2_{\text{cal}}}(k)$

5.4 Mesure avec pot vibrant

5.4.1 Présentation du dispositif

Cette première phase à pour but de valider les outils électroniques et de traitement du signal permettant l'estimation des paramètres acoustiques. Le dispositif de mesure, illustré par la figure 5.3 et inspiré du travail de Poggi [7], est conçu pour mesurer les vitesses de vibration sinusoïdales d'une pointe d'aiguille dont les amplitudes sont de l'ordre du millimètre par seconde. Celle-ci est montée sur la tête d'un pot vibrant B&K 4810 excité par un signal sinusoïdal de fréquence F_{exc}. Le signal Doppler à la sortie du photomultiplicateur est pris en charge par la chaîne électronique d'acquisition et de traitement du signal décrit au paragraphe 5.2.

5.4.2 Obtention de vitesses de référence

La vitesse de référence est obtenue en mesurant la vitesse de l'aiguille à l'aide d'un vibromètre laser He-Ne Polytec OFV 303. L'impact du faisceau laser, de longueur d'onde égale à

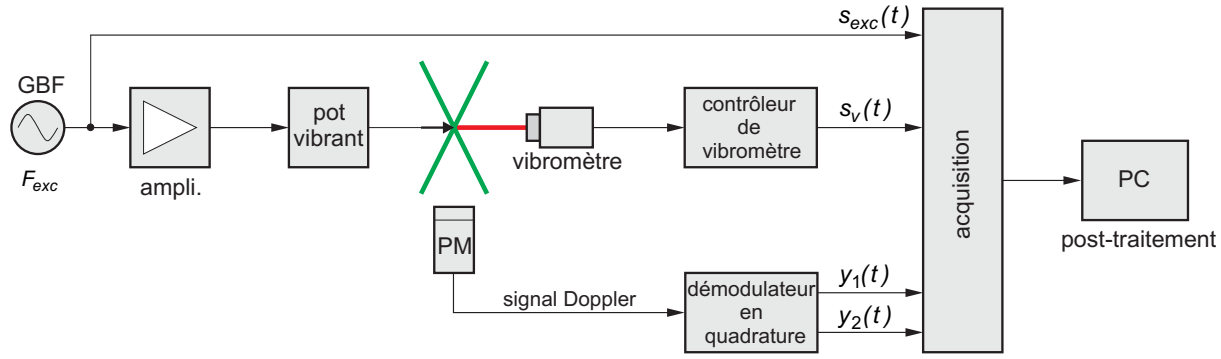

FIG. 5.3 – *Organisation du dispositif expérimental de mesure de la vitesse d'une pointe d'aiguille.*

633 nm, issu du vibromètre est positionné au plus proche du volume de mesure du vélocimètre. L'amplitude de la vitesse de référence est alors contrôlée par l'amplitude du signal électrique d'excitation du pot vibrant. Le signal en provenance du vibromètre est ensuite dirigé vers un système de contrôle, de type Polytec OFV 3001, dans lequel il est traité à l'aide d'un filtre passe-bas d'ordre trois et de fréquence de coupure 5 kHz. Afin de s'affranchir des perturbations mécaniques de l'environnement, et notamment de fréquences de résonnance parasites, l'ensemble du dispositif, pot-vibrant et aiguille, est installé sur une table en marbre anti-vibratile comme le montre les photographies 5.4 et 5.5. La figure 5.6 donne quant à elle l'allure des signaux $y_1(t)$, $y_2(t)$ et $s_V(t)$, issu du contrôleur de vibromètre, acquis par la mesure simultanée de la vitesse de l'aiguille par vibrométrie et anémométrie laser.

La mesure de vitesse à partir d'une structure vibrante offre de nombreux avantages. Elle permet tout d'abord d'obtenir des mesures de référence à partir d'une méthode largement répandue et éprouvée. Par ailleurs cette technique ne nécessite pas d'ensemencement ce qui permet de s'affranchir des problèmes couramment rencontrés en acoustique tels que la difficulté de détection d'une particule ou la faible amplitude du signal optique recueilli. Enfin cette

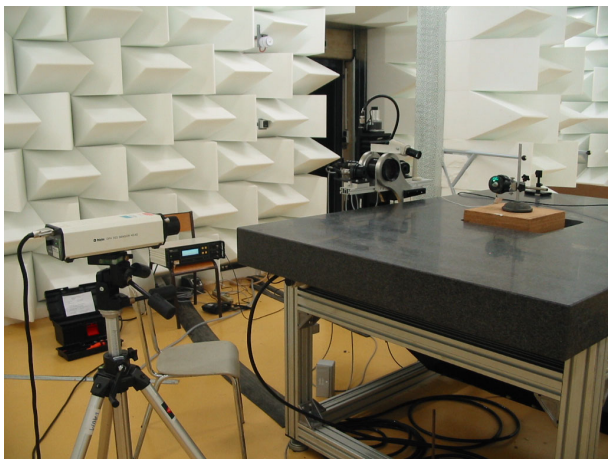

FIG. 5.4 – *Dipositif expérimental de mesure de la vitesse de la pointe d'une aiguille : vue d'ensemble montrant le vibromètre, le contrôleur de vibromètre, la table anti-vibratile et le pot vibrant.*

FIG. 5.5 – *Dipositif expérimental de mesure de la vitesse de la pointe d'une aiguille : vue de détail montrant le pot vibrant et le dispositif d'émission et de réception de l'anémomètre laser.*

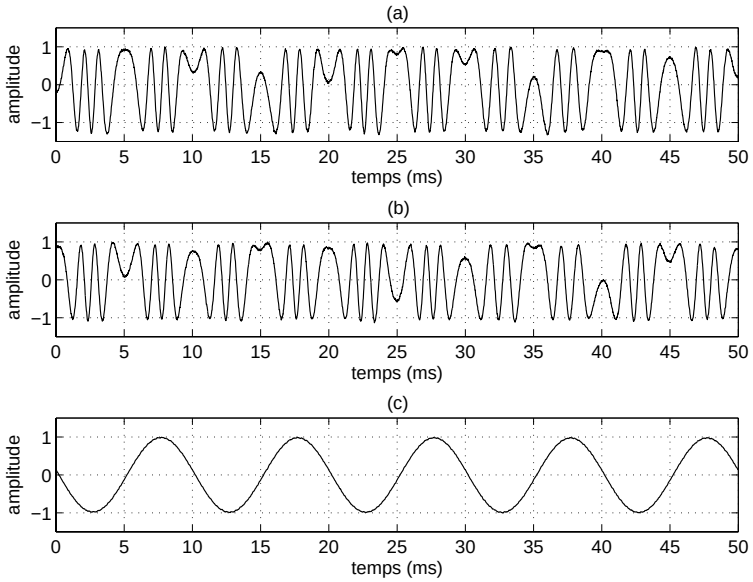

FIG. 5.6 – *Signaux d'observation* $y_1(t)$ (a), $y_2(t)$ (b) *et signal de sortie du contrôleur de vibromètre* (c). *La vitesse mesurée est sinusoïdale de fréquence* $F_{exc} = 100$ Hz *et d'amplitude* $V_{exc} = 1$ mm/s.

technique permet de travailler à partir d'une amplitude constante du signal Doppler à condition toutefois que les dimensions de la partie de l'aiguille illuminée soient plus importantes que le volume de mesure.

5.4.3 Comparaison des résultats de mesure obtenus par ALD et par vibrométrie laser

Les performances des méthodes de traitement du signal Doppler assurés par le dispositif analogique et numérique sont présentées dans ce paragraphe. Les algorithmes retenus pour cette étude sont l'estimateur basé sur la dérivée de la phase (PDBE), particulièrement adapté à ce type d'analyse car il ne nécessite pas de connaissances précises *a priori* sur la nature du signal Doppler, et le filtre de Kalman étendu (EKF). Cette méthode, adaptée dans le contexte de ce travail de thèse pour traiter spécifiquement des signaux à amplitude variable, peut malgré tout être employée pour la mesure de vitesses structurelles puisque l'amplitude est disponible à chaque instant grâce à l'opération $\sqrt{y_1^2(k) + y_2^2(k)}$.

La gamme des fréquences sur laquelle porte l'analyse s'étend de 100 Hz à 4000 Hz pour des amplitudes de la vitesse comprises entre 0,01 mm/s et 10 mm/s. Les signaux sont acquis sur une durée de 1 s environ, avec une fréquence d'échantillonnage de 100 kHz, ce qui correspond à un minimum de 100 périodes du signal d'excitation à la fréquence de 100 Hz. L'amplitude et la phase des vitesses de référence sont obtenues à l'aide d'une démodulation en quadrature synchronisée sur le signal de référence s_{exc} issu du générateur basse fréquence.

Les figures 5.7 (a), (b), (c) et (d) présentent les écarts en amplitude et en phase entre les vitesses de référence, mesurées par vibrométrie, et les vitesses estimées par la chaîne de traitement électronique mettant en œuvre le PDBE et l'EKF. Ces courbes montrent que l'estimation de la vitesse est problématique lorsque la fréquence de travail augmente, d'une part, et pour de faibles valeurs de la vitesse, d'autre part, ces cas de figure correspondant à de faibles va-

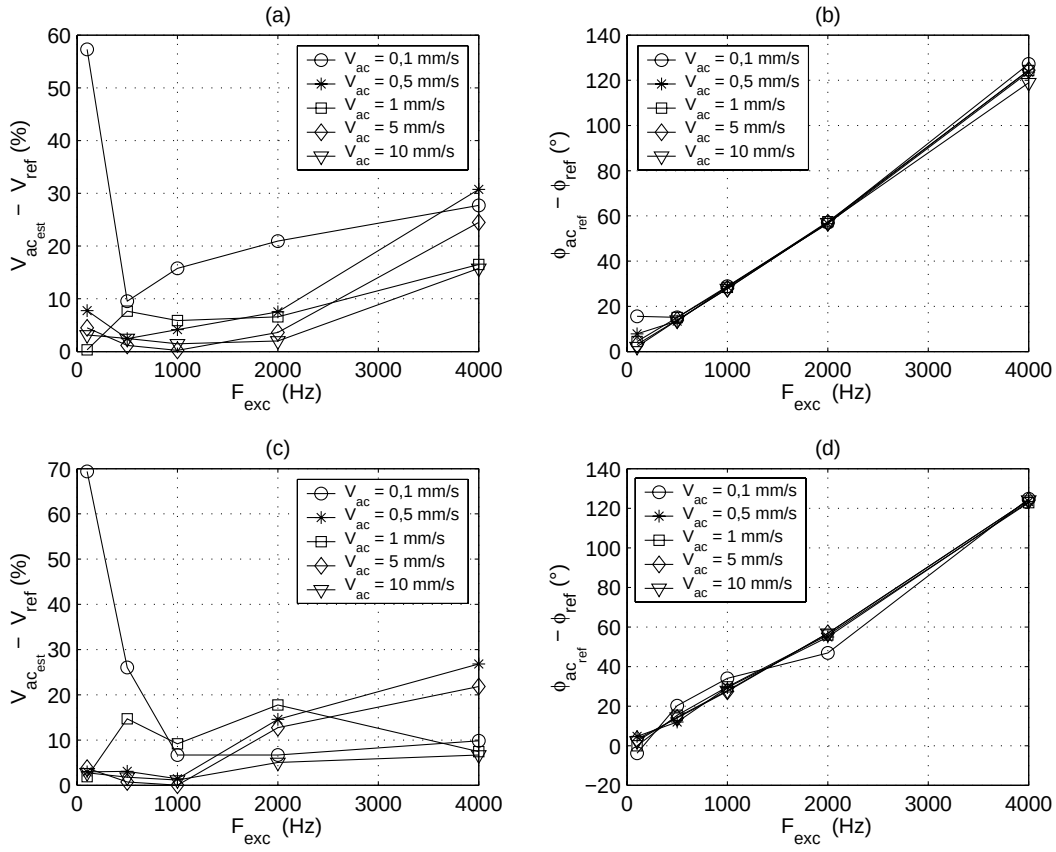

FIG. 5.7 – *Valeurs des erreurs en amplitude et en phase en fonction de la fréquence d'excitation* F_{exc}. *Méthodes d'estimation par PDBE* (a) *et* (b)*, par EKF* (c) *et* (d).

leurs de l'indice de modulation α. Il est important de noter, qu'en particulier, l'erreur sur la phase s'accroît de manière significative lorsque F_{exc} augmente. Ces résultats sont à rapprocher de ceux obtenus par POGGI [7], dans un contexte expérimental légèrement différent toutefois (vibromètre de type différent, analyse du signal Doppler à partir de l'appareil commercial BSA de Dantec), qui met en évidence une erreur de phase présentant une croissance analogue à celles que montrent les courbes (b) et (d) de la figure 5.7. Un début d'explication peut être avancé en considérant que l'analyseur assure le filtrage du signal en provenance du vibromètre à l'aide d'un filtre passe-bas du troisième ordre de fréquence de coupure 5 kHz. Or, pour des fréquences de cet ordre de grandeur, l'opération de filtrage s'accompagne inévitablement d'une rotation de l'argument de la fonction de transfert $H_{\mathrm{v}}(j2\pi F)$ et donc, par conséquent, de la phase mesurée de la vitesse de référence. En l'absence de précision sur la nature du filtre, donnée par la notice d'utilisation du vibromètre, il est raisonnable de considérer que celui-ci se comporte comme un filtre de Butterworth. L'argument de la fonction de transfert, $-\arg\left[H_{\mathrm{v}}(j2\pi F)\right]$, d'un tel filtre est alors donné par la figure 5.8 (la présence du signe $-$ se justifie ici pour une interprétation plus facile du résultat). Même si cette courbe correspond à des valeurs de l'argument de $H_{\mathrm{v}}(j2\pi F)$ inférieures aux courbes d'erreurs (b) et (c) de la figure 5.7, une très grande partie de l'erreur sur l'estimation de la phase peut néanmoins être imputée au filtre d'entrée du contrôleur de vibromètre.

Par ailleurs il est important de constater que les écarts d'estimation, en amplitude et en phase, entre les algorithmes PDBE et EKF restent faibles comme l'illustre la figure 5.9.

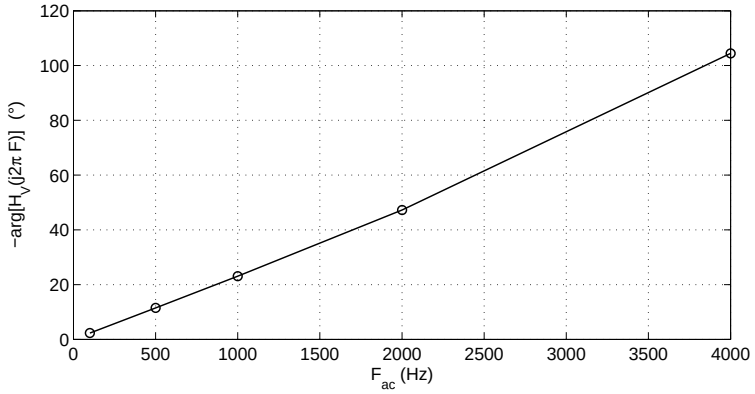

FIG. 5.8 – *Évolution, en fonction de la fréquence, de la rotation de phase engendrée par un filtre passe-bas du troisième ordre de fréquence de coupure de* 5 kHz.

5.4.4 Conclusions

La mesure de la vitesse de déplacement de la pointe d'une aiguille, obtenue simultanément par vibrométrie laser et anémométrie laser, permet de comparer les algorithmes de traitement du signal Doppler étudiés à une méthode de référence fiable et reproductible. Cependant, dans cette étude, les estimations des amplitudes présentent des fluctuations importantes qui rendent difficile l'extraction d'une loi. De la même façon les estimations de la phase présentent des écarts importants liés en grande partie au traitement subit par le signal de référence lors de son passage dans le contrôleur. Ces résultats sont proches de ceux obtenus dans [7]. Dans ce travail POGGI teste différents types d'acquisition et de traitement, utilisant, notamment, l'appareil commercial BSA, dans le but de déterminer les jeux de paramètres optimaux permettant d'estimer l'amplitude et la phase de la vitesse acoustique. Ainsi ce type d'analyse ne permet ici que de vérifier, tout au plus, la cohérence des résultats obtenus à l'aide des deux estimateurs PDBE et EKF. Il est donc indispensable de compléter l'évaluation des algorithmes étudiés à l'aide d'une autre méthode permettant d'accéder à des vitesses de référence de nature différente

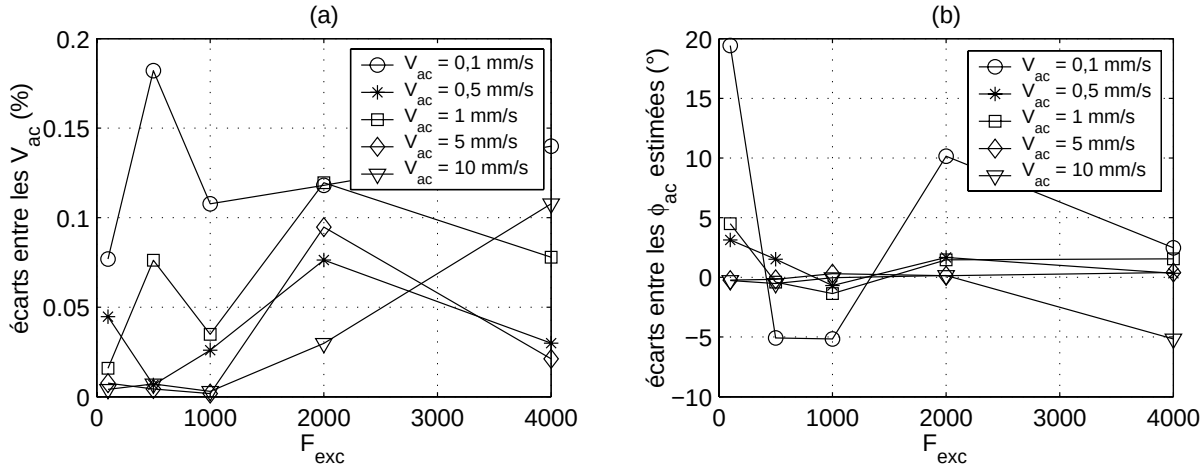

FIG. 5.9 – *Écarts, en fonction de la fréquence d'excitation* F_{exc}*, des estimations de l'amplitude* (a) *et de la phase* (b) *par les méthodes PDBE et EKF.*

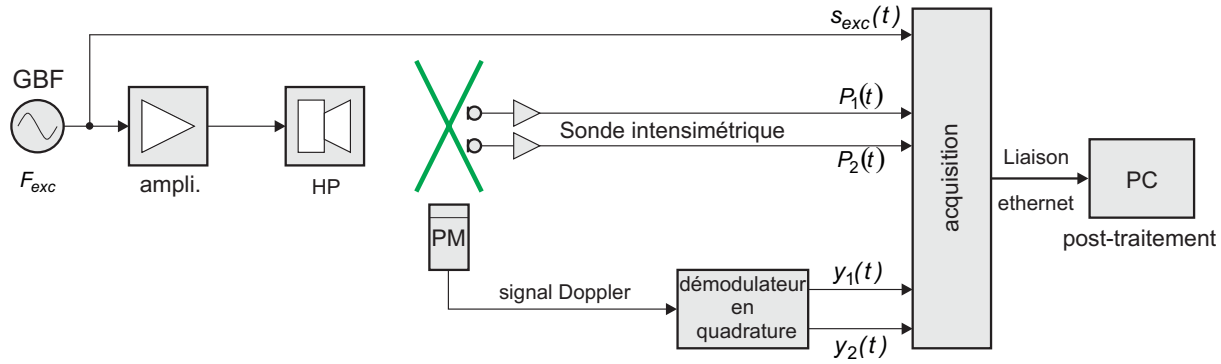

FIG. 5.10 – *Organisation du dispositif expérimental de mesure de la vitesse particulaire acoustique rayonnée par un haut-parleur.*

et ne mettant en œuvre qu'une seule chaîne de traitement.

5.5 Mesure de la vitesse particulaire acoustique rayonnée par un haut-parleur

5.5.1 Introduction

Cette seconde section est consacrée à la mesure de vitesses particulaires acoustiques rayonnées par un haut-parleur électrodynamique monté sur un écran semi-infini. Cette étude prolonge les travaux menés dans ce sens au LAUM [7, 90, 91, 92], et qui visent à valider le principe de la mesure par ALD en champ libre. Les valeurs des vitesses mesurées par ALD sont alors comparées à celles des vitesses de références obtenues à partie d'un relevé de deux pressions acoustiques.

5.5.2 Présentation du dispositif

Le dispositif expérimental permettant la mesure en champ libre est donné par la figure 5.10. Il se compose

- d'un haut-parleur PHL Audio de 166 mm de diamètre monté dans un écran semi-infini et d'axe de rayonnement horizontal. Afin de minimiser l'influence des réflexions de l'onde acoustique sur la table anti-vibratile, celle-ci est recouverte d'un panneau de mousse comme le montre la photographie de la figure 5.12. Le haut-parleur est excité par un signal sinusoïdal issu d'un générateur basse-fréquence (GBF);
- d'une sonde intensimétrique composée de deux microphones solidaires du système de déplacement tridimensionnel. Celle-ci est positionnée au plus près du volume de mesure, défini par l'intersection des deux faisceaux;
- du banc de mesure par ALD décrit à la section 5.2;
- d'un dispositif d'ensemencement de la salle en particules.

L'ensemble des mesures est mené dans une salle semi-anéchoïque.

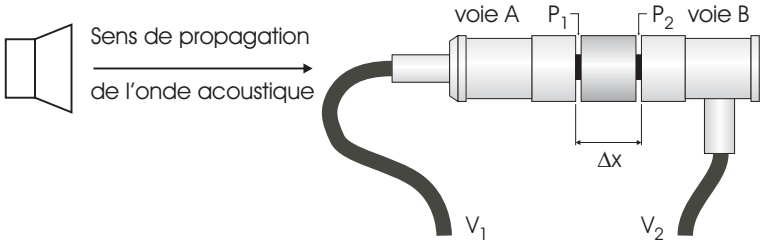

FIG. 5.11 – *sonde intensimetrique.*

5.5.3 Obtention des vitesses de références

Afin de valider les mesures de vitesses acoustiques par ALD il est indispensable de pouvoir les comparer à des valeurs de référence. Celles-ci sont obtenues par la mesure simultanée de deux pressions à l'aide de deux microphones[6] distants d'une longueur Δx petite devant la longueur d'onde de l'excitation acoustique. Ces deux microphones sont disposés sur un même dispositif appelé sonde intensimétrique (figure 5.11). La vitesse acoustique v_{ac} est alors estimée de manière approchée à l'aide de l'équation d'Euler [13],

$$\rho \, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{\mathrm{ac}}}(\vec{r})}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} \, p_{\mathrm{ac}}(\vec{r}), \tag{5.42}$$

dans laquelle le gradient est remplacé par son approximation obtenue à l'aide de la différence des deux pressions mesurées $p_1(\vec{r},t)$ et $p_2(\vec{r},t)$. Dans la relation (5.42) ρ représente la masse volumique du fluide, ω la pulsation et p_{ac} la pression acoustique. En régime sinusoïdal l'amplitude complexe de la vitesse acoustique est alors donnée par

$$V_{ac} = -\frac{1}{\mathrm{j}\ \omega\ \rho} \cdot \frac{P_2 - P_1}{\Delta x} \tag{5.43}$$

où P_1 et P_2 sont les pressions acoustiques mesurées. La sonde intensimétrique est placée de telle sorte que le volume de mesure, défini par l'intersection des deux faisceaux laser, se situe au voisinage du point milieu des deux microphones (figure 5.12). L'utilisation d'une telle méthode, bien que limitée dans les basses-fréquences par le déphasage entre les deux voies d'acquisition et en hautes-fréquences par des phénomènes de diffraction, a été préférée à celle qui consiste à n'utiliser qu'un seul microphone que l'on déplace. En effet la méthode du doublet microphonique permet de s'affranchir des problèmes de mise en œuvre et autorise surtout la mesure simultanée des pressions et de la vitesse par ALD.

5.5.4 Calibration des microphones

La mesure de la vitesse acoustique par la méthode du doublet microphonique nécessite de connaître avec précision les sensibilités et les déphasages relatifs de chacune des voies microphoniques. Ces paramètres sont évalués en deux temps : une calibration absolue de l'un des microphones, choisi comme voie de référence, donne la sensibilité S d'une part, puis une calibration relative des deux microphones permet d'accéder à la fonction de transfert intermicrophonique H_{12}.

6. méthode du doublet microphonique

Calibration absolue

La calibration absolue de la voie A est réalisée au moyen d'un calibrateur B&K de type 4231 délivrant un niveau acoustique de 94 dB SPL (soit 1 Pa pour une pression de référence de 20 μPa) à 1000 Hz dans les conditions de référence[7]. Cette procédure ne permet de déterminer que l'amplitude de la sensibilité sans donner d'information sur la phase. La valeur de la tension mesurée à la sortie de la voie A étant égale à 22,98 mV efficace la sensibilité du microphone est alors donnée par $S = 22{,}94$ mV/Pa.

Calibration relative

La calibration relative permet, quant à elle, d'évaluer la fonction de transfert intermicrophonique H_{12} donnée par

$$\frac{U_1}{U_2} = H_{12}\frac{P_1}{P_2}. \tag{5.44}$$

Dans cette relation les couples P_1,P_2 et U_1,U_2 représentent respectivement les pressions et les amplitudes complexes des tensions de sortie des deux voies. H_{12} est alors estimée en calculant le rapport des amplitudes complexes U_1 et U_2 lorsque les deux microphones sont soumis à un même champ acoustique. Cette dernière condition, obtenue grâce à un calibrateur GRAS de type 51AB et correspondant à $P_1 = P_2$, permet d'écrire

$$H_{12} = \frac{U_1}{U_2}. \tag{5.45}$$

L'évaluation de H_{12} n'est menée qu'aux fréquences auxquelles on est susceptible de travailler. La figure 5.13 montre l'allure de cette fonction de transfert pour des fréquences comprises entre 100 Hz et 4000 Hz.

7. température : 20 °C , pression statique : 1013 hPa , humidité relative : 65 % RH.

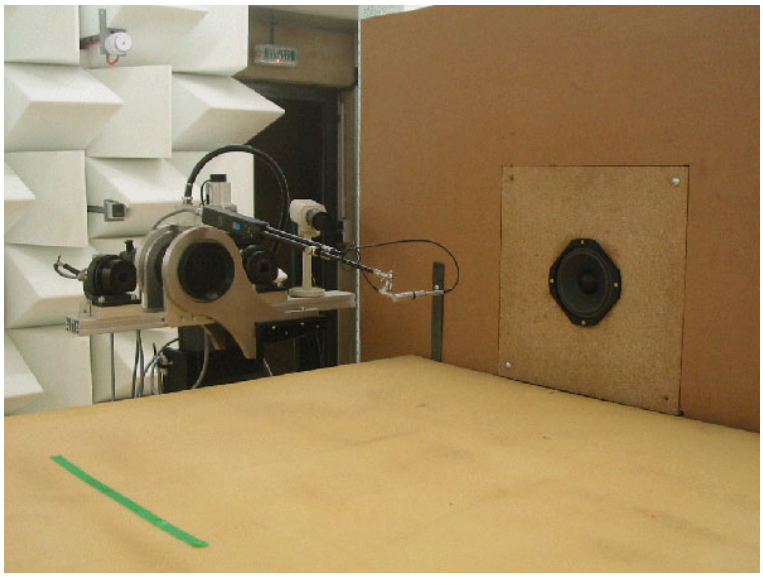

FIG. 5.12 – *Dispositif expérimental montrant le positionnement de la sonde intensimétrique.*

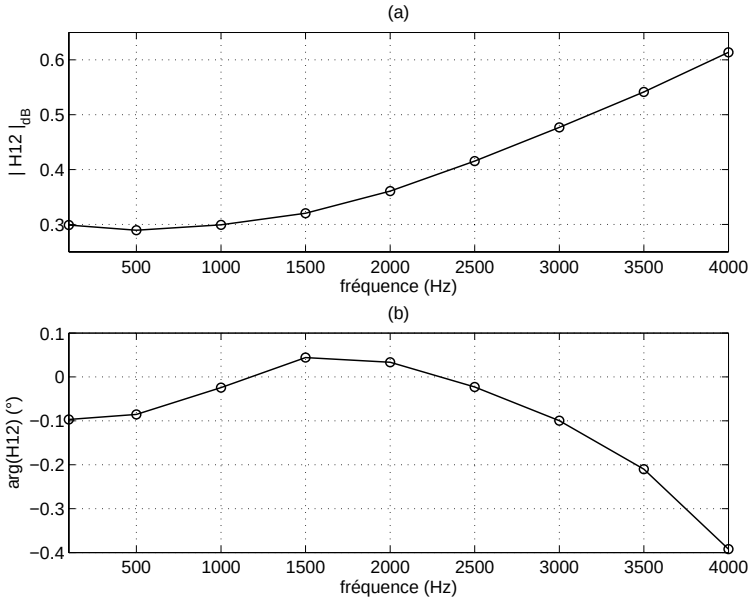

FIG. 5.13 – *Module et argument de la fonction de transfert intermicrophonique* H_{12}.

Les deux phases de calibrations étant réalisées la vitesse particulaire acoustique complexe (5.43) devient alors

$$V_{\text{ac}} = -\frac{1}{\text{j}\ \omega\ \rho S} \cdot \frac{H_{12}\ U_2 - U_1}{\Delta x}. \tag{5.46}$$

Dans cette relation $\rho = 1{,}2$ kg/m^3 et $\Delta x = 12$ mm.

5.6 Résultats expérimentaux

5.6.1 Protocole de mesure

Cette expérience consiste à confronter les valeurs des vitesses acoustiques mesurées par ALD et relevées par une mesure simultanée de deux pressions en différents points situés sur l'axe du haut-parleur. Chacune de ces positions, espacées d'une distance de 5 cm, sont référencées par rapport au premier point de mesure choisi arbitrairement comme origine des positions et placé à environ 35 cm en aval du haut-parleur.

Les signaux de pressions $P_1(t)$, $P_2(t)$, le signal d'excitation du haut-parleur $s_{\text{exc}}(t)$ ainsi que les signaux en quadrature $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont acquis de manière synchrone sur 5 voies du système d'acquisition *vision*®.

La détection des signaux Doppler est réalisée par un simple déclenchement de seuil. Ainsi une bouffée Doppler est retenue dès que son amplitude dépasse le seuil de 150 mV fixé préalablement. Cette valeur permet de prendre en compte des signaux qui ne sont pas trop perturbés à l'image du signal en phase $y_1(t)$, obtenu expérimentalement, de la figure 5.14. Les durée d'enregistrement du système *vision*® sont configurées de telle manière à conserver en mémoire les 10 ms du signal précédant (*pre-trigger*) et les 100 ms du signal suivant (*post-trigger*) le déclenchement de l'acquisition. Les mesures à chaque position donnent lieu à l'enregistrement de 500 signaux Doppler permettant une analyse statistique.

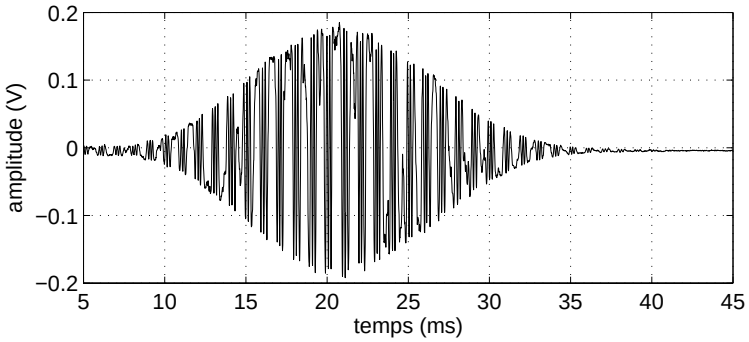

FIG. 5.14 – *Composante en phase $y_1(t)$ du signal Doppler. Résultat expérimental obtenu pour F_{ac} = 1000 Hz.*

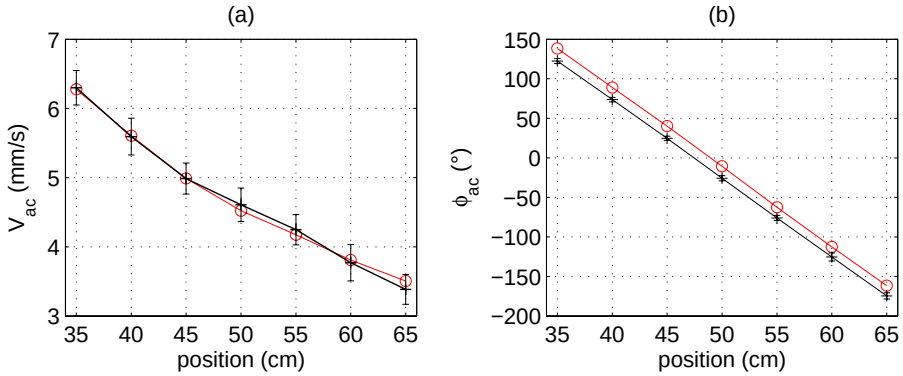

FIG. 5.15 – *Profils des amplitudes* (a) *et de la phase* (b) *de la vitesse acoustique mesurées par ALD et estimées par PDBE (noir) et à partir de deux pressions (rouge). F_{ac} = 1000 Hz.*

5.6.2 Résultats

Deux séries de mesures sont effectuées en différentes positions sur l'axe du haut-parleur. Dans la première, la fréquence acoustique F_{ac} est fixée à 1000 Hz, le haut-parleur étant excité par un signal d'amplitude de 0,5 V. Les résultats, présentés par les figures 5.15 et 5.16, montrent que les amplitudes des vitesses acoustiques mesurées sont comprises entre 3,4 mm/s et 6,2 mm/s valeurs qui correspondent à des niveaux de 97 dB SPL et de 102 dB SPL respectivement. Ces deux figures indiquent par ailleurs les écarts-types des estimations de la vitesse V_{ac}, matérialisés par des barres verticales, et mettent en évidence la décroissance en $1/r$ de l'allure du profil de la vitesse.

Les écarts entre les vitesses et les phases mesurées par rapports aux valeurs estimées par mesure de pression sont représentés sur la figure 5.17. Pour les deux méthodes les écarts observés sont inférieurs à 4% pour l'estimation de l'amplitude et compris entre 13° et 17° environ pour la phase.

Une seconde série de mesures est effectuée à la fréquence acoustique de 2000 Hz, le haut-parleur étant toujours excité par un signal d'amplitude de 0,5 V. Les figure 5.18 et 5.19 illustrent ces résultats. Les amplitudes des vitesses acoustiques mesurées sont comprises, cette fois-ci, entre 4.2 mm/s et 6,2 mm/s, c'est à dire entre 98 dB SPL et 102 dB SPL. Les écarts entre les vitesses et les phases mesurées par rapport aux valeurs estimées par mesure de pression sont représentés sur la figure 5.20. Pour cette fréquence les écarts sont du même grandeur que

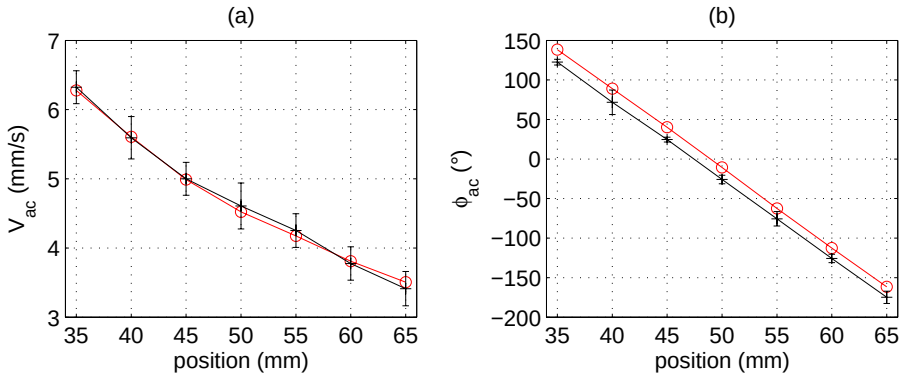

FIG. 5.16 – *Profils des amplitudes* (a) *et de la phase* (b) *de la vitesse acoustique mesurées par ALD et estimées par EKF (noir) et à partir de deux pressions (rouge).* F_{ac} = 1000 Hz.

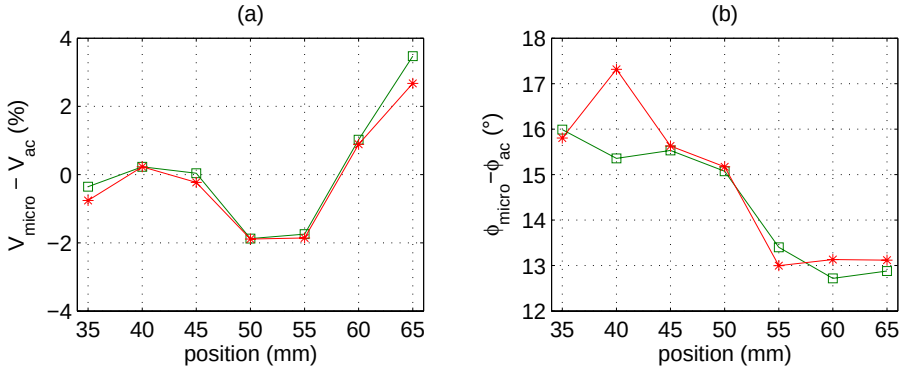

FIG. 5.17 – *Erreurs relatives entre les amplitudes des vitesses mesurées et les valeurs estimées par mesure de pression* (a) *et erreurs de phase* (b). *EKF* (∗) *et PDBE* (□) . F_{ac} = 1000 Hz.

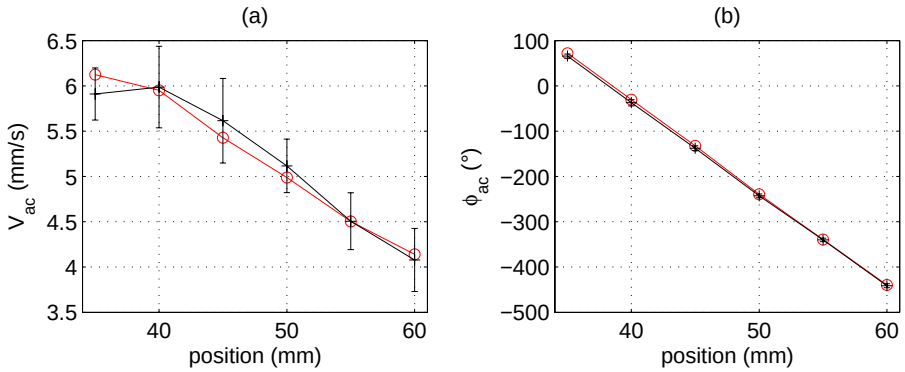

FIG. 5.18 – *Profils des amplitudes* (a) *et de la phase* (b) *de la vitesse acoustique mesurées par ALD et estimées par PDBE (noir) et à partir de deux pressions (rouge).* F_{ac} = 2000 Hz.

ceux observés à 1000 Hz. Pour les deux méthodes les écarts absolus sont inférieurs à 4% pour l'estimation de l'amplitude et compris entre -3° et 7° pour la phase. Enfin la figure 5.21 donne un aperçu de l'évolution de la vitesse d'écoulement sur une durée nécessaire à l'acquisition de

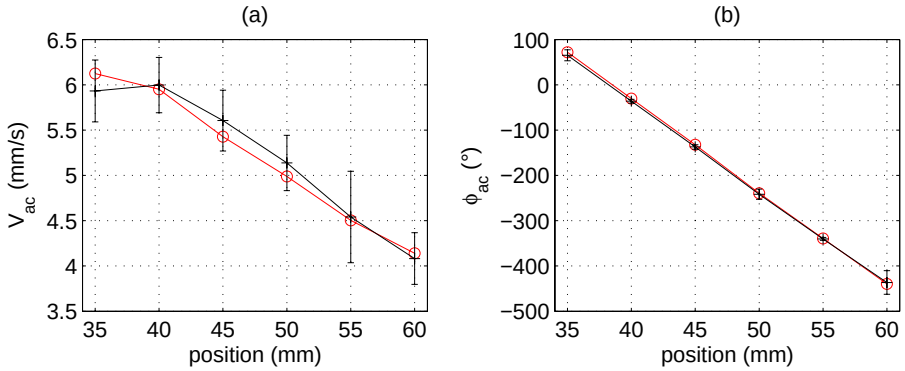

FIG. 5.19 – *Profils des amplitudes* (a) *et de la phase* (b) *de la vitesse acoustique mesurées par ALD et estimées par EKF (noir) et à partir de deux pressions (rouge).* F_{ac} = 2000 Hz.

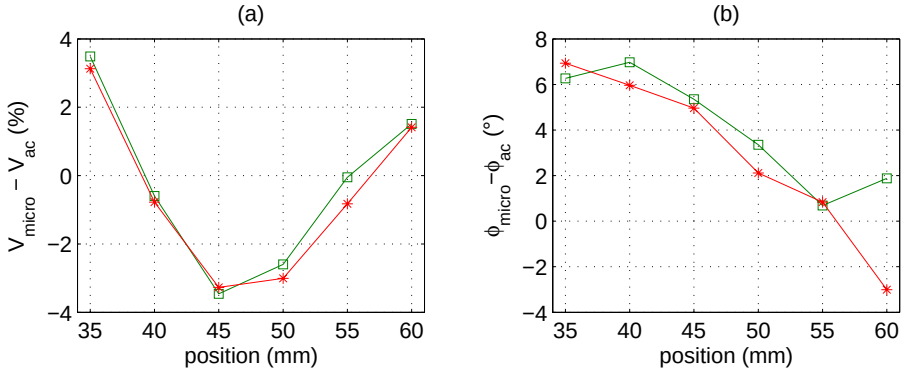

FIG. 5.20 – *Erreurs relatives entre les amplitudes des vitesses mesurées et les valeurs estimées par mesure de pression* (a) *et erreurs de phase* (b). *EKF* (∗) *et PDBE* (□) . F_{ac} = 2000 Hz.

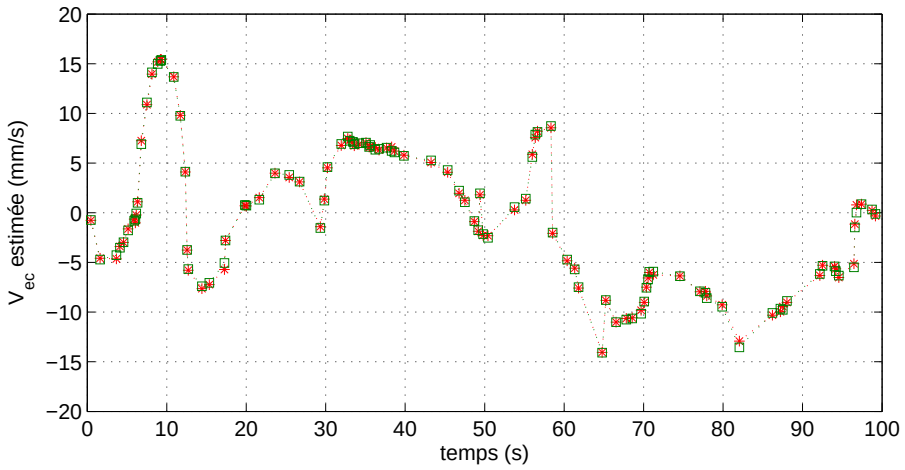

FIG. 5.21 – *Exemple de vitesse d'écoulement mesuré expérimentalement. EKF* (∗) *et PDBE* (□). F_{ac} = 1000 Hz.

100 bouffées Doppler qui, dans cet exemple, est de l'ordre de 100 secondes[8]. Cette séquence

8. soit donc une cadence d'acquisition proche d'une bouffée par seconde

représente les valeurs des estimations de V_{ec} relevées aux instants correspondant au maximum du signal Doppler et donne donc l'allure de l'évolution temporelle de la vitesse d'écoulement échantillonnée aléatoirement. Il est possible de constater, d'une part, que les estimations données par PDBE et EKF sont voisines et, d'autre part, que le déplacement des particules offre un aspect aléatoire. En valeur absolue V_{ec} atteint dans ce cas des amplitudes de l'ordre de 16 mm/s. Cependant il est possible d'observer, sur d'autres enregistrements qui ne sont pas présentés ici, des amplitudes dépassant 25 mm/s. En tenant compte de la relation (3.32) cette valeur engendre un signal Doppler dont la largeur avoisine les 2 ms, ce qui correspond à deux périodes de l'excitation acoustique lorsque $F_{\mathrm{ac}} = 1000$ Hz par exemple. Ce point est très important car il montre qu'il est envisageable d'estimer les paramètres de la vitesse acoustique à partir d'un nombre réduit de périodes acoustiques. Cependant dès que F_{ac} diminue le nombre de périodes acoustiques disponibles pour la mesure décroit de manière importante ce qui rend problématique les estimations précises. Ces résultats sont encourageants et montrent, notamment, que la méthode par EKF est adaptée à l'estimation en ligne des paramètres de la vitesse acoustique.

5.7 Conclusions

L'ensemble de cette campagne de mesure a été mené en très peu de temps et sans dépouillement intermédiaire des résultats. Ceux-ci restent malgré tout encourageants surtout en tenant compte que l'amplitude de sortie des signaux issus du démodulateur en quadrature représente le seul critère retenu pour la validation des bouffées Doppler. Même si le mode d'ensemencement adopté au laboratoire est à présent maîtrisé, il n'en reste pas moins vrai que la méthode de détection sommaire proposée dans ce travail se traduit, très certainement, par la prise en compte de signaux Doppler non-valides. En effet, le déclenchement de l'acquisition sur un simple seuil ne permet pas d'écarter de l'analyse les bouffées Doppler correspondant, par exemple, à la traversée du volume de mesure par des particules de dimensions trop importantes, ne suivant pas le mouvement du fluide, ou aux passages simultanés de plusieurs gouttelettes.

Par ailleurs l'examen des résultats précédents montre que les méthodes PDBE et EKF présentent des performances du même ordre de grandeur. Ceci signifie, d'une part, que les imprécisions des mesures, tant en terme de biais que de variance, sont imputables en grande partie au dispositif amont de l'expérience (ensemencement, calibration des parties optiques et électroniques) et, d'autre part, que la méthode d'estimation par EKF se montre très robuste vis à vis des écarts par rapport au modèle du signal Doppler.

Par ailleurs il est difficile de conclure sur la qualité des estimations des vitesses d'écoulement celles-ci n'étant pas connues *a priori*. Une mesure conjointe de V_{ac}, de ϕ_{ac} et de V_{ec} dans un guide d'onde équipé d'un système de convection forcée et contrôlée paraît ici utile, par exemple. Ce travail pourrait permettre, entre autre, d'étudier l'influence de la vitesse d'écoulement, donc de la durée du signal Doppler, sur la qualité des estimations des paramètres de la vitesse acoustique.

Il conviendrait à présent de procéder à des mesures systématiques, recouvrant une gamme plus importante des valeurs des fréquences et des paramètres de la vitesse acoustique. En outre, ce travail devra être mené avec un meilleur contrôle des conditions expérimentales, notamment en ce qui concerne les phénomènes de convection. De même il apparaît indispensable d'étudier plus finement les erreurs liées, notamment, à l'étape de démodulation en quadrature analogique ainsi que celles apportées par le système d'acquisition.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

L'utilisation de l'anémométrie laser à effet Doppler pour la mesure de vitesse particulaire acoustique n'est efficace que si elle s'accompagne d'une technique de traitement du signal adaptée. Les travaux menés précédemment au LAUM ont permis de poser les bases tant théoriques qu'expérimentales de cette technique de mesure avec l'hypothèse d'une excitation sinusoïdale du champ acoustique. Les méthodes de traitement du signal envisagées alors portent essentiellement sur les techniques temps-fréquences dans un contexte de traitement différé et pour des signaux Doppler d'amplitude constante ce qui ne permet pas, entre autre, de prendre en compte les phénomènes d'écoulement dans la mesure.

La nécessité de proposer une solution fiable, d'utilisation facile et satisfaisant les besoins expérimentaux du laboratoire a conduit à retenir un certain nombre de principes pour le traitement du signal Doppler. En premier lieu, l'utilisation de méthodes paramétriques, exploitant le maximum d'information disponible *a priori* sur le signal Doppler, autorise la prise en compte de l'amplitude variable. Deuxièmement le traitement à partir de deux signaux en quadrature et en bande de base permet de choisir une fréquence d'échantillonnage compatible avec les contraintes du traitement numérique en temps réel.

Par la suite ces orientations ont permis d'établir le modèle du signal Doppler grâce auquel il a été possible de proposer les formes analytiques approchées mais précises des bornes de Cramer-Rao pour les estimées des paramètres de la vitesse acoustique. Ces expressions présentent un intérêt capital dans la mesure où elles permettent de mieux comprendre l'influence, sur la qualité des estimations, des différents paramètres du dispositif ALD, du signal lui-même mais aussi de l'électronique de traitement.

Trois méthodes d'estimation ont alors été proposées. Une première approche, non-paramétrique, est basée sur le calcul de la dérivée de la phase du signal Doppler suivie de l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique à l'aide d'une démodulation synchrone. Le fonctionnement d'une telle méthode est limité à un domaine où la fréquence acoustique est supérieure à 500 Hz et les rapports signal sur bruit supérieurs à 12 dB. Malgré ces performances modestes cette méthode, très simple à mettre en œuvre, ne nécessite aucune connaissance *a priori* sur la nature du signal Doppler, à l'exception de la fréquence acoustique. Ces caractéristiques la destinent alors à jouer le rôle de technique de référence propre à initialiser une méthode d'estimation, plus performante, basée sur la recherche du maximum de vraisemblance.

Cette dernière procédure offre les meilleurs résultats, les variances des estimées atteignant alors les CRB, à la condition toutefois que l'initialisation soit suffisamment précise pour assurer la convergence de la phase d'optimisation. Ainsi les performances de cette méthode sont très largement tributaires de celles du PDBE ce qui en limite l'utilisation en basse-fréquence et à faible rapport signal sur bruit. L'efficacité asymptotique de cette méthode d'estimation a

principalement permis, dans ce travail, de valider les formes analytiques approchées des CRB.

Le filtre de Kalman étendu (EKF) constitue la dernière méthode d'estimation développée. Celle-ci peut être vue comme un algorithme d'optimisation permettant de résoudre de manière récursive un problème de maximum de vraisemblance. Cette méthode bien que sous-optimale est particulièrement bien adaptée à l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique. En effet, dès lors que le rapport signal sur bruit est supérieur à 6 dB, elle offre un comportement très stable sur l'ensemble de la gamme des fréquences et des amplitudes de la vitesse acoustique examinées (100 Hz $< F_{\mathrm{ac}} <$ 4000 Hz et 0,1 mm/s $< V_{\mathrm{ac}} <$ 10 mm/s). Les essais ont montré, de plus, la capacité de l'EKF à estimer, avec une précision acceptable (biais de l'ordre de 3%) les paramètres de la vitesse, pour des indices de modulation α de l'ordre de $2 \cdot 10^{-2}$. Par ailleurs, à condition de travailler à partir d'une fréquence d'échantillonnage de 2 MHz, il est possible d'envisager la démodulation de signaux Doppler présentant des indices de modulation de l'ordre de 10^{-3}. Ceci permet d'améliorer d'un facteur 10 les résultats obtenus lors d'études précédentes [16]. D'autre part, l'EKF ne nécessite aucune procédure d'initialisation, présente un coût calculatoire faible et se montre robuste vis à vis des écarts de l'allure temporelle du signal Doppler par rapport à son modèle. Il faut cependant noter que pour des rapports signal sur bruit médiocres, généralement inférieurs à 12 dB, une procédure de seuillage d'histogramme des estimations est indispensable pour s'affranchir des phénomènes de *décrochage* de la méthode.

Des mesures de vitesses particulaires acoustiques ont été réalisées dans deux types d'expérience. Dans un premier temps des mesures de vitesses vibratoires sinusoïdales ont permis de comparer les performances respectives des estimateurs PDBE et EKF par rapport à des vitesses de référence obtenues par vibrométrie laser. Les estimées des paramètres de la vitesse présentent des fluctuations importantes à partir desquelles il est délicat de déduire une loi générale. Ce type d'expérience permet uniquement la vérification de la cohérence des résultats entre les méthodes PDBE et EKF, et souligne, d'une manière générale, les difficultés à estimer des paramètres pour des fréquences élevées et des amplitudes de la vitesse acoustique faibles.

Dans un second temps les deux estimateurs ont été mis en œuvre pour des mesures d'ALD en champ libre. Les estimées des paramètres ont alors été comparées à des valeurs de référence obtenues à l'aide de mesures utilisant la méthode du doublet microphonique. Les résultats obtenus à 1000 Hz et 2000 Hz montrent le bon comportement des estimateurs PDBE et EKF. Bien qu'encourageants ces résultats nécessitent d'être complétés par une étude expérimentale plus approfondie recouvrant notamment l'ensemble de la gamme des valeurs des fréquences acoustiques et des amplitudes de la vitesse acoustique. Ce travail exigera une meilleure maîtrise des conditions expérimentales, dont la stabilité est primordiale pour l'interprétation des résultats, et notamment un meilleur contrôle des phénomènes de convection.

Plusieurs améliorations du dispositif de mesure de la vitesse acoustique particulaire sont cependant envisageables. En effet, la validation des méthodes étudiées a été menée avec l'hypothèse d'une fréquence d'échantillonnage $F_e = 100$ kHz. Cette valeur a été retenue car elle correspond à la cadence maximale d'échantillonnage du système d'acquisition des données disponibles pour la validation expérimentale. Or l'augmentation de cette valeur limite de F_e doit permettre d'améliorer la précision du filtre de Kalman grâce, notamment, à une meilleure évaluation des développements limités des équations d'observation autour des estimations courantes. Par ailleurs, aucun contrôle de la validité des bouffées Doppler acquises n'est proposé dans ce travail, la procédure de détection se limitant à un simple déclenchement des enregistrements à partir d'un seuil pré-défini. La mise en œuvre d'un schéma de détection basée, par exemple, sur un *test de rapport de maximum de vraisemblance* (Likelihood Ratio test - LRT), s'avère alors indispensable pour repérer, en ligne, la présence d'une particule dans le volume de mesure et vérifier la crédibilité des valeurs des paramètres estimés de la vitesse.

La mesure de vitesses particulaires acoustiques par ALD reste difficile en raison de la sensibilité des champs acoustiques aux perturbations engendrées par les capteurs et de l'étendue des dynamiques des amplitudes et des fréquences de la vitesse acoustique. Cette étude montre que l'estimation, en ligne, des paramètres de la vitesse particulaire est envisageable par une procédure simple d'utilisation. Il propose, moyennant l'emploi d'une architecture matérielle et logicielle de traitement du signal adaptée, une technique de mesure prenant en compte à la fois l'amplitude variable du signal Doppler et la vitesse d'écoulement. Cette méthode fonctionne sur une large plage de valeurs de l'amplitude et de la fréquence de la vitesse acoustique et donne des précisions tout à fait acceptables même pour de faibles indices de modulation. Ce travail doit aboutir très rapidement à la réalisation d'un système opérationnel complet de mesure de la vitesse acoustique particulaire interfaçable avec le dispositif ALD existant.

Épilogue

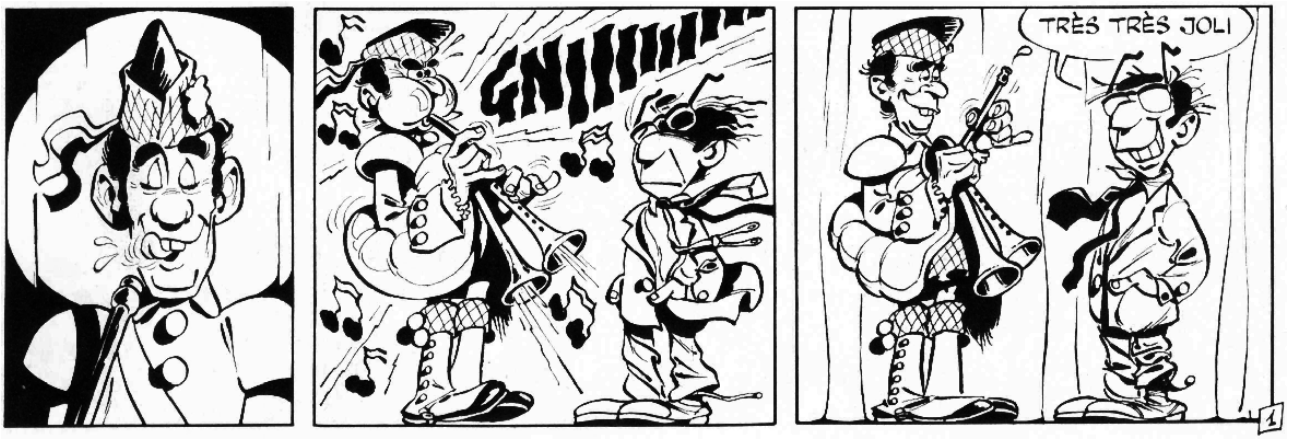

Illustration des effets d'un déplacement particulaire important sur un champ acoustique et son environnement .(Extrait de Trucs-en-vrac © *Dargaud - Gotlib -* 2003*)*

Bibliographie

[1] H. Yeh and H.Z. Cummins. Localized fluid flow measurements with a He-Ne laser spectrometer. *Appl. Phys. Lett.*, 36(4):176–178, 1964.

[2] K.J. Taylor. Absolute measurement of acoustic particle velocity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 59, november 1976.

[3] R. Feynman, R. Leighton et M. Sands. *Le cours de physique de Feynman - Mécanique 2.* Dunod, 1998.

[4] A. George. *Louis De Broglie : Physicien et penseur - Collection Les savants du monde.* Albin Michel, 1952.

[5] F. Durst, A. Melling, and J.H. Whitelaw. *Principles and practice of laser-Doppler anemometry.* Academic Press, 1976.

[6] Disa Elektronic, Skovlunde, Danemark. *Laser Doppler Anemometry*, 1983.

[7] S. Poggi. *Contribution au développement d'un banc de mesure de la vitesse particulaire acoustique par vélocimétrie laser doppler (VLD) : évaluation des résultats et applications.* Thèse de doctorat, Université du Maine, 2000.

[8] F. Galtier. *Contribution à l'estimation fréquentielle de signaux en anémométrie laser doppler.* Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1997.

[9] W.T. Mayo. Modeling laser velocimeter signals as triply stochastic Poisson processes. In *in Minnesota Symposium on Laser Anemometry*, 1975.

[10] V. Valeau. *Mesure de la vitesse acoustique particulaire par anémométrie laser Doppler : estimation de fréquence instantanée à variation sinusoïdale, validation de la mesure.* Thèse de doctorat, Université du Maine, 1999.

[11] B.E.A. Saleh and M.C. Teich. *Fundamentals of photonics.* Wiley Interscience, 1991.

[12] M. Rossi. *Électroacoustique*, volume XXI. Presses polytechniques romandes, 1986.

[13] M. Bruneau. *Manuel d'acoustique fondamentale.* Hermes, 1998.

[14] J.F. Vignola, Y.H. Berthelot, and J. Jarzinsky. Laser detection of sound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90:pages 1275–1286, 1991.

[15] V. Valeau, J.C. Valière, P. Herzog, L. Simon, and C. Depollier. Instantaneous frequency tracking of a sine wave phase modulation signal. In *IEEE Int. Symp. on time-frequency and time-scale analysis*, 1996.

[16] C. Mellet. *Estimation paramétrique de signaux à phase sinusoïdale : application à la vélocimétrie laser à effet Doppler pour l'acoustique.* Thèse de doctorat, Université du Maine, 2000.

[17] M. Schwartz. *Information, transmission, modulation and noise.* McGraw-Hill, 1990.

[18] F. de Coulon. *Théorie et traitement des signaux*, volume IV. Georgi, 1984.

[19] J. Marcus. *La modulation de fréquence - Théorie et applications industrielles.* 1960.

[20] G. Zhou and G. Giannakis. Harmonics in gaussian multiplicative and additive noise: Cramer-Rao bounds. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(5):1217–1231, may 1995.

[21] B. Freidlander and J.M. Francos. Estimation of amplitude and phase parameters of multicomponent signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(4):pages 917–926, april 1995.

[22] J.M. Francos and B. Freidlander. Bounds for estimation of multicomponent signals with random amplitude and deterministic phase. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(5):pages 1161–1172, may 1995.

[23] G. Zhou and G. Giannakis. On polynomial phase signals with time-varying amplitudes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(4):pages 848–861, april 1996.

[24] A. Ouldali. *Approches pour l'analyse des signaux à phase polynomiale. Effet d'un bruit multiplicatif et d'une amplitude variable.* Thèse de doctorat, Université de Paris-sud, 1998.

[25] L. Jenson. Automatic digital signal processing for LDV. *Laser anemometry*, 2:pages 617–628, 1991.

[26] Dantec Measurement Technology. *BSA Installation and User's guide*, 1994.

[27] B. Boashash. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal - Part 2: Algorithms and applications. *Proceedings of the IEEE*, 80(4):539–568, 1992.

[28] O. Besson. *Analyse spectrale et modèles multiplicatifs - Application aux signaux de radar Doppler.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1992.

[29] J. Ville. Théorie et application du signal analytique. *Câbles et transmissions*, 2, 1948.

[30] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrum. *Phys. Rev.*, 40:pages 749–759, 1932.

[31] S. Dufossé. *Évaluation de méthodes de traitement du signal applicables à la vélocimétrie laser Doppler (LDV).* Mémoire de DEA, Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, 1994.

[32] B. Boashash. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal - Part 1: Fundamentals. *Proceedings of the IEEE*, 80(4):519–538, 1992.

[33] B. Boashash and P. O'Shea. Use of the cross Wigner-Ville distribution for estimation of instantaneous frequency. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(3):pages 1439–1445, march 1993.

[34] B. Boashash and P. O'Shea. Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(1):pages 216–220, january 1994.

[35] J.C. Valière, P. Herzog, V. Valeau, and G. Tournois. Acoustic velocity measurements in the air by means of laser doppler velocimetry: dynamic and frequency range limitations and signal processing improvements. *Journal of Sound and Vibration*, 229(3):607–626, 2000.

[36] V. Valeau, C. Mellet, and J.C. Valière. Frequency tracking based analysis of laser Doppler velocimetry signals for sound fields measurements. In *6th IEEE Int. Conf. on Electronics, Circuits and Systems*, 1999.

[37] H.L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory - Part II.* John Wiley & Sons, 1968.

[38] A. Blanchard. *Techniques des boucles d'asservissement de phase.* École Supérieure d'Électricité, 1975.

[39] M. Girard. *Boucles à verrouillage de phase.* McGraw-Hill, 1988.

[40] D. Lee, Y. Berthelot, and J. Jarzynski. A laser probe for measurements of in-plane structural vibrations. In *CETIM - International congress on intensity techniques*, pages 181–188, 1990.

[41] P.M. Goggans and C.R. Smith. Signal processing of laser-Doppler vibrometer output for mine detection. In *Part of the SPIE Conference on Detection and Remediation Technologies for Mines and Minelike Target IV*, pages 1429–1437, 1999.

[42] J. Czarske and O. Dölle. Quadrature demodulation technique used in laser Doppler velocimetry. *Electronics letters*, 34:pages 547–549, march 1998.

[43] L. Bellière. Étude et optimisation d'un vélocimètre laser simple et autonome. In *5^e congrès francophone de vélocimétrie laser*, 1996.

[44] J.C. Valière, B. Gazengel, C. Mellet, S. Poggi et V. Valeau. Anémométrie laser à effet Doppler pour l'acoustique : spécificités et avancées du traitement du signal. In *7ème Congrès Francophone de Vélocimétrie laser, Marseille*, septembre 2000.

[45] S.M. Kay. *Fudamentals of statistical signal processing - Estimation theory*. Prentice-Hall, 1993.

[46] O. Besson and F. Galtier. Estimating Particles Velocity from Laser Measurements: Maximum Likelihood and Cramer-Rao Bounds. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(12):pages 3056–3068, december 1996.

[47] F. Vincent et O. Besson. Estimation de signaux chirp à amplitude variable. *Traitement du signal*, 16(3):pages 165–174, 1999.

[48] C. Mellet et J.C. Valière. Détection de la FI de signaux à variation de phase sinusoïdale et faible indice de modulation par une technique basée sur le principe du maximum de vraisemblance : Application à la mesure de vitesse particulaire acoustique. In *Actes du dix-septième colloque GRETSI, Vannes*, 13-17 septembre 1999.

[49] C. Mellet and J.C. Valière. Maximum likelihood approaches for sound field measurement using LDV. In *10th Int. Symp. on Applications of laser techniques to fluids mechanics*, juillet 2000.

[50] C. Mellet, J.C. Valière, and V. Valeau. Use of frequency trackers in laser Doppler velocimetry signals for sound field measurements : comparative study of two estimators. In *Mechanical System and Signal Processing*, 2002.

[51] P.M. Howard and R.V. Edwards. Implementation of a likelihood ratio test for laser Doppler velocimeter burst detection. *Applied optics*, 36(30):pages 7629–7638, october 1997.

[52] F. Galtier and O. Besson. On line joint detection of particles' arrival and estimation of speed in laser anemometry. *Signal Processing*, 67:pages 291–305, 1998.

[53] H.R.E. van Maanen and F.J. Nijenboer. Application of the wavelet transform to laser-Doppler signal processors. In *Proc. of the 8th Int. Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, july 8-11 1996.

[54] T. Ito, R. Sawada, and E. Higurashi. Integrated microlaser Doppler velocimeter. *Journal of Lightwave Technology*, 17(1):pages 30–34, january 1999.

[55] D. Modares, F. Taugwalder, and M. Gharib. Mini laser Doppler anemometer. Imaging and Micro-Optics Lab, Caltech, Aeronautic dept.

[56] A. Wagner, D. Drescher, and W. Stork. Laser Doppler velocimetry.

[57] A. Le Duff, G. Plantier, J.C. Valière, and T. Bosch. Velocity Measurement in a Fluid Using LDV: Low-Cost Sensor and Signal Processing Design. In *IEEE International Conference on Sensors, SENSORS'2002, Kissimmee*, june 2002.

[58] V. Valeau, A.M. Bruneau, B. Gazengel, P. Herzog et J.C. Valière. Validation expérimentale de la mesure de vitesses acoustiques par anémométrie laser Doppler. In *5^e congrès francophone de vélocimétrie laser Doppler, Rouen*, septembre 1996.

[59] S. Poggi, B. Gazengel et A.M. Bruneau. Mesure des vitesses acoustiques par vélocimétrie laser (VLD): validation expérimentale en guide d'onde plane. In *14^e congrès français de mécanique, Toulouse*, août-septembre 1999.

[60] S. Poggi, B. Gazengel, J.C. Valière, and A.M. Bruneau. Laser Doppler velocimetry applied to airborne acoustics: influence of the signal processing parameters. In *Join Meeting, 137th Regular Meeting of the Acoustical Society of America and 2nd Convention of the EEA: Forum acousticum, Berlin*, mars 1999.

[61] S. Poggi, B. Gazengel, G. Tournois, and A.M. Bruneau. An experimental validation of acoustic velocity measurements using laser Doppler anemometry. In *Euro Noise, München*, october 1998.

[62] S. Poggi, B. Gazengel, G. Tournois, and A.M. Bruneau. Evaluation of the performance of two acquisition and signal processing systems for acoustic particle velocity measurements. In *10th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon*, july 2000.

[63] S. Haykin. *Adaptative Filter Theory.* Prentice-Hall, 1991.

[64] P. Flandrin. *Temps-fréquence.* Hermes, 1993.

[65] A. Le Duff, S. Poggi, G. Plantier, and J.C. Valière. Real-Time Acoustic Velocity Measurement in the Air by Means of Laser Velocimetry. In *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, IMTC'2001 - IEEE Computer Society, Budapest*, pages 234–238, may 2001.

[66] H.L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory - Part I.* John Wiley & Sons, 1968.

[67] H.L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory - Part III.* John Wiley & Sons, 1968.

[68] C.A. Bozzo. *Le filtrage optimal et ses applications aux problèmes de poursuite - Tome 2.* Lavoisier - Technique et Documentation, 1983.

[69] S.M. Kay. *Modern Spectral Estimation - Theory & Application.* Prentice-Hall, 1988.

[70] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical Recipes in C.* Cambridge University Press, 1988.

[71] A. Le Duff, G. Plantier, and J.C. Valière. A Signal Processing Approach for Acoustic Velocity Measurement. In *Kandó Conference 2002, Budapest*, november 2002.

[72] S. Tretter. Estimating the Frequency of a Noisy Sinusoid by Linear Regression. *IEEE Transactions on Information Theory*, 31:pages 832–835, november 1985.

[73] D.C. Ghiglia and M.D. Pritt. *Two dimensional phase unwrapping: Theory, Algorithms and Software.* Wiley, 1998.

[74] A.V. Oppenheim and R.W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing.* Prentice-Hall, 1989.

[75] B. Boashash, G. Jones, and P. O'Shea. Instantaneous Frequency of Signals: Concepts, Estimation, Techniques and Application. *Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures and Implementation*, 1152(1):pages 382–400, january 1989.

[76] A. Le Duff, G. Plantier, J.C. Valière, and R. Perdriau. Acoustic Velocity Measurement in the Air by Means of Laser Velocimetry: Cramer-Rao Bounds and Maximum Likelihood Estimation. In *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, ICASSP'2002, Orlando*, may 2002.

[77] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization.* Wiley, 1987.

[78] J.M. Brossier. *Signal et communication numérique.* Hermes, 1997.

[79] C.A. Bozzo. *Le filtrage optimal et ses applications aux problèmes de poursuite - Tome 1.* Lavoisier - Technique et Documentation, 1983.

[80] K. Ogata. *Discrete-time control systems.* Prentice-Hall, 1987.

[81] B. Picinbono. *Signaux aléatoires - Tome 3 - Bases du traitement statistique du signal.* Dunod Université, 1995.

[82] M.S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp. A tutorial on particle filters for online nonlinear-non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(2):pages 174–188, february 2002.

[83] R.E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transaction of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82, march 1960.

[84] J. Lifermann. *Les principes du traitement statistique du signal.* Masson, 1981.

[85] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. *Optimal Filtering.* Prentice-Hall, 1979.

[86] R. Grover Brown and P.Y.C. Hwang. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering.* John Wiley & Sons, 1997.

[87] P. Bonnifait. *Localisation précise en position et en attitude des robots mobiles d'extérieur à évolutions lentes.* Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1997.

[88] A. Angot. *Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications.* Édition de la revue d'optique, 1957.

[89] S.M. Kay. *Fudamentals of statistical signal processing - Detection theory.* Prentice-Hall, 1998.

[90] P. Rouquier, B. Gazengel, O. Richoux, G. Tournois et M. Bruneau. Étude par VLD d'un champ acoustique en champ libre : extraction des paramètres de la vitesse particulaire acoustique. In *8^e congrès francophone de vélocimétrie laser*, septembre 2002.

[91] P. Rouquier, B. Gazengel et O. Poggi. Mesure de vitesses particulaires acoustique par vélocimétrie laser Doppler en champ libre. In *5^e congrès français d'acoustique, Lausanne*, septembre 2000.

[92] P. Rouquier, B. Gazengel, O. Richoux, L. Simon, G. Tournois, and M. Bruneau. Acoustic particle velocities measurement by means of laser Doppler velocimetry: application to harmonic acoustic field in free space with weak flow. In *Forum Acusticum, Sevilla*, september 2002.

Annexe A

Calcul des bornes de Cramer-Rao

Dans cette annexe les expressions générales des bornes de Cramer-Rao (CRB) pour les estimées des paramètres de la vitesse acoustique, V_{ac}, ϕ_{ac} et V_{ec} sont développées. Les formes analytiques approchées de ces bornes sont aussi données et comparées aux valeurs exactes obtenues par une résolution numérique directe. Les CRB fixent la limite inférieure de la variance des paramètres estimés d'un signal à partir d'un modèle théorique. Leur connaissance permet donc de comparer les performances des estimateurs, supposés non-biaisés, mis en œuvre [69].

A.1 Description des signaux d'observation

Les signaux d'observation sont les versions numériques des signaux $y_1(t)$ et $y_2(t)$. Ces signaux correspondent à une translation en bande de base du signal Doppler à l'aide d'une démodulation en quadrature. Ils sont donnés par

$$y_1(k) = A(k)\cos\phi(k) + b_1(k) = s_1(k) + b_1(k) \tag{A.1}$$
$$y_2(k) = A(k)\sin\phi(k) + b_2(k) = s_2(k) + b_2(k) \tag{A.2}$$

avec

$$A(k) = K\exp\left\{-\left[\beta x(k)\right]^2\right\} \tag{A.3}$$
$$x(k) = V_{\text{ec}}kT_e + \frac{V_{\text{ac}}}{2\pi F_{\text{ac}}}\sin(2\pi f_{\text{ac}}k + \phi_{\text{ac}}) - V_{\text{ec}}t_0 \tag{A.4}$$
$$\phi(k) = 2\pi D x(k) + \phi_0 \tag{A.5}$$
$$f_{\text{ac}} = F_{\text{ac}}/F_e \tag{A.6}$$

et $b_1(k)$ et $b_2(k)$ deux bruits gaussiens, de moyennes nulles et de variances égales respectivement à σ_1^2 et à σ_2^2. Par la suite ces variances seront supposées égales, *i.e.* $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

A.2 Calcul des bornes de Cramer-Rao

A.2.1 Représentation vectorielle des signaux d'observation

Afin de simplifier les notations il est intéressant d'introduire les vecteurs à $T = N + 1$ éléments suivants :

$$\mathbf{y_1} = [y_1(k_1),\cdots,y_1(k_2)]^T \quad (A.7)$$
$$\mathbf{y_2} = [y_2(k_1),\cdots,y_2(k_2)]^T \quad (A.8)$$
$$\mathbf{s_1} = [s_1(k_1),\cdots,s_1(k_2)]^T \quad (A.9)$$
$$\mathbf{s_2} = [s_2(k_1),\cdots,s_2(k_2)]^T \quad (A.10)$$
$$\mathbf{b_1} = [b_1(k_1),\cdots,b_1(k_2)]^T \quad (A.11)$$
$$\mathbf{b_2} = [b_2(k_1),\cdots,b_2(k_2)]^T \quad (A.12)$$

où $.^T$ désigne l'opérateur de transposition des matrices et $k_2 - k_2 = N$. En notation vectorielle les signaux d'observation s'écrivent donc

$$\mathbf{y_1} = \mathbf{s_1} + \mathbf{b_1} \quad (A.13)$$
$$\mathbf{y_2} = \mathbf{s_2} + \mathbf{b_2}. \quad (A.14)$$

A.2.2 Regroupement des vecteurs d'observation

Les deux vecteurs représentant les signaux d'observation (équations (A.13) et (A.14)) sont regroupés pour ne former qu'un seul vecteur associant l'ensemble des informations nécessaires à la détermination des CRB :

$$\mathbf{y} = \left[\mathbf{y_1^T},\mathbf{y_2^T}\right]^T. \quad (A.15)$$

Le signal d'observation s'écrit alors de manière compacte

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{b} \quad (A.16)$$

avec

$$\mathbf{s} = \left[\mathbf{s_1^T},\mathbf{s_2^T}\right]^T, \quad (A.17)$$
$$\mathbf{b} = \left[\mathbf{b_1^T},\mathbf{b_2^T}\right]^T. \quad (A.18)$$

A.2.3 Vecteur des paramètres du signal d'observation

Ce vecteur regroupe les trois paramètres du signal Doppler à estimer :

$$\boldsymbol{\theta} = [V_{\mathrm{ac}},\phi_{\mathrm{ac}},V_{\mathrm{ec}}]^T = [\theta_1,\theta_2,\theta_3]^T \ . \quad (A.19)$$

A.2.4 Fonction de densité de probabilité (DdP) du signal d'observation

En supposant que les bruits d'observation $b_1(t)$ et $b_2(t)$ sont de nature gaussienne, additive et blanche la DdP des observations est donnée par

$$p(\mathbf{y_1};\boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=k_1}^{k=k_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_1(k) - s_1(k)]^2\right\}, \quad (A.20)$$
$$p(\mathbf{y_2};\boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=k_1}^{k=k_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_2(k) - s_2(k)]^2\right\}. \quad (A.21)$$

Comme $y_1(k)$ et $y_2(k)$ sont indépendants il vient

$$p(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{y_1};\boldsymbol{\theta}) \cdot p(\mathbf{y_2};\boldsymbol{\theta}) \tag{A.22}$$

d'où

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{k=k_1}^{k=k_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_1(k)-s_1(k)]^2\right\} \prod_{k=k_1}^{k=k_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_2(k)-s_2(k)]^2\right\} \\ &= \prod_{k=k_1}^{k=k_2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_1(k)-s_1(k)]^2 - \frac{1}{2\sigma^2}[y_2(k)-s_2(k)]^2\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N+1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k=k_2}\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\left[y_1(k)-s_1(k)\right]^2 - \frac{1}{\sigma^2}\left[y_2(k)-s_2(k)\right]^2\right\}\right). \end{aligned} \tag{A.23}$$

Or

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k=k_2}\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\left[y_1(k)-s_1(k)\right]^2 - \frac{1}{\sigma^2}\left[y_2(k)-s_2(k)\right]^2\right\} \\ = \; & \frac{1}{\sigma^2}\left[y_1(k_1)-s_1(k_1)\right]^2 + \cdots + \frac{1}{\sigma^2}\left[y_1(k_2)-s_1(k_2)\right]^2 \\ + \; & \frac{1}{\sigma^2}\left[y_2(k_1)-s_2(k_1)\right]^2 + \cdots + \frac{1}{\sigma^2}\left[y_2(k_2)-s_2(k_2)\right]^2 \\ = \; & \frac{1}{\sigma^2}\|\mathbf{y_1}-\mathbf{s_1}\|^2 + \frac{1}{\sigma^2}\|\mathbf{y_2}-\mathbf{s_2}\|^2. \end{aligned} \tag{A.24}$$

Dans cette dernière relation $\|\cdot\|$ désigne la norme sur $\mathbb{R}^{N+1}$, avec

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{k=k_1}^{k=k_2}\left[x(k)\right]^2. \tag{A.25}$$

La DdP du signal d'observation s'écrit alors de manière plus compacte

$$p(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{y_1}-\mathbf{s_1}\|^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{y_2}-\mathbf{s_2}\|^2\right\}. \tag{A.26}$$

A.2.5 Fonction de vraisemblance logarithmique

Elle est donnée par

$$\wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = \ln\left[p(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})\right] \tag{A.27}$$

d'où

$$\wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = -(N+1)\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{y_1}-\mathbf{s_1}\|^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{y_2}-\mathbf{s_2}\|^2. \tag{A.28}$$

A.2.6 Matrice de Fisher

La matrice donnant les CRB s'obtient en inversant la matrice d'information de Fisher (FIM) (matrice 3×3) définie par

$$[\mathrm{I}(\boldsymbol{\theta})]_{ij} = -E\left[\frac{\partial^2 \wedge(\mathbf{y};\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right] \tag{A.29}$$

avec $i = 1,2,3$ et $j = 1,2,3$.

Dérivées du premier ordre

La dérivée première de la fonction de vraisemblance par rapport à un paramètre θ_i donne

$$\frac{\partial \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i} = -\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\|\mathbf{y_1}-\mathbf{s_1}\|^2 + \|\mathbf{y_2}-\mathbf{s_2}\|^2\right). \tag{A.30}$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\|\mathbf{y_1}-\mathbf{s_1}\|^2 = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left\{\sum_{k=k_1}^{k=k_2}[y_1(k)-s_1(k)]^2\right\} \tag{A.31}$$

$$= \sum_{k=k_1}^{k=k_2}\left\{2[y_1(k)-s_1(k)]\times -\frac{\partial s_1(k)}{\partial\theta_i}\right\}. \tag{A.32}$$

En notant

$$\frac{\partial s_1(k)}{\partial\theta_i} = s'_{1\theta_i}(k) \tag{A.33}$$

on obtient

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\|\mathbf{y_1}-\mathbf{s_1}\|^2 = -2\sum_{k=k_1}^{k=k_2}\left\{[y_1(k)-s_1(k)]s'_{1\theta_i}(k)\right\} \tag{A.34}$$

$$= -2\sum_{k=k_1}^{k=k_2} b_1(k)s'_{1\theta_i}(k) \tag{A.35}$$

$$= -2\mathbf{b_1^T}\mathbf{s'_{1\theta_i}} \tag{A.36}$$

relation dans laquelle

$$\mathbf{s'_{1\theta_i}} = \frac{\partial\mathbf{s_1}}{\partial\theta_i} = [s'_{1\theta_i}(k_1),\ldots,s'_{1\theta_i}(k_2)]^T. \tag{A.37}$$

En procédant de la même façon pour le calcul de $\frac{\partial}{\partial\theta_i}\|\mathbf{y_2}-\mathbf{s_2}\|^2$ on obtient finalement

$$\frac{\partial \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{b_1^T}\mathbf{s'_{1\theta_i}} + \mathbf{b_2^T}\mathbf{s'_{2\theta_i}}\right). \tag{A.38}$$

Espérances des dérivées du second ordre

Les dérivées du deuxième ordre de la fonction de vraisemblance sont données par

$$\frac{\partial^2 \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i\partial\theta_j} = \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left[\frac{\partial \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\right] = \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\mathbf{b_1^T}\mathbf{s'_{1\theta_i}} + \mathbf{b_2^T}\mathbf{s'_{2\theta_i}}\right). \tag{A.39}$$

Dans cette relation

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left[\mathbf{b_1^T}\mathbf{s'_{1\theta_i}}\right] = \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left[\mathbf{s'^T_{1\theta_i}}\mathbf{b_1}\right] \tag{A.40}$$

$$= \frac{\partial\mathbf{s'^T_{1\theta_i}}}{\partial\theta_j}\mathbf{b_1} + \mathbf{s'^T_{1\theta_i}}\frac{\partial\mathbf{b_1}}{\partial\theta_j}. \tag{A.41}$$

Or

$$\frac{\partial \mathbf{b_1}}{\partial \theta_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left[\mathbf{y_1} - \mathbf{s_1}\right] = -\frac{\partial \mathbf{s_1}}{\partial \theta_j} = -\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{j}} \tag{A.42}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i \partial\theta_j} = \frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{\partial \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{i}}}{\partial\theta_j}\mathbf{b_1} - \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{i}}\ \mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{j}} + \frac{\partial \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{i}}}{\partial\theta_j}\mathbf{b_2} - \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{i}}\ \mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{j}}\right]. \tag{A.43}$$

L'espérance mathématique de l'équation (A.43) vaut alors

$$-\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right] = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{i}}\ \mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{j}} + \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{i}}\ \mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{j}}\right). \tag{A.44}$$

Par ailleurs il est possible de montrer que

$$-\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right] = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j \partial\theta_i}\right]. \tag{A.45}$$

La FIM est alors symétrique :

$$\mathbf{I}(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{1}}\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{1}} + \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{1}}\mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{1}} & \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{1}}\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{2}} + \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{1}}\mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{2}} & \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{1}}\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{3}} + \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{1}}\mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{3}} \\ \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{2}}\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{1}} + \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{2}}\mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{1}} & \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{2}}\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{2}} + \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{2}}\mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{2}} & \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{2}}\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{3}} + \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{2}}\mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{3}} \\ \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{3}}\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{1}} + \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{3}}\mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{1}} & \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{3}}\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{2}} + \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{3}}\mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{2}} & \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{3}}\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{3}} + \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{3}}\mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{3}} \end{bmatrix}. \tag{A.46}$$

Simplification des écritures

De nombreuses simplifications s'opèrent en cherchant à expliciter les différents *termes produit* $\mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{i}}\mathbf{s}'_{1\theta_\mathbf{j}}$ et $\mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{i}}\mathbf{s}'_{2\theta_\mathbf{j}}$ de la matrice (A.46) :

$$\mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{i}}\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{j}} = \sum_{k=k_1}^{k=k_2}\left(s'_{1\theta_i}s'_{1\theta_j}\right) = \sum_{k=k_1}^{k=k_2}\left[\frac{\partial s_1(k)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial s_1(k)}{\partial\theta_j}\right] \tag{A.47}$$

et

$$\mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{i}}\mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{j}} = \sum_{k=k_1}^{k=k_2}\left(s'_{2\theta_i}s'_{2\theta_j}\right) = \sum_{k=k_1}^{k=k_2}\left[\frac{\partial s_2(k)}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial s_2(k)}{\partial\theta_j}\right]. \tag{A.48}$$

Or

$$\frac{\partial s_1(k)}{\partial\theta_i} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left[A(k)\cdot\cos\phi(k)\right] = \frac{\partial A(k)}{\partial\theta_i}\cdot\cos\phi(k) + A(k)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left[\cos\phi(k)\right] \tag{A.49}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(k)}{\partial\theta_i} &= K\left\{-\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left[\beta x(k)\right]^2\right\}\ \exp\left\{-\left[\beta x(k)\right]^2\right\} && \text{(A.50)} \\ &= -2K\beta x(k)\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left[\beta x(k)\right]\ \exp\left\{-\left[\beta x(k)\right]^2\right\} && \text{(A.51)} \\ &= -2\beta^2 K x(k)\frac{\partial x(k)}{\partial\theta_i}\ \exp\left\{-\left[\beta x(k)\right]^2\right\} && \text{(A.52)} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left[\cos\phi(k)\right] = -\frac{\partial\phi(k)}{\partial\theta_i}\sin\phi(k) \tag{A.53}$$

$$= -2\pi D\frac{\partial x(k)}{\partial\theta_i}\sin\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right] \tag{A.54}$$

d'où

$$\frac{\partial s_1(k)}{\partial\theta_i} = -2K\frac{\partial x(k)}{\partial\theta_i}\exp\left\{-[\beta x(k)]^2\right\}\ \left\{\beta^2 x(k)\cos\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right]+\pi D\sin\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right]\right\}. \tag{A.55}$$

De la même façon

$$\frac{\partial s_2(k)}{\partial\theta_i} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left[A(k)\cdot\sin\phi(k)\right] = \frac{\partial A(k)}{\partial\theta_i}\cdot\sin\phi(k)+A(k)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left[\sin\phi(k)\right]. \tag{A.56}$$

Comme précédemment

$$\frac{\partial A(k)}{\partial\theta_i} = -2\beta^2 Kx(k)\frac{\partial x(k)}{\partial\theta_i}\ \exp\left\{-\left[\beta x(k)\right]^2\right\} \tag{A.57}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left[\sin\phi(k)\right] = \frac{\partial\phi(k)}{\partial\theta_i}\cos\phi(k) \tag{A.58}$$

$$= 2\pi D\frac{\partial x(k)}{\partial\theta_i}\cos\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right] \tag{A.59}$$

d'où

$$\frac{\partial s_2(k)}{\partial\theta_i} = -2K\frac{\partial x(k)}{\partial\theta_i}\exp\left\{-[\beta x(k)]^2\right\}\left\{\beta^2 x(k)\sin\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right]-\pi D\cos\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right]\right\}. \tag{A.60}$$

Afin de simplifier l'écriture des différentes expressions précédentes il est possible adopter les notations suivantes :

$$K\exp\left\{-[\beta x(k)]^2\right\} = A(k) \tag{A.61}$$

$$\beta^2 x(k)\cos\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right]+\pi D\sin\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right] = B_1(k) \tag{A.62}$$

$$\beta^2 x(k)\sin\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right]-\pi D\cos\left[2\pi Dx(k)+\phi_0\right] = B_2(k) \tag{A.63}$$

$$\frac{\partial x(k)}{\partial\theta_i} = x'_{\theta_i}(k). \tag{A.64}$$

En particulier, les dérivées de $x(k)$ par rapport aux différents paramètres sont données par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x(k)}{\partial\theta_1} &= \frac{\partial x(k)}{\partial V_{\mathrm{ac}}} = \frac{1}{2\pi F_{\mathrm{ac}}}\sin\left[2\pi f_{\mathrm{ac}}k+\phi_{\mathrm{ac}}\right]\\
\frac{\partial x(k)}{\partial\theta_2} &= \frac{\partial x(k)}{\partial\phi_{\mathrm{ac}}} = \frac{V_{\mathrm{ac}}}{2\pi F_{\mathrm{ac}}}\cos\left[2\pi f_{\mathrm{ac}}k+\phi_{\mathrm{ac}}\right]\\
\frac{\partial x(k)}{\partial\theta_3} &= \frac{\partial x(k)}{\partial V_{\mathrm{ec}}} = kT_e-t_0.
\end{aligned} \tag{A.65}$$

L'expression (A.55) peut se réécrire

$$\frac{\partial s_1(k)}{\partial \theta_i} = -2A(k)B_1(k)x'_{\theta_i}(k) \tag{A.66}$$

et

$$\frac{\partial s_2(k)}{\partial \theta_i} = -2A(k)B_2(k)x'_{\theta_i}(k) \tag{A.67}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{i}}\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{j}} &= \sum_{k=k_1}^{k=k_2} 4A^2(k)B_1^2(k)x'_{\theta_i}(k)x'_{\theta_j}(k) \\ \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{i}}\mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{j}} &= \sum_{k=k_1}^{k=k_2} 4A^2(k)B_2^2(k)x'_{\theta_i}(k)x'_{\theta_j}(k). \end{aligned} \tag{A.68}$$

Les éléments de la FIM s'écrivent alors

$$\begin{aligned} -E\left[\frac{\partial^2 \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right] &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{i}}\,\mathbf{s}'_{\mathbf{1}\theta_\mathbf{j}} + \mathbf{s}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{i}}\,\mathbf{s}'_{\mathbf{2}\theta_\mathbf{j}}\right) \\ &= \frac{4}{\sigma^2}\sum_{k=k_1}^{k=k_2} A^2(k)\left[B_1^2(k)+B_2^2(k)\right]x'_{\theta_i}(k)x'_{\theta_j}(k) \\ &= \frac{4}{\sigma^2}\sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_i}(k)x'_{\theta_j}(k) \end{aligned} \tag{A.69}$$

avec

$$C(k) = A^2(k)\left[B_1^2(k)+B_2^2(k)\right]. \tag{A.70}$$

La FIM devient alors

$$\mathbf{I}(\theta) = \frac{4}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'^2_{\theta_1}(k) & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_1}(k)x'_{\theta_2}(k) & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_1}(k)x'_{\theta_3}(k) \\ \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_2}(k)x'_{\theta_1}(k) & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'^2_{\theta_2}(k) & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_2}(k)x'_{\theta_3}(k) \\ \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_3}(k)x'_{\theta_1}(k) & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'_{\theta_3}(k)x'_{\theta_2}(k) & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k)x'^2_{\theta_3}(k) \end{bmatrix}. \tag{A.71}$$

A.3 Calcul approché des bornes de Cramer-Rao

A.3.1 Matrice de Fisher approchée

L'inversion de la FIM, permettant d'obtenir les bornes de Cramer-Rao sur les trois paramètres, s'avère très fastidieuse. Ce travail n'est d'ailleurs pas indispensable car il est possible, moyennant la prise en compte d'un certain nombre d'hypothèses, de simplifier la forme de $\mathbf{I}(\theta)$.

Dans un premier temps le terme $C(k)$ (équation (A.70)) peut s'écrire de manière plus compacte en constatant que

$$B_1^2 + B_2^2 = \beta^4 x^2(k) + (\pi D)^2. \tag{A.72}$$

Il vient alors

$$C(k) = A^2(k)\left[\beta^4 x^2(k) + (\pi D)^2\right] \quad (A.73)$$
$$= K^2 \exp\left\{-2\left[\beta x(k)\right]^2\right\}\left[\beta^4 x^2(k) + (\pi D)^2\right]. \quad (A.74)$$

Cette dernière expression montre que $C(k)$ est constitué par la somme de deux termes. Or, sur des distances du même ordre de grandeur que les dimensions du volume de mesure (de l'ordre de 0,1 mm), il est possible de vérifier que

$$\beta^4 x^2(k) \ll (\pi D)^2. \quad (A.75)$$

Ce cas de figure correspond à la présence d'une particule dans le volume de mesure ($x(k)$ <0,1 mm) et donc à l'existence d'un signal rétrodiffusé. À titre d'exemple, pour un déplacement $x(k)$ de l'ordre de 0,1 mm $\beta^4 x^2(k) \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}$ alors que $(\pi D)^2 \approx 6{,}4 \cdot 10^{+25}$). D'où

$$C(k) = A^2(k)(\pi D)^2 = (\pi D K)^2 \exp\left\{-2\left[\beta x(k)\right]^2\right\}. \quad (A.76)$$

Par ailleurs les valeurs absolues des termes diagonaux de la FIM sont très importantes par rapport aux autres valeurs de la matrice, *i.e.*

$$E\left[\frac{\partial^2 \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right]_{i\neq j} \ll E\left[\frac{\partial^2 \wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i^2}\right]. \quad (A.77)$$

La FIM approchée est alors une matrice diagonale

$$\mathbf{I}(\theta) \approx \frac{4}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k) x'^2_{\theta_1}(k) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k) x'^2_{\theta_2}(k) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k) x'^2_{\theta_3}(k) \end{bmatrix} \quad (A.78)$$

dont l'inversion est immédiate. Les expressions des CRB, correspondant aux éléments $[\mathbf{I}^{-1}(\theta)]_{ii}$ de la diagonale de $\mathbf{I}^{-1}(\theta)$, sont alors données par :

$$\mathrm{CRB}(\theta_i) = [\mathbf{I}^{-1}(\theta)]_{ii} = \frac{\sigma^2}{4}\left[\sum_{k=k_1}^{k=k_2} C(k) x'^2_{\theta_i}(k)\right]^{-1}. \quad (A.79)$$

A.3.2 Formes analytiques approchées des bornes de Cramer-Rao pour la vitesse acoustique : CRB(θ_1)

Dans l'hypothèse où le signal Doppler est acquis de manière symétrique autour de t_0 et en choisissant $t_0 = 0$ les CRB décrites par (A.79) deviennent

$$\mathrm{CRB}(\theta_i) = \frac{\sigma^2}{4}\left[\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} C(k) x'^2_{\theta_i}(k)\right]^{-1}. \quad (A.80)$$

La CRB pour l'amplitude de la vitesse acoustique $V_{\rm ac}$ est alors donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{CRB}(\theta_1) &= \frac{\sigma^2}{4}\left[\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} C(k)x'^2_{\theta_1}(k)\right]^{-1} \\ &= \frac{\sigma^2}{4}\left[\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} (\pi DGK)^2 \exp\left\{-2\left[\beta x(k)\right]^2\right\} \frac{1}{2(2\pi F_{\rm ac})^2}\left\{1-\cos 2\left[2\pi f_{\rm ac}k+\phi_{\rm ac}\right]\right\}\right]^{-1} \\ &= \frac{2\sigma^2 F_{\rm ac}^2}{D^2K^2}\left[\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \exp\left\{-2\left[\beta x(k)\right]^2\right\}\left\{1-\cos 2\left[2\pi f_{\rm ac}k+\phi_{\rm ac}\right]\right\}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{A.81}$$

En prenant suffisamment d'échantillons (N grand) on peut considérer que

$$\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \exp\left\{-2\left[\beta x(k)\right]^2\right\}\left\{1-\cos 2\left[2\pi f_{\rm ac}k+\phi_{\rm ac}\right]\right\} \approx \sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \exp\left\{-2\left[\beta x(k)\right]^2\right\}. \tag{A.82}$$

Lorsque le nombre d'échantillons pris en compte est suffisamment élevé la somme (A.82) converge. En effet

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \exp\left\{-2\left[\beta x(k)\right]^2\right\} = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \exp\left\{-2\left[\beta V_{\rm ec}(kT_e-t_0)\right]^2\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\beta V_{\rm ec}T_e} \tag{A.83}$$

d'où

$$\mathrm{CRB}(\theta_1) = \mathrm{CRB}(V_{\rm ac}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\beta T_e}{D^2}\,F_{\rm ac}^2 V_{\rm ec}\,\frac{2\sigma^2}{K^2}. \tag{A.84}$$

Le terme $\dfrac{K^2}{2\sigma^2}$ s'identifie au rapport signal à bruit d'où :

$$\frac{2\sigma^2}{K^2} = \mathrm{RSB}^{-1}. \tag{A.85}$$

L'équation (A.84) peut alors s'écrire

$$\mathrm{CRB}(\theta_1) = \mathrm{CRB}(V_{\rm ac}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\beta T_e}{D^2}\,F_{\rm ac}^2 V_{\rm ec}\,\frac{1}{\mathrm{RSB}}. \tag{A.86}$$

A.3.3 Formes analytiques approchées des bornes de Cramer-Rao pour la phase acoustique : CRB(θ_2)

La CRB pour la phase acoustique $\phi_{\rm ac}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{CRB}(\theta_2) &= \frac{\sigma^2}{4}\left[\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} C(k)x'^2_{\theta_2}(k)\right]^{-1} \\ &= \frac{\sigma^2}{4}\left[\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} (\pi DK)^2 \exp\left\{-2\left[\beta x(k)\right]^2\right\} \frac{V_{\rm ac}}{2(2\pi F_{\rm ac})^2}\left\{1-\cos 2\left[2\pi f_{\rm ac}k+\phi_{\rm ac}\right]\right\}\right]^{-1} \\ &= \frac{2\sigma^2 F_{\rm ac}^2}{D^2K^2V_{\rm ac}^2}\left[\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \exp\left\{-2\left[\beta x(k)\right]^2\right\}\left\{1-\cos 2\left[2\pi f_{\rm ac}k+\phi_{\rm ac}\right]\right\}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{A.87}$$

En considérant toujours que le nombre d'échantillons pris en compte est important et de la même façon que précédemment il est toujours possible d'écrire

$$\mathrm{CRB}(\theta_2) = \mathrm{CRB}(\phi_{\mathrm{ac}}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\beta T_e}{D^2}\ \frac{F_{\mathrm{ac}}^2 V_{\mathrm{ec}}}{V_{\mathrm{ac}}^2}\ \frac{1}{\mathrm{RSB}}. \tag{A.88}$$

A.3.4 Formes analytiques approchées des bornes de Cramer-Rao pour la vitesse d'écoulement : CRB(θ_3)

La CRB pour la vitesse d'écoulement V_{ec} est donnée par

$$\mathrm{CRB}(\theta_3) = \frac{\sigma^2}{4}\left[\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} C(k) x_{\theta_2}^{\prime 2}(k)\right]^{-1} \tag{A.89}$$

$$= \frac{\sigma^2}{4}\left[\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} (\pi D K)^2 \exp\left\{-2\left[\beta x(k)\right]^2\right\} \times (kT_e - t_0)^2\right]^{-1}. \tag{A.90}$$

Comme $t_0 = 0$ il est possible d'écrire

$$\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \exp\left\{-2\left[\beta x(k)\right]^2\right\}\ (kT_e - t_0)^2 \tag{A.91}$$

$$= \sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \exp\left\{-2\beta^2\left[V_{\mathrm{ec}} k T_e + \frac{V_{\mathrm{ac}}}{2\pi F_{\mathrm{ac}}}\sin(2\pi f_{\mathrm{ac}} k + \phi_{\mathrm{ac}})\right]^2\right\}(kT_e)^2$$

$$\approx \sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \exp\left\{-2\left[\beta V_{\mathrm{ec}} k T_e\right]^2\right\}\ (kT_e)^2. \tag{A.92}$$

Par ailleurs

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} \exp\left\{-2\left[\beta V_{\mathrm{ec}} k T_e\right]^2\right\}\ (kT_e)^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \frac{1}{T_e}\ \frac{1}{(\beta V_{\mathrm{ec}})^3}. \tag{A.93}$$

d'où

$$\mathrm{CRB}(\theta_3) = \mathrm{CRB}(V_{\mathrm{ec}}) = \frac{1}{2\pi^2}\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\beta^3 T_e}{D^2}\ V_{\mathrm{ec}}^3\ \frac{1}{\mathrm{RSB}}. \tag{A.94}$$

A.3.5 Expressions des bornes de Cramer-Rao en dB

Il peut être avantageux d'exprimer les CRB en dB. D'où

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{dB}}(\theta_1) = 10\log_{10}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\beta T_e}{D^2}\ F_{\mathrm{ac}}^2 V_{\mathrm{ec}}\right] - \mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}} \tag{A.95}$$

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{dB}}(\theta_2) = 10\log_{10}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\beta T_e}{D^2}\ \frac{F_{\mathrm{ac}}^2 V_{\mathrm{ec}}}{V_{\mathrm{ac}}^2}\right] - \mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}} \tag{A.96}$$

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{dB}}(\theta_3) = 10\log_{10}\left[\frac{1}{2\pi^2}\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\beta^3 T_e}{D^2}\ V_{\mathrm{ec}}^3\right] - \mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}} \tag{A.97}$$

avec $\mathrm{RSB}_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}[\mathrm{RSB}]$.

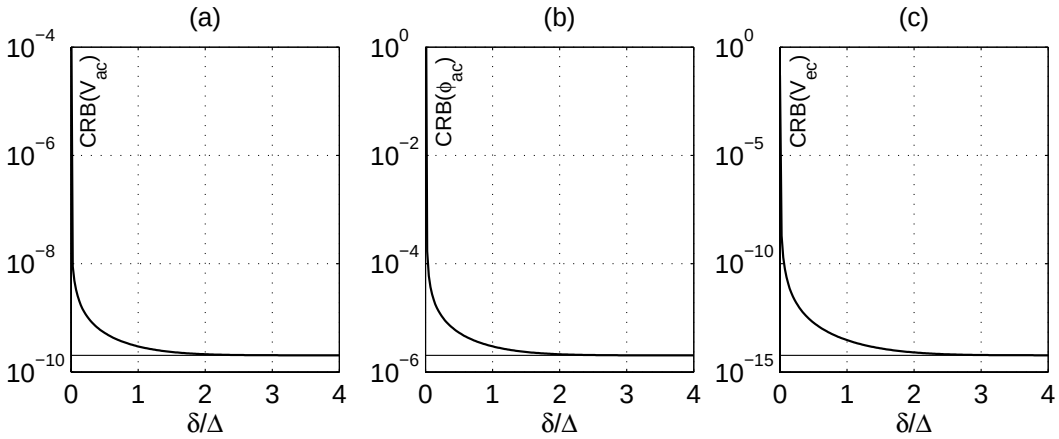

FIG. A.1 – *Évolution des CRB(V_{ac})* (a), CRB*(ϕ_{ac})* (b) *et* CRB*(V_{ec})* (c), *en fonction de la durée du signal Doppler (correspondant au nombre d'échantillons retenus) (trait gras) et comparaison aux CRB approchées (trait fin).*

A.4 Comparaison des bornes de Cramer-Rao réelles et approchées

La figure A.1 montre, pour un rapport signal sur bruit égal à l'unité (RSB $= 1$, $\mathrm{RSB}_{dB} = 0$ dB), l'évolution des véritables CRB en fonction du nombre d'échantillons retenus exprimé à partir du rapport entre la durée de l'analyse δ et la largeur du signal Doppler Δ. Ces deux grandeurs sont définies au paragraphe 3.3.4. L'examen de ces figures indique que les formes analytiques approchées des CRB, pour chacun des paramètres de la vitesse acoustique, constituent des approximations très précises des valeurs réelles dès lors que le nombre de point N est suffisamment important ce qui correspond à un rapport $\delta/\Delta > 2$. Quelques mesures ont permis de constater que pour l'ensemble de la gamme de mesure, *i.e.* pour $F_{ac} \in$ [100 Hz,500 Hz] et $V_{ac} \in$ [0,1 mm/s,20 mm/s], les écarts relatifs entre les CRB réelles et approchées sont à peu près constants et de l'ordre de 1,1 ‰ pour CRB(ϕ_{ac}) et 3,2 ‰ pour CRB(V_{ec}). En ce qui concerne CRB(V_{ac}) cet écart est très faible (de l'ordre de 1 ‰) tant que le déplacement particulaire $X_{ac} = V_{ac}/(2\pi F_{ac})$ reste inférieur à 0,0032 mm. Au delà de ce seuil les écarts relatifs ont tendance à augmenter sensiblement jusqu'à atteindre une valeur de 44% pour X_{ac} proche de 0,038 mm ($F_{ac} = 100$ Hz, $F_{ac} = 20$ mm/s), ce dernier cas de figure correspondant à une situation limite dans la pratique.

Annexe B

Article présenté au congrès IMtc'2001

Cette annexe présente dans son intégralité l'article publié dans les actes du colloque IMtc'2001 (IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference) [65]. Ce travail expose le principe de l'estimation des paramètres de la vitesse acoustique par le biais d'une boucle à verrouillage de phase (PLL) analogique associée à un démodulateur en quadrature synchrone.

IEEE Instrumentation and Measurement
Technology Conference
Budapest, Hungary, May 21–23, 2001

Real-Time Acoustic Velocity Measurement in the Air by Means of Laser Doppler Velocimetry

A. Le Duff
École Supérieure d'Électronique de l'Ouest
4, Rue Merlet de la Boulaye, 49009 Angers CEDEX 01, France
Phone: 33 2 41 86 67 12, Email: alain.le_duff@eseo.fr

S. Poggi[1]
Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, CNRS-UMR 6613
Av. O. Messiaen, 72085 Le Mans CEDEX 09, France

G. Plantier
École Supérieure d'Électronique de l'Ouest
4, Rue Merlet de la Boulaye, 49009 Angers CEDEX 01, France
Phone: 33 2 41 86 67 06, Email: guy.plantier@eseo.fr

J. C. Valière
Laboratoire d'Études Aérodynamiques, CNRS UMR 6609
Université de Poitiers, 86022 Poitiers, France
Phone: 33 5 49 45 33 59, Email: jean-christophe.valiere@lea.univ-poitiers.fr

Abstract *– A technique based on the use of an analog phase-locked loop and a quadrature demodulation to estimate particle velocity and convection velocity in an acoustic field in the air excited with a sine wave forced source is presented. This method turns to be well suitable for real-time measurement of acoustic signals with low modulation level. A* SIMULINK® *program has been written in order to validate the method. At last, the performance of the estimator is illustrated by Monte-Carlo simulations obtained from synthesized Doppler signals.*

Keywords *– Laser Doppler Velocimetry, Phase-Locked Loop, Quadrature Demodulation, Acoustic Particle Velocity, Analog Signal Processing, Real-time Measurement.*

I. INTRODUCTION

Laser Doppler Velocimetry (LDV) is a technique allowing punctual measurement of velocity in a fluid; its principle is based on laser interferometry. The use of such a tool could be especially interesting to characterize a complex acoustic field, described as a spatial distribution of pressure and particle velocity. Indeed the knowledge of a vector quantity like velocity may give more information than the one of a scalar quantity such as pressure. In addition LDV allows theoretically non-invasive velocity measurements with an excellent spatial resolution and it has a linear response. However, although LDV has been widely used in fluid mechanics for many years, this technique is not common in acoustics yet because of the specificity of the acoustic velocity (low levels, high frequencies) [1]. For acoustic velocity measurements using LDV, signal processing approach is often based on post-processing numerical methods such as the Short-Time-Fourier-Transform (STFT), the cross-Wigner-Ville detector (CWV) or the least-square [1], [2]. In order to design more integrated a set-up, easy to manipulate and providing real-time measurement of acoustic velocity, the implementation of an analog signal processing may be suitable.

In this paper the authors propose to combine an analog Phase-Locked Loop (PLL) and a Quadrature Demodulation (QD) to estimate the amplitude and the phase of the acoustic particle velocity and the convection velocity for a sine-wave excitation of the acoustic field. If such a technique is already widely used in vibrometry [3], [4], [5] where the acquired signal may be considered as stationary, on the other hand it has not been studied in detail in acoustics where the amplitude of the signal is time-varying.

The paper is organized as follows: in section II the basic theorical framework of laser Doppler velocimetry in acoustics is presented and the experimental set-up is described. In section III a model for the Doppler signal is proposed. Section IV deals with the acoustic velocity estimation. The PLL method

[1] Current address: Société ALCTRA, 60 Boulevard Henri Barbusse, 93100 Montreuil, France. Phone: 33 1 42 87 04 69, Email: sylvain.poggi@alctra.fr.

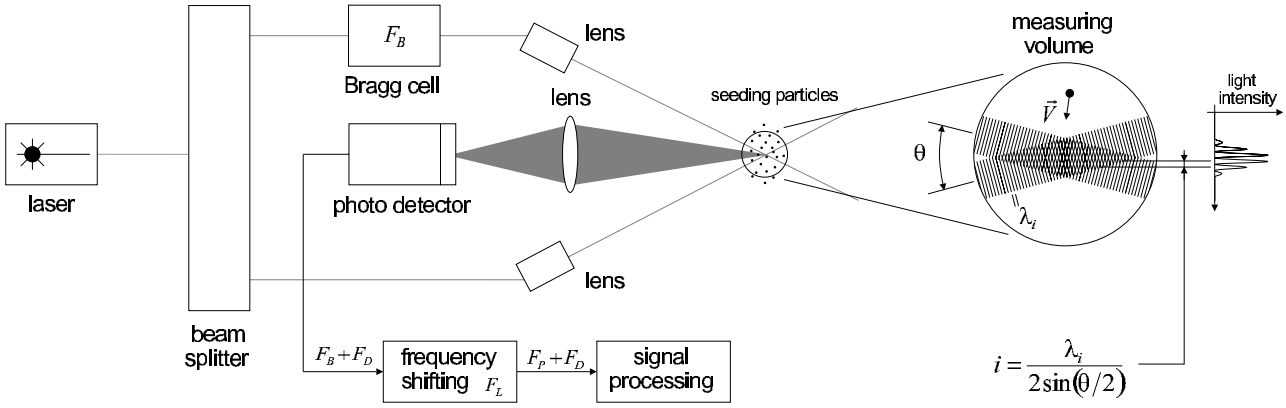

Fig. 1. *Description of the LDV system.*

combined with a QD is then discussed. Finally, in section V, numerical examples illustrate the performance of the method, and a statistical analysis of the estimations by means of Monte-Carlo simulations is given.

II. PRINCIPLE OF LDV IN ACOUSTICS

The principle of LDV is described in Fig. 1. Two laser beams, crossed and focused, define a measuring volume in which an interference pattern, made of bright and dark fringes, appears. The spacing between two adjacent bright fringes, i, depends on the wavelength of the laser light, λ_i, and on the angle between the two incident beams, θ:

$$i = \frac{\lambda_i}{2\sin(\theta/2)}. \tag{1}$$

The quantity $D = 1/i$ represents the sensitivity of the set-up. A seeding particle scatters light while crossing this volume. This light is detected by a photo-detector and its intensity is modulated with a frequency, usually called Doppler frequency, equal to

$$F_D = \frac{v}{i} = vD = v\frac{2\sin(\theta/2)}{\lambda_i}, \tag{2}$$

where v is the component of the velocity $\vec{V}$ perpendicular to the fringes. In order to avoid ambiguity on velocity sign, the interference fringes are shifted by means of a Bragg cell working at $F_B = 40$ MHz. Thus motionless particles inside the measuring volume lead to a signal frequency equal to 40 MHz, while particles with time-invariant velocity lead to signal frequencies up or down 40 MHz depending on the direction of their movement. For the convenience of the signal processing unit, the signal is mixed with a F_L frequency in order to be down-shifted around the carrier frequency $F_p = F_B - F_L =$ 93 kHz. So an estimation of F_D allows an estimation of the acoustic velocity.

III. SIGNAL MODEL

The velocity of a particle q, for a sine wave excitation, can be modeled as

$$v_q = v_{c,q} + V_{ac}\cos(2\pi F_{ac}t + \phi_{ac}), \tag{3}$$

where F_{ac} is the acoustic frequency, assumed to be known, V_{ac} and ϕ_{ac}, the amplitude and the phase of acoustic velocity and $v_{c,q}$ the convection velocity stated small with respect to V_{ac} [2], [6] and supposed constant. Let's state that only one particle is present in the measuring volume. Then the electrical signal, called *Doppler signal*, delivered by the photo-detector is

$$\begin{aligned} s_q(t) &= A(t)\{M + \cos[2\pi(F_p + F_D)t]\} \\ &= A(t)\{M + \cos[2\pi F_p t + 2\pi D x_q(t)]\}. \end{aligned} \tag{4}$$

In this equation $A(t)$ and $x_q(t)$ represent respectively the magnitude and the position of the particle q at the instant t with

$$A(t) = K_q e^{-\{\beta_q x_q(t)\}^2} \tag{5}$$

and

$$x_q(t) = v_{c,q}(t - t_q) + \frac{V_{ac}}{2\pi F_{ac}}\sin(2\pi F_{ac}t + \phi_{ac}). \tag{6}$$

In (5), K_q is the maximum amplitude of the Doppler signal, and $1/\beta_q$ defines the width of the measuring volume. The argument of the cosine component of $s_q(t)$ may be denoted as $\phi(t)$ so

$$\phi(t) = 2\pi F_p t + 2\pi D x_q(t). \tag{7}$$

In (4), the constant M is due to the difference between the intensities of both beams. This offset, weighted by the Gaussian shape $A(t)$, is called *burst pedestal*. Moreover it may be emphasized that the temporal support of the signal, and therefore the duration of the burst, depends on the seeding particle's velocity. Thus the Doppler signal is roughly a sine-wave frequency modulation (FM) of a carrier F_p with a time-varying

amplitude. The frequency of the Doppler signal is then given by

$$F_e = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt} = F_p + Dv_{c,q} + DV_{ac}\cos(2\pi F_{ac}t + \phi_{ac}). \quad (8)$$

As an example, Fig. 2 shows a real Doppler signal in the case

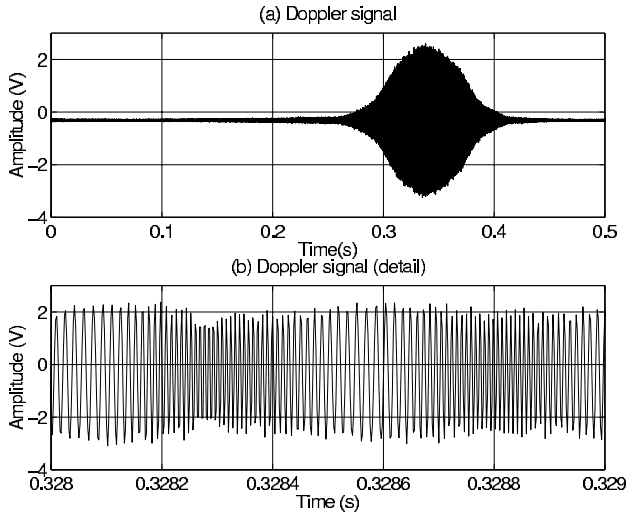

Fig. 2. *Time representation of an experimental Doppler signal* (a) *and detail* (b) *showing the frequency modulation* ($F_{ac} = 1000$ Hz, $V_{ac_{eff}} = 20$ mm/s).

of a 1000 Hz sine-wave excitation and a 20 mm/s acoustic velocity. The offset component M has been eliminated by means of a high-pass filter and the signal-to-noise ratio (SNR) is about 38 dB. The SNR is defined as

$$\text{SNR} = 10\log_{10}\left(\frac{K_q^2}{2\sigma^2}\right) \quad (9)$$

where σ^2 is the variance of a zero-mean independent additive Gaussian noise. In Fig. 2 (b) the frequency modulation clearly appears as well as the amplitude modulation which is correlated with the acoustic excitation.

The purpose of signal processing is then to extract V_{ac}, ϕ_{ac} and $v_{c,q}$ from the measured signal $s_q(t)$ using an analog FM demodulation technique. Such a detection scheme is discussed further below.

IV. ACOUSTIC VELOCITY MEASUREMENT

The velocity estimation is based on three stages as shown in Fig. 3:

1. An automatic gain control (AGC) device uses the low-frequency component, $MA(t)$, obtained by low-pass filtering, in order to divide the high-pass component of the Doppler signal, $A(t)\cos[2\pi F_p t + 2\pi D x_q(t)]$, thanks to an analog divider. This operation compensates for magnitude variations of the Doppler signal and then allows to widen the capture range of the PLL.
2. The PLL operates by producing an oscillator frequency to track the input signal frequency $F_e = F_p + Dv_q$. When the loop is locked, any slight change in F_e appears as a phase shift between the received signal frequency and the internal voltage control oscillator (VCO) frequency. This phase difference acts as an error signal and forces, after being filtered by a time-invariant linear low-pass filter, the VCO frequency to match F_e. The signal at the filter output represents then the change rate of the instantaneous phase of the Doppler signal corresponding to the FM law (*i.e* the acoustic velocity). It is therefore a direct real-time measurement of the acoustic velocity v_q. For detailed introduction to the principles of the PLL refer to [7], [8], [9], [10], [11].
3. A quadrature demodulation (QD) system, with a F_{ac} synchronized reference signal, allows to extract the acoustic parameters V_{ac} and ϕ_{ac}. The generation of a quadrature signal pair (sine/cosine) is achieved by an electrical phase shifter on the reference signal with a constant frequency F_{ac}. The demodulated signal is then mixed with these reference signals to form the low-pass filtered components $V_{cos} = V_{ac}\cos\phi_{ac}$ and $V_{sin} = V_{ac}\sin\phi_{ac}$. The parameters V_{ac} and ϕ_{ac} are then determined by performing a pythagoras-to-polar transformation:

$$V_{ac} = \sqrt{V_{cos}^2 + V_{sin}^2}\,;\, \phi_{ac} = \arctan\left(\frac{V_{sin}}{V_{cos}}\right).$$

Finally the convection velocity, $v_{c,q}$, is estimated using a low-pass filter.

It must be noted that the estimated parameters are validated thanks to a detector. This set-up, based on the use of a trigger, compares the pedestal to a threshold in order to state whether a particle is present in the measuring volume.

V. RESULTS

A SIMULINK® program has been written in order to simulate the behavior of the analog signal processing device proposed in Fig. 3. For example, Fig. 4 presents the result of a demodulation, obtained from a synthesized Doppler signal ($F_{ac} =$ 1000 Hz, V_{ac} = 10 mm/s, ϕ_{ac} = 86°, $v_{c,q}$ = 1.2 mm/s). The performance of the estimator was studied by means of Monte Carlo simulations: the validity of the estimator was then tested by comparing the measured amplitude, phase and convection velocity with the predicted ones at various frequencies (500 Hz, 1000 Hz, 2000 Hz, 4000 Hz, 5000 Hz) and for several velocities (0.05 mm/s, 0.1 mm/s, 0.5 mm/s, 1 mm/s, 5 mm/s, 10 mm/s, 12 mm/s, 20 mm/s). These values correspond to most applications in the field of audible acoustics. The SNR of the Doppler signal was 33 dB. The results, which are shown in Fig. 5, Fig. 6 and Fig. 7 indicate that accuracy is better than

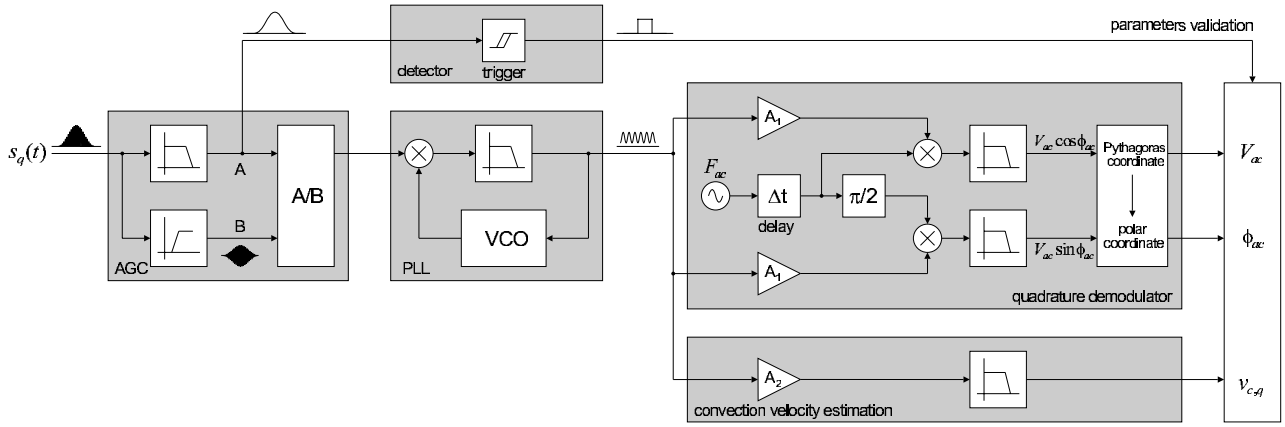

Fig. 3. *Block diagram of the acoustic parameters estimation technique.*

1.2%, 1° and 1% respectively for amplitude, phase and convection velocity measurements, in the 500-4000 Hz frequency range and velocities lying between 10 mm/s and to 0.1 mm/s. These results are equivalent to those obtained with a classical estimation scheme (instantaneous frequency tracking algorithm) [6]. Outside this range errors become considerable, particulary for large values of V_{ac}. In that case, corresponding to large particle displacements, the frequency variations, DV_{ac}, are too important to keep the PLL in linear working order. Moreover Poggi [2] underlines the difficulty to estimate acoustic velocity for modulation levels m ($m = \frac{DV_{ac}}{F_{ac}}$) lower than 0.10 with classical techniques already tested (Fourier Transform and Wigner-Ville). The signal processing approach discussed here is able to estimate, with good accuracy, acoustic parameters for modulation levels up to 0.025.

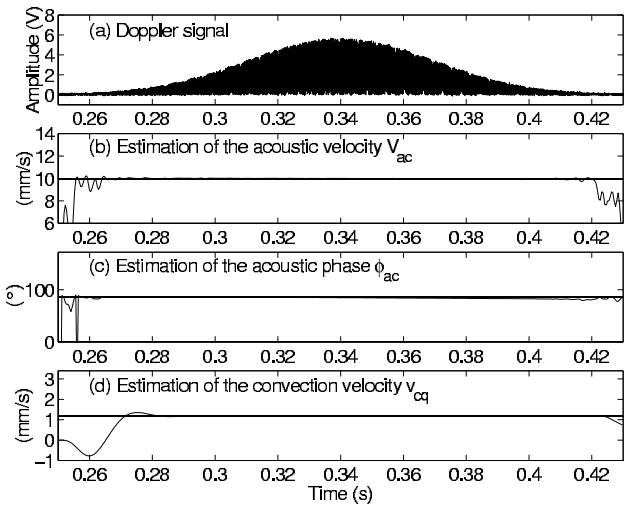

Fig. 4. *Estimation of amplitude* (b)*, phase* (c) *and convection velocity* (d) *of the acoustic velocity.*

VI. CONCLUSIONS

This work has proved the ability of a PLL and QD based system to perform acoustic velocity measurements with a good accuracy. This technique turns to be well suitable for real-time measurement of acoustic signals with low modulation levels and may be used in order to design a low-cost miniature laser Doppler sensor. Moreover the use of an analog demodulation for the Doppler signal allows direct operation at $F_B = 40$ MHz. Now an electronic device is under design for experimental validation of the method.

References

[1] J.C. VALIÈRE, P. HERZOG, V. VALEAU, and G. TOURNOIS, "Acoustic velocity measurements in the air by means of laser doppler velocimetry : dynamic and frequency range limitations and signal processing improvements," *Journal of Sound and Vibration*, 1999.

[2] V. VALEAU, *Mesure de la vitesse acoustique particulaire par anémométrie laser doppler : estimation de fréquences instantanée à variation sinusoïdale, validation de la mesure*, Thèse de doctorat, Université du Maine, 1999.

[3] D. LEE, Y. BERTHELOT, and J. JARZYNSKI, "A laser probe for measurements of in-plane structural vibrations," in *CETIM - International congress on intensity techniques*, 1990, pp. 181–188.

[4] P.M. GOGGANS and C.R. SMITH, "Signal processing of laser-doppler vibrometer output for mine detection," in *Part of the SPIE Conference on Detection and Remediation Technologies for Mines and Minelike Target IV*, 1999, pp. 1429–1437.

[5] A. MELLING F. DURST and J.H. WHITELAW, *Principles and practice of laser-Doppler anemometry*, Academic Press, 1976.

[6] S. POGGI, *Contribution au développement d'un banc de mesure de la vitesse particulaire acoustique par vélocimétrie laser doppler (VLD) : évaluation des résultats et applications*, Thèse de doctorat, Université du Maine, 2000.

[7] HOROWITZ and HILL, *The art of Electronics*, Cambridge University Press, 1980.

[8] L. W. COUCH II, *Digital and analog communication systems*, Macmillan, 1993.

[9] M. SCHWARTZ, *Information, transmission, modulation and noise*, McGraw-Hill, 1990.

[10] A. BLANCHARD, "Techniques des boucles d'asservissement de phase," Tech. Rep., École Supérieure d'Électricité, 1975.

[11] Philips Semiconductors, *An overview of the phase-locked loop (PLL)*, 1988.

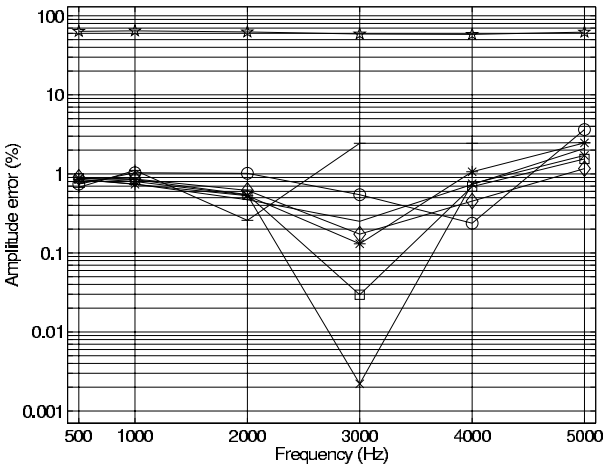

Fig. 5. *Estimation performance for acoustic velocity amplitude* (+ – – 0.05 mm/s, ○– 0.1 mm/s, ∗ · · · 0.5 mm/s, • – · 1 mm/s, × – – 5 mm/s, □– 10 mm/s, ◇ · · · 11 mm/s, ⋆ – · 20 mm/s).

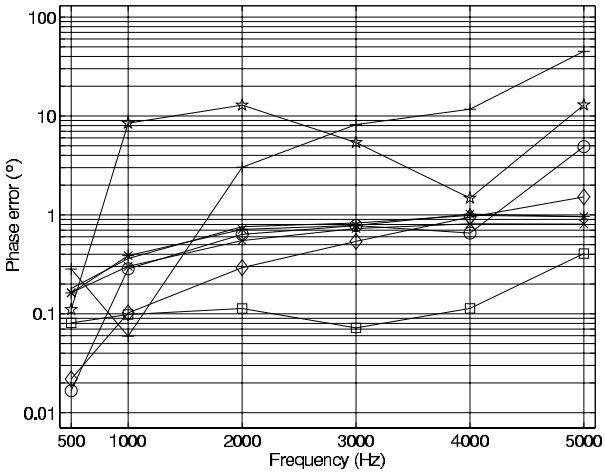

Fig. 6. *Estimation performance for acoustic velocity phase* (+ – – 0.05 mm/s, ○– 0.1 mm/s, ∗ · · · 0.5 mm/s, • – · 1 mm/s, × – – 5 mm/s, □– 10 mm/s, ◇ · · · 11 mm/s, ⋆ – · 20 mm/s).

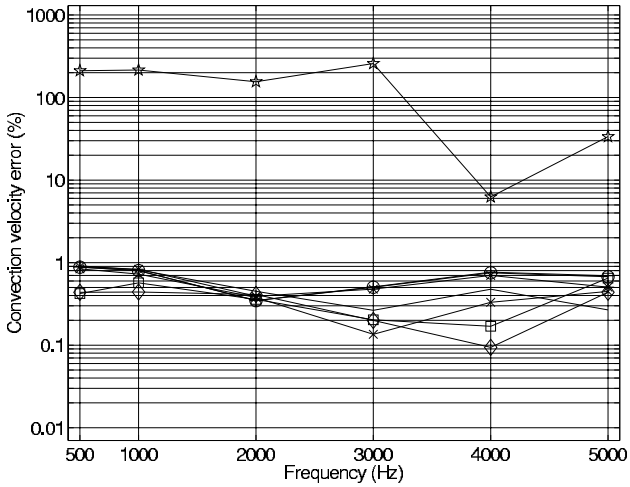

Fig. 7. *Estimation performance for convection velocity* (+ – – 0.05 mm/s, ○– 0.1 mm/s, ∗ · · · 0.5 mm/s, • – · 1 mm/s, × – – 5 mm/s, □– 10 mm/s, ◇ · · · 11 mm/s, ⋆ – · 20 mm/s).

Annexe C

Performances des estimateurs

Cette annexe présente l'ensemble des résultats de mesure du biais et de la variance des estimateurs PDBE, MLE et EKF, obtenus par simulation de Monte-Carlo.

C.1 Biais des estimateurs

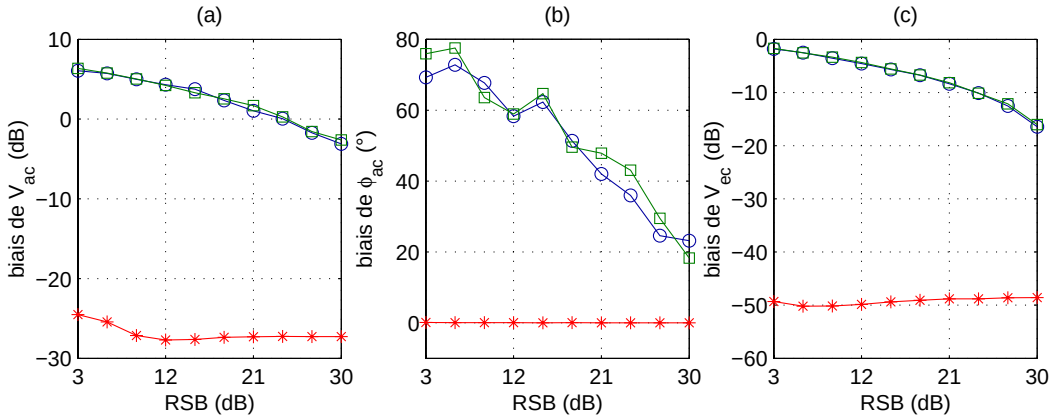

FIG. C.1 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 100$ Hz, $V_{ac} = 0{,}1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

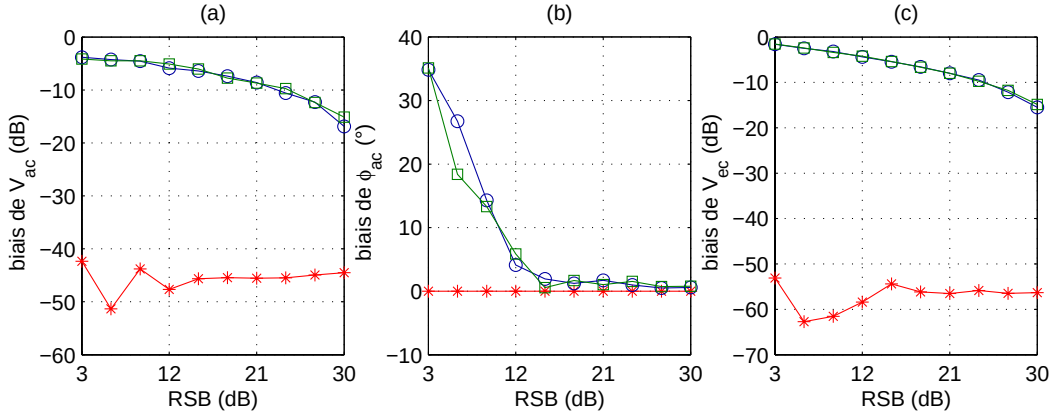

FIG. C.2 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 100$ Hz, $V_{ac} = 1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

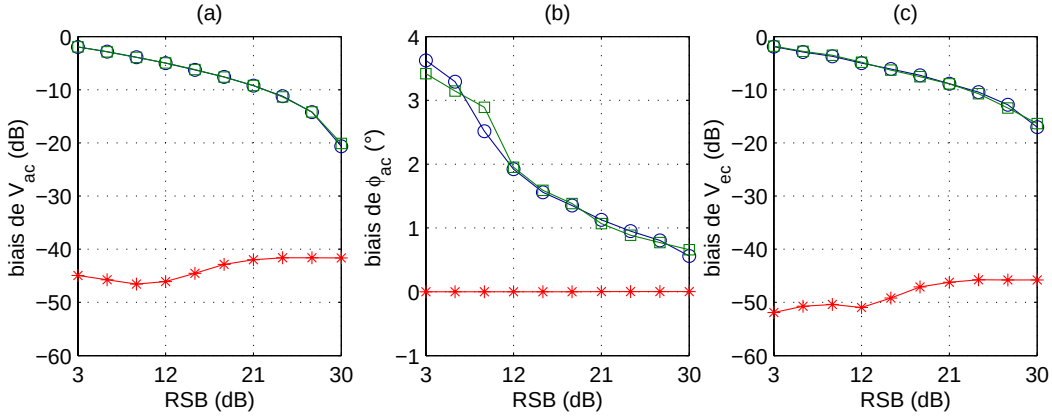

FIG. C.3 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 100$ Hz, $V_{ac} = 10$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

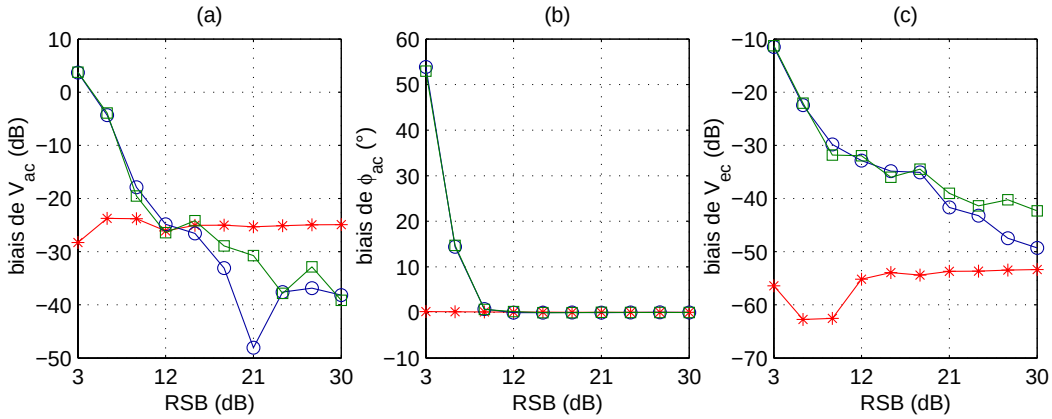

FIG. C.4 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 500$ Hz, $V_{ac} = 0{,}1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

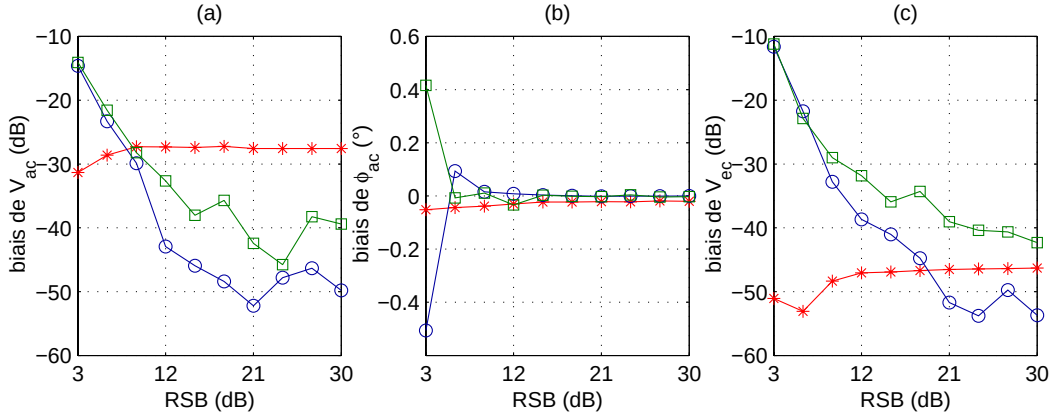

FIG. C.5 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 500$ Hz, $V_{ac} = 1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

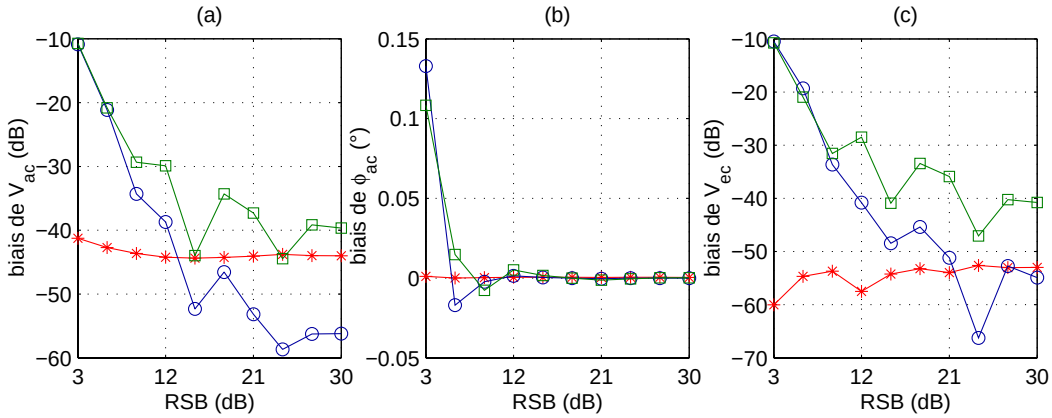

FIG. C.6 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 500$ Hz, $V_{ac} = 10$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

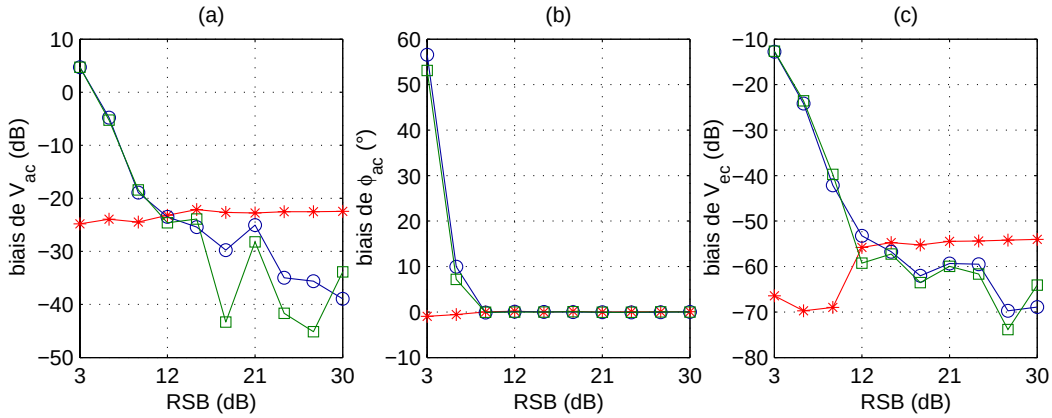

FIG. C.7 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 1000$ Hz, $V_{ac} = 0{,}1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

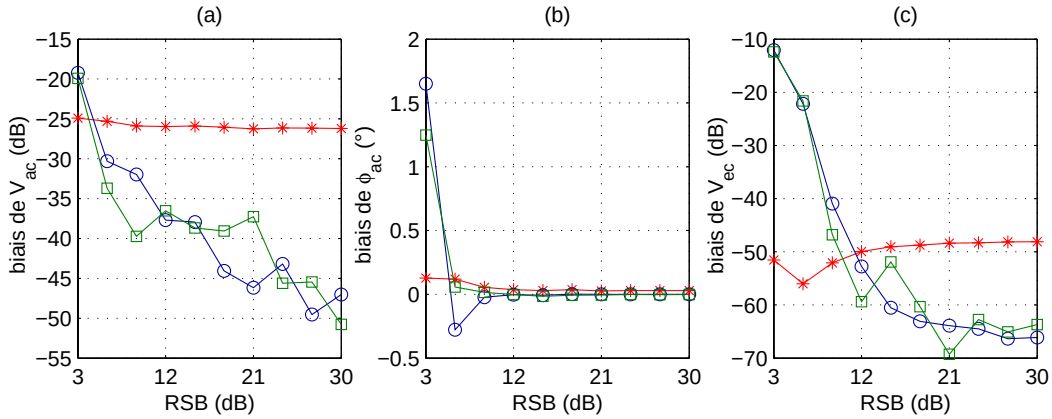

FIG. C.8 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 1000$ Hz, $V_{ac} = 1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

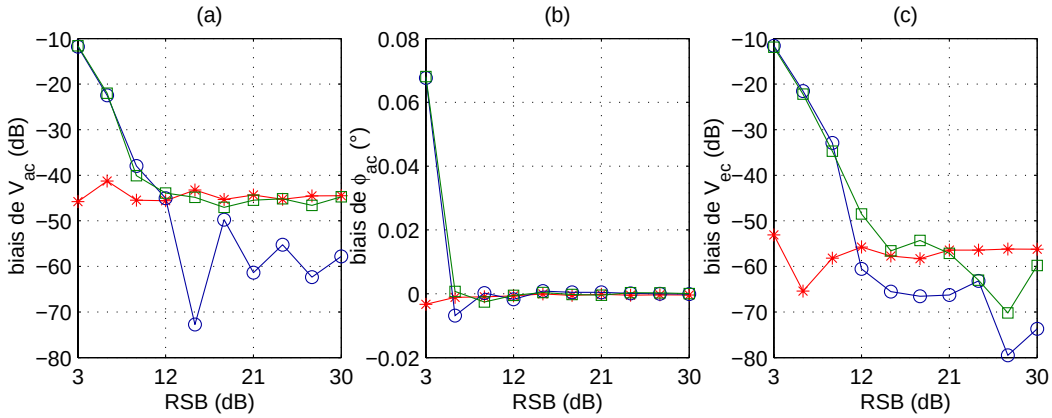

FIG. C.9 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 1000$ Hz, $V_{ac} = 10$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

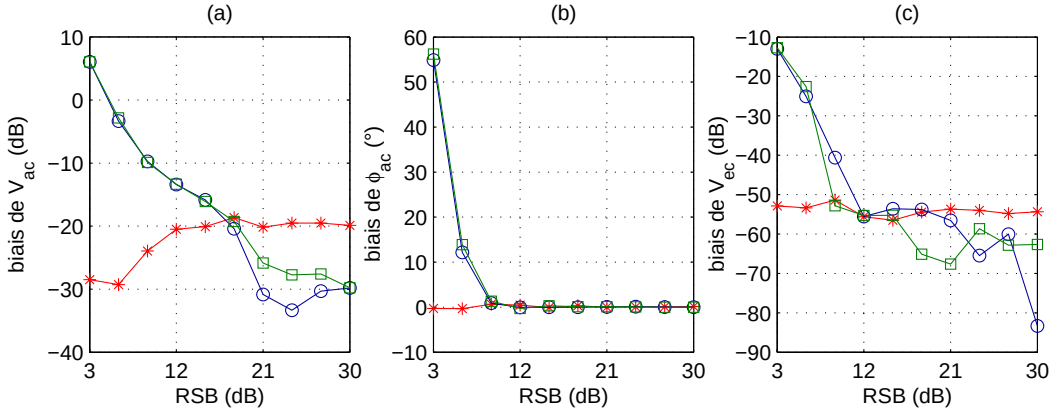

FIG. C.10 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 2000$ Hz, $V_{ac} = 0{,}1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

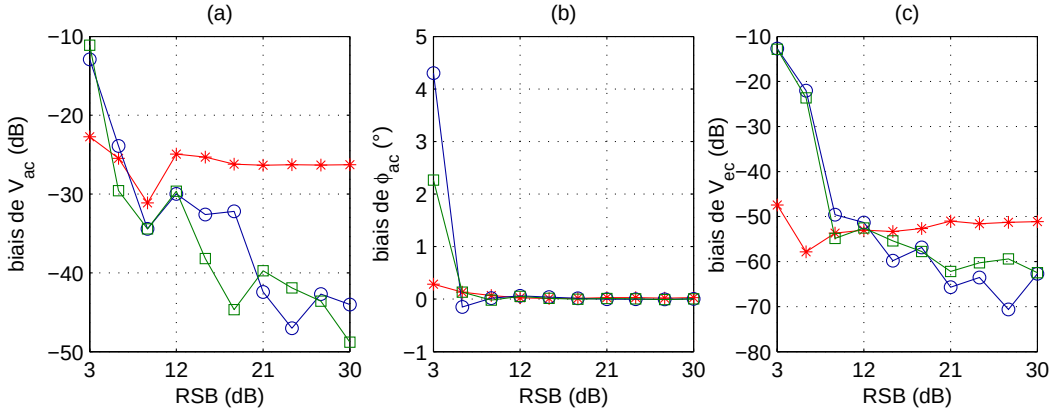

FIG. C.11 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 2000$ Hz, $V_{ac} = 1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

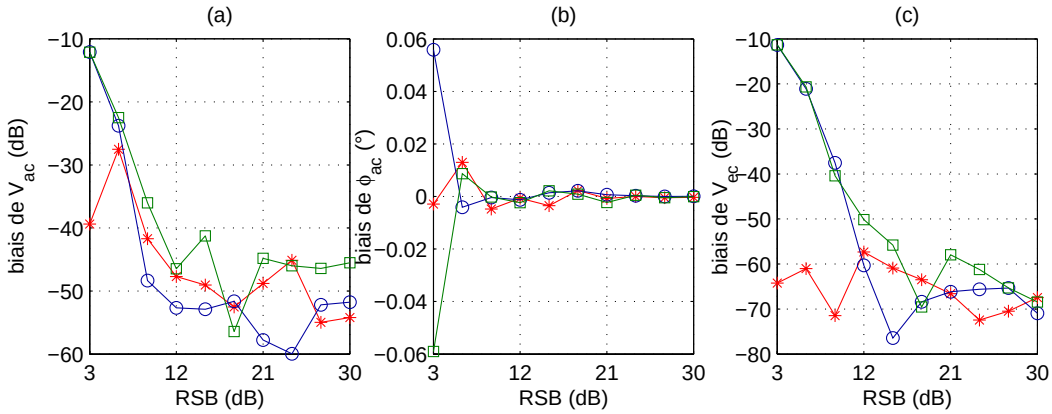

FIG. C.12 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 2000$ Hz, $V_{ac} = 10$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

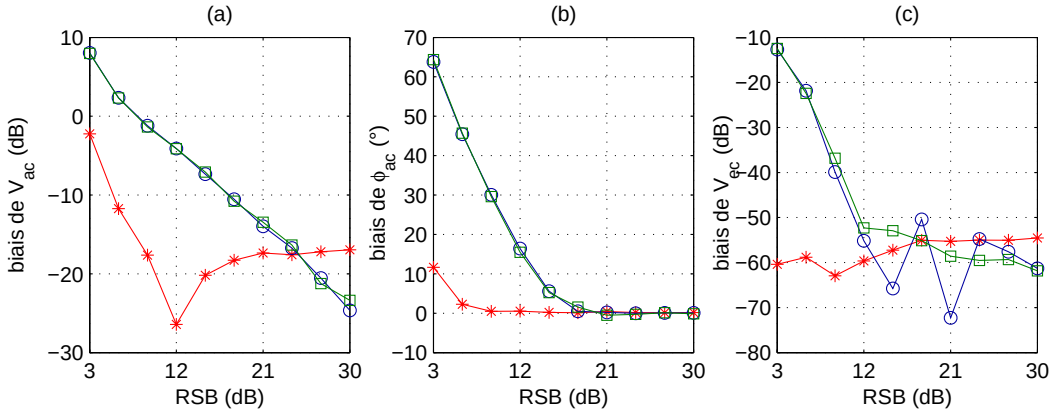

FIG. C.13 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 4000$ Hz, $V_{ac} = 0{,}1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

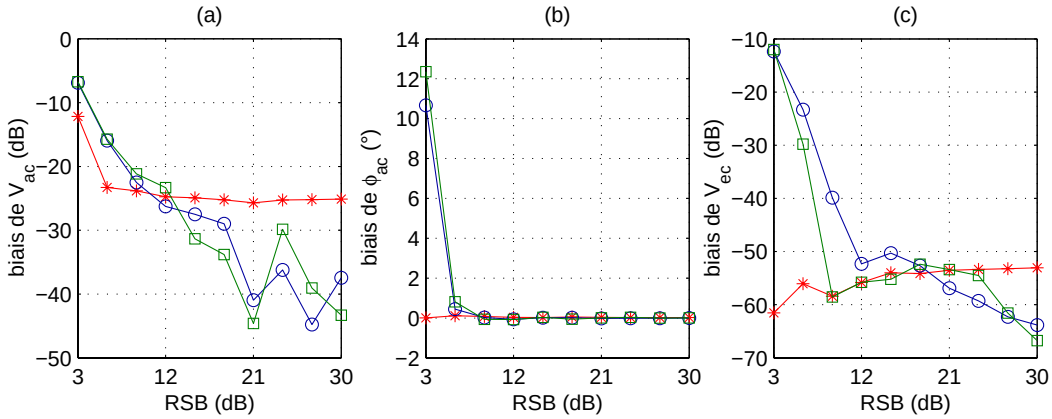

FIG. C.14 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 4000$ Hz, $V_{ac} = 1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

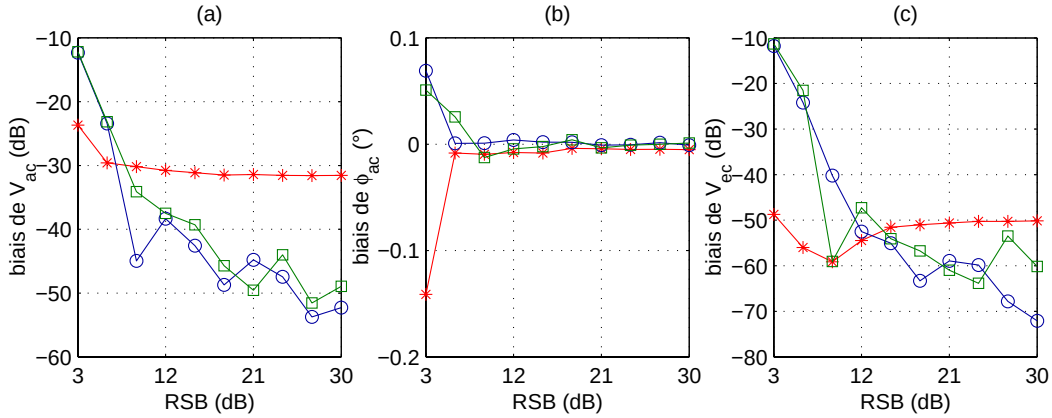

FIG. C.15 – *Biais d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○) *et EKF* (∗) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 4000$ Hz, $V_{ac} = 10$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s. (a) V_{ac}, (b) ϕ_{ac}, (c) V_{ec}.

C.2 Variance des estimateurs

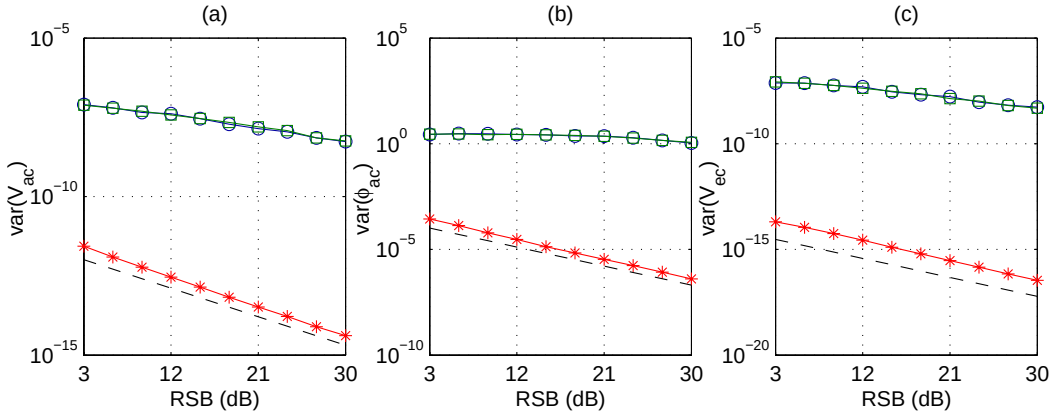

FIG. C.16 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 100$ Hz, $V_{ac} = 0{,}1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

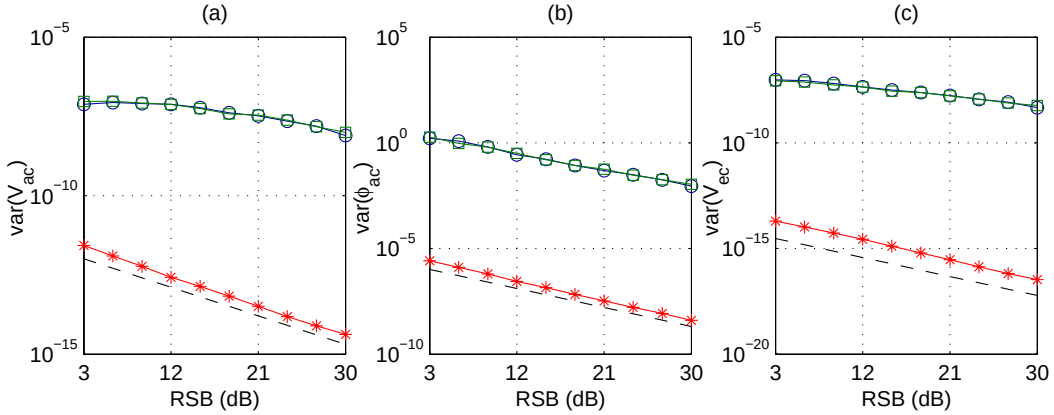

FIG. C.17 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 100$ Hz, $V_{ac} = 1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

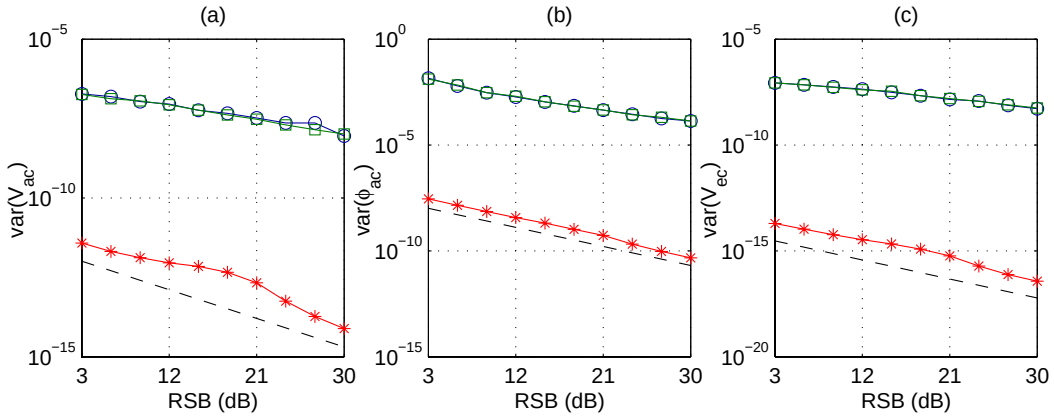

FIG. C.18 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○), *EKF* (∗), *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 100$ Hz, $V_{ac} = 10$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

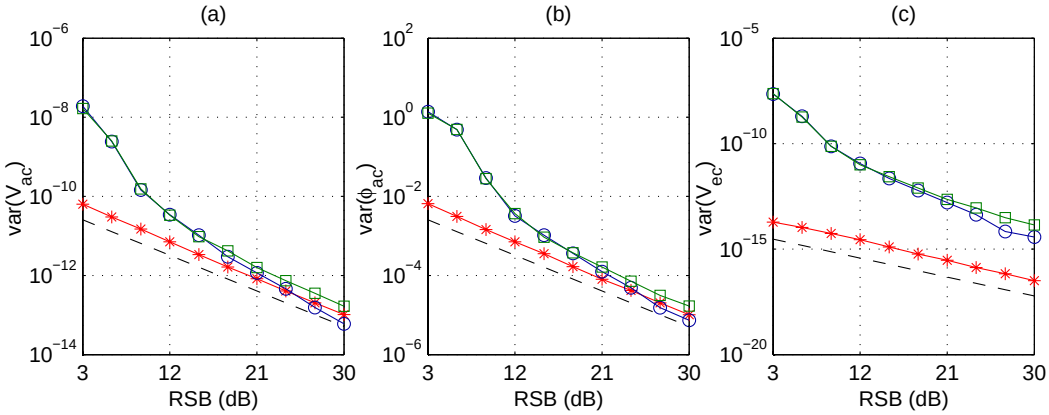

FIG. C.19 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 500$ Hz, $V_{ac} = 0{,}1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

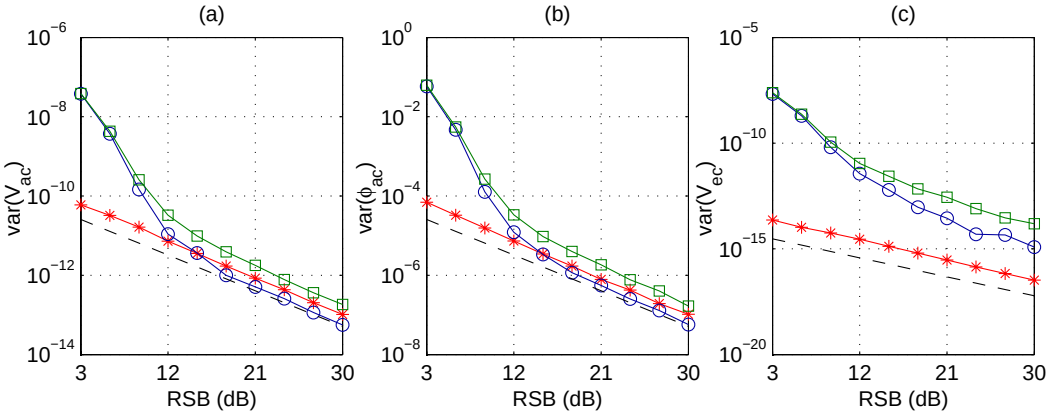

FIG. C.20 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 500$ Hz, $V_{ac} = 1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

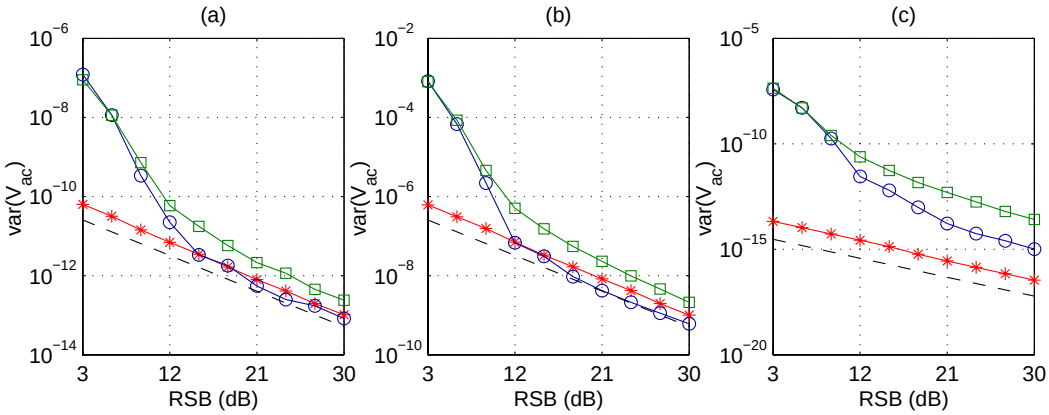

FIG. C.21 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 500$ Hz, $V_{ac} = 10$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

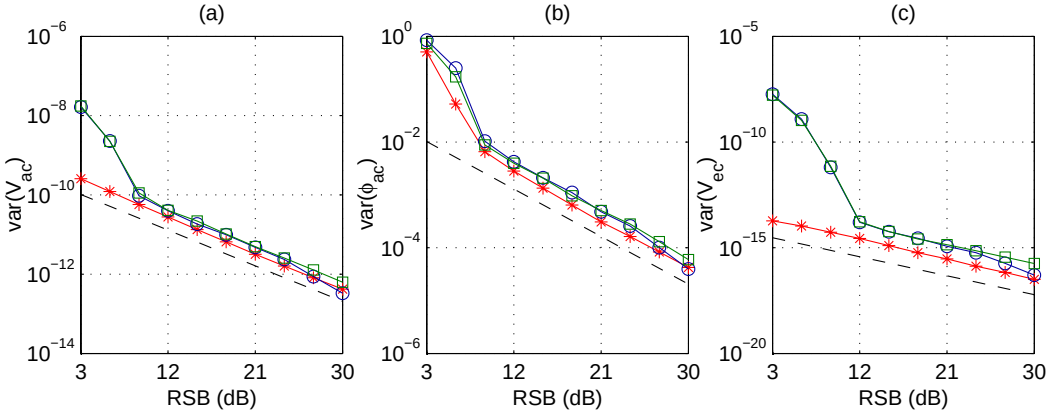

FIG. C.22 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 1000$ Hz, $V_{ac} = 0{,}1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

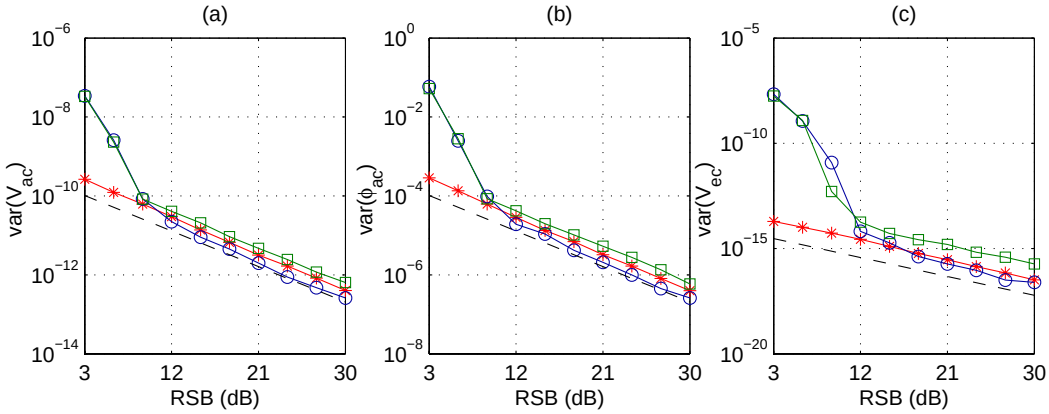

FIG. C.23 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 1000$ Hz, $V_{ac} = 1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

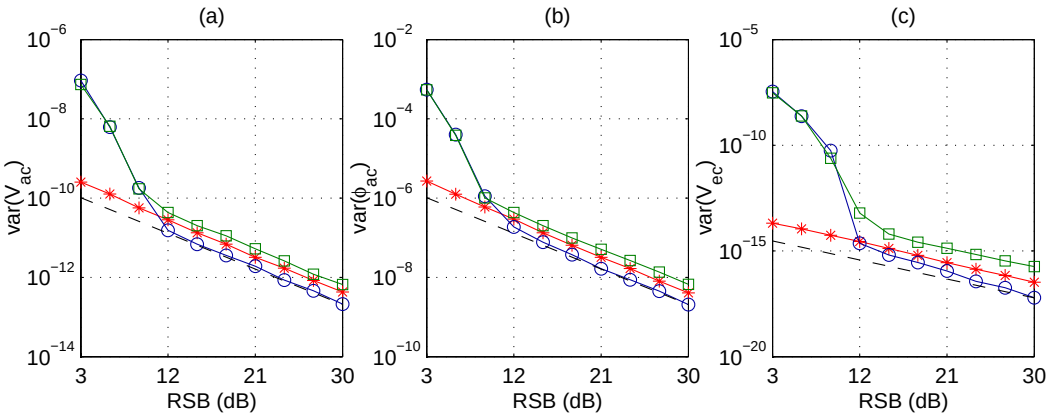

FIG. C.24 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 1000$ Hz, $V_{ac} = 10$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

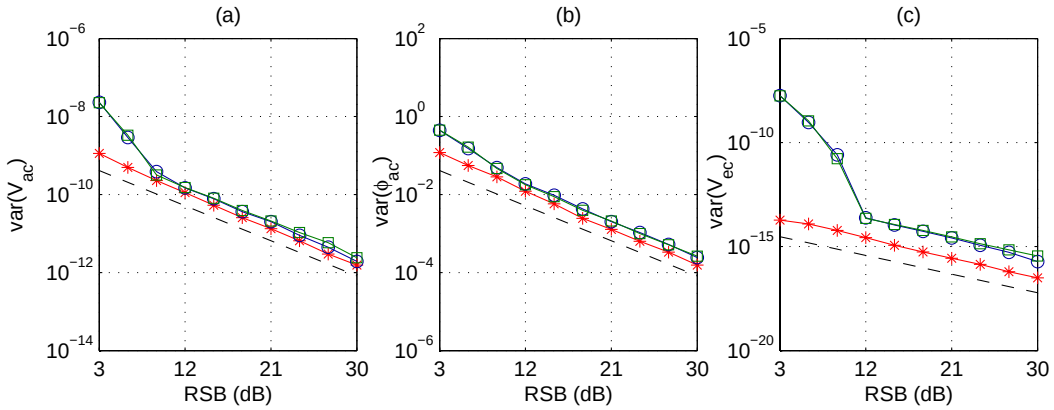

FIG. C.25 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (∘), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 2000$ Hz, $V_{ac} = 0{,}1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

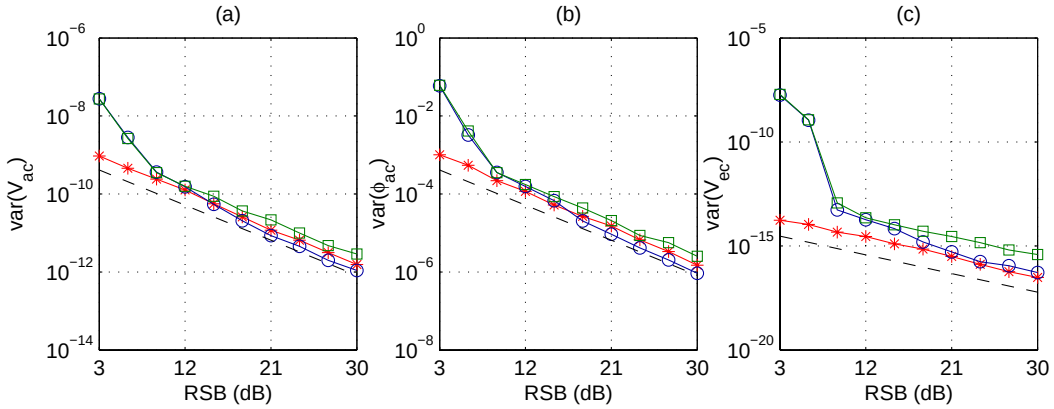

FIG. C.26 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (∘), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 2000$ Hz, $V_{ac} = 1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

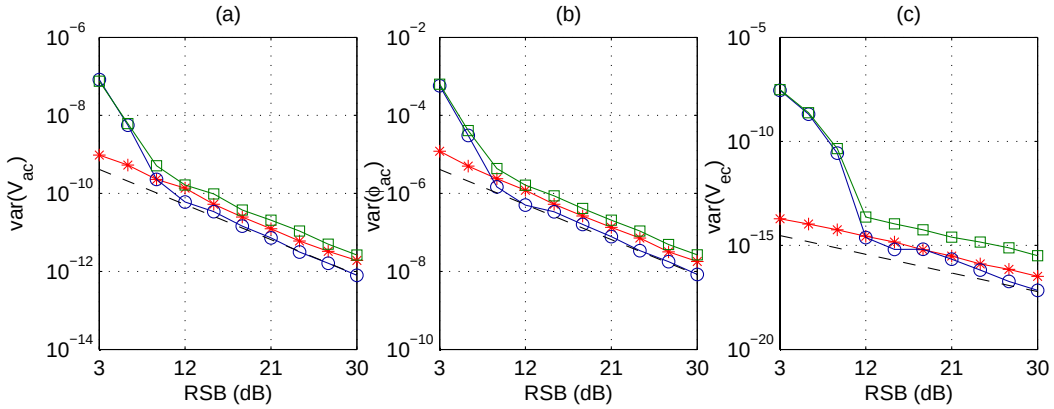

FIG. C.27 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (∘), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 2000$ Hz, $V_{ac} = 10$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

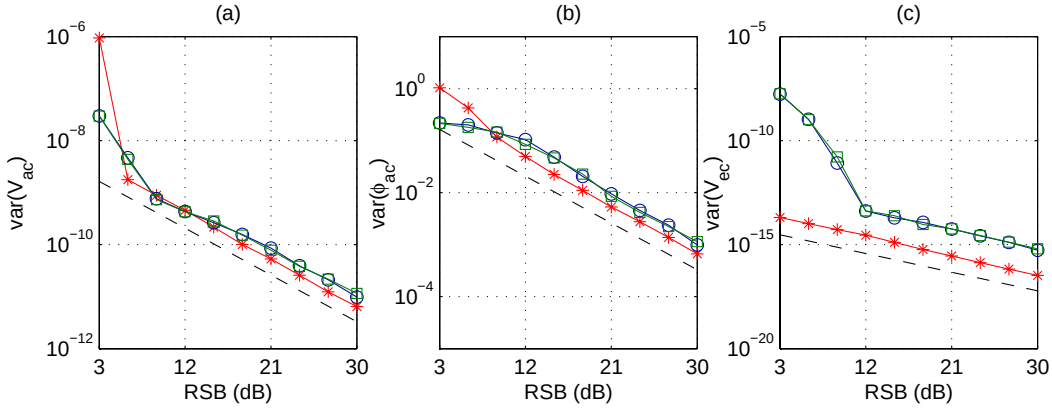

FIG. C.28 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 4000$ Hz, $V_{ac} = 0{,}1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

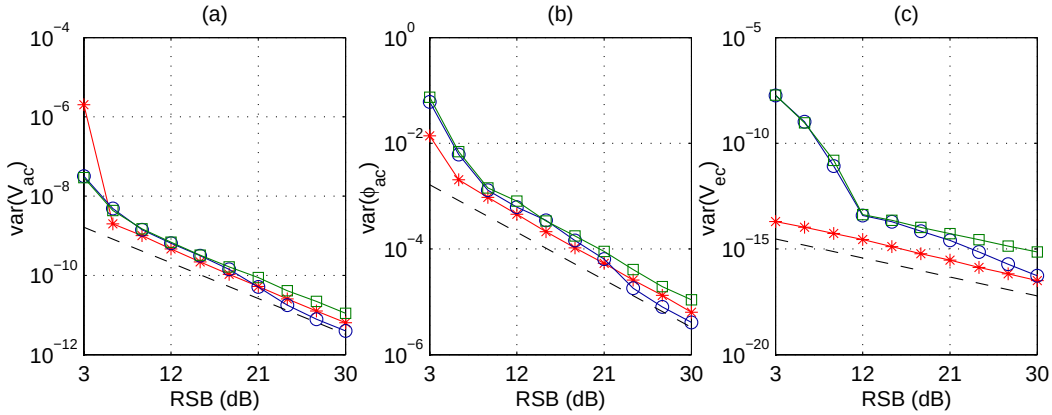

FIG. C.29 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 4000$ Hz, $V_{ac} = 1$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

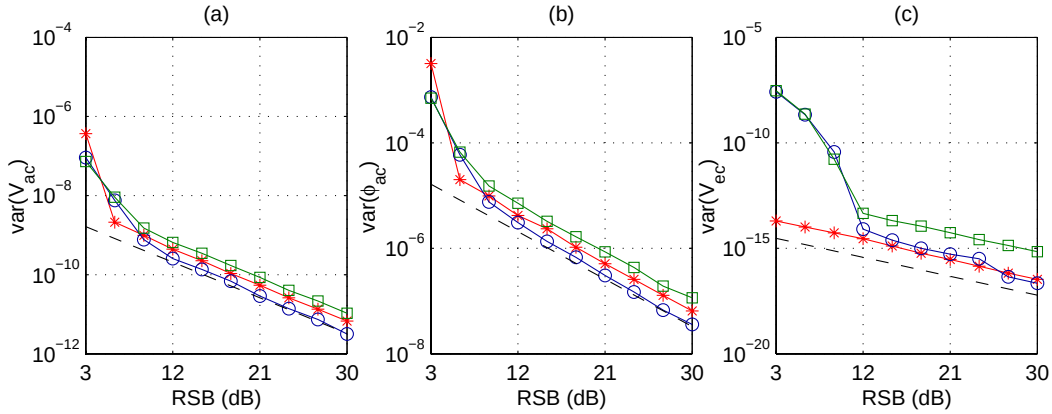

FIG. C.30 – *Variance d'estimation des méthodes PDBE* (□), *MLE* (○), *EKF* (∗) *et CRB* (- -) *en fonction du* RSB. $F_{ac} = 4000$ Hz, $V_{ac} = 10$ mm/s, $V_{ec} = 1{,}2$ mm/s.

Annexe D

Calibration des signaux issus du démodulateur en quadrature

D.1 Introduction

Cette annexe propose l'estimation par maximum de vraisemblance des erreurs des paramètres des signaux issus du démodulateur en quadrature analogique fonctionnant à la fréquence $F_{\mathrm{B}} = 40$ MHz. Ces paramètres, au nombre de 6, sont les amplitudes maximales, les phases initiales et les tensions de décalage (offset) de chacune des deux voies en quadrature.

D.2 Description des signaux d'observation

Le principe de la calibration du démodulateur analogique consiste à appliquer en lieu et place du signal de sortie du photomultiplicateur le signal

$$s_{cal}(t) = A\cos 2\pi F_c t \tag{D.1}$$

d'amplitude A constante et de fréquence F_c issu d'un générateur de signal HF synchrone du signal de démodulation de fréquence $F_{\mathrm{B}} = 40$ MHz.

Dans le cas idéal, *i.e.* en l'absence de défaut du dispositif électronique de démodulation, les deux signaux en quadrature observés à la sortie du démodulateur sont donnés par

$$y_1(t) = A\cos\phi(t) \tag{D.2}$$
$$y_2(t) = A\sin\phi(t) \tag{D.3}$$

avec

$$\phi(t) = 2\pi F_{\mathrm{D}} + \phi_0 \tag{D.4}$$

la phase instantanée et

$$F_{\mathrm{D}} = F_{\mathrm{B}} - F_c \tag{D.5}$$

la fréquence de battement entre les deux générateurs.

Dans la réalité ces deux signaux sont affectés par des erreurs, d'amplitude, de phase et de décalage ainsi que par la présence de bruit additif. En particulier il est impossible d'obtenir deux signaux parfaitement en quadrature. Les versions numériques de ces signaux réels, échantillonnés à la fréquence F_{e}, sont alors données par

$$y_1(k) = A_1\cos\left[2\pi f_{\mathrm{D}} k + \phi_0\right] + D_1 + b_1(k) = s_1(k) + b_1(k) \tag{D.6}$$
$$y_2(k) = A_2\cos\left[2\pi f_{\mathrm{D}} k + \phi_0 + \phi_{12}\right] + D_2 + b_2(k) = s_2(k) + b_2(k) \tag{D.7}$$

avec $f_{\mathrm{D}} = F_{\mathrm{D}}/F_{\mathrm{e}}$ la fréquence de battement réduite. Dans ces relation A_1 et A_2 représentent les amplitudes respectives des deux signaux, D_1 et D_2 les décalages en tension, ϕ_0 la phase initiale et ϕ_{12} la phase relative, proche de $\pi/2$, entre $y_1(k)$ et $y_2(k)$. Les termes $b_1(k)$ et $b_2(k)$ sont deux bruits gaussiens de moyennes nulles et de variances égales respectivement à σ_1 et à σ_2. Par la suite ces variances seront supposées égales, *i.e.* $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Par ailleurs la période d'échantillonnage est $T_{\mathrm{e}} = 1/F_{\mathrm{e}}$ et le nombre d'échantillon est N.

En notant $\phi_{\mathrm{D}} = 2\pi f_{\mathrm{D}} k$ et $\phi_2 = \phi_0 + \phi_{12}$ les équations (D.6) et (D.7) peuvent s'écrivent

$$y_1(k) = A_1 \cos\left[\phi_{\mathrm{D}}(k) + \phi_0\right] + D_1 + b_1(k) \tag{D.8}$$
$$y_2(k) = A_2 \cos\left[\phi_{\mathrm{D}}(k) + \phi_2\right] + D_2 + b_2(k). \tag{D.9}$$

Le problème consiste ici à estimer les paramètres A_1, A_2, D_1, D_2, ϕ_0 et ϕ_2 par la méthode du maximum de vraisemblance. Dans la suite de ce problème la phase $\phi_{\mathrm{D}}(k)$ sera supposée connue à chaque instant, ce qui revient à considérer que la fréquence F_c du générateur de calibration est connue avec suffisamment de précision.

D.3 Nouvelle écriture des équations d'observation

Le jeu d'équations précédent fait apparaître des non-linéarités en ϕ_0 et ϕ_2. Un changement de coordonnées va permettre de linéariser ces expressions et d'écrire

$$s_1(k) = A_1 \cos\phi_{\mathrm{D}}(k)\cos\phi_0 - A_1 \sin\phi_{\mathrm{D}}(k)\sin\phi_0 + D_1 \tag{D.10}$$
$$s_2(k) = A_2 \cos\phi_{\mathrm{D}}(k)\cos\phi_2 - A_2 \sin\phi_{\mathrm{D}}(k)\sin\phi_2 + D_2. \tag{D.11}$$

En notant

$$A_1 \cos\phi_0 = R_1 \tag{D.12}$$
$$A_1 \sin\phi_0 = I_1 \tag{D.13}$$
$$A_2 \cos\phi_2 = R_2 \tag{D.14}$$
$$A_2 \sin\phi_2 = I_2 \tag{D.15}$$

ainsi que

$$\cos\phi_{\mathrm{D}}(k) = C_D(k) \tag{D.16}$$
$$\sin\phi_{\mathrm{D}}(k) = S_D(k) \tag{D.17}$$

les équations (D.10) et (D.11) deviennent

$$s_1(k) = R_1 C_D(k) - I_1 S_D(k) + D_1 \tag{D.18}$$
$$s_2(k) = R_2 C_D(k) - I_2 S_D(k) + D_2. \tag{D.19}$$

D.3.1 Vecteur des paramètres du signal d'observation

Ce vecteur regroupe les six paramètres à estimer :

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{cal}} = [R_1, I_1, D_1, R_2, I_2, D_2]^T = [\theta_{1_{\mathrm{cal}}}, \theta_{2_{\mathrm{cal}}}, \theta_{3_{\mathrm{cal}}}, \theta_{4_{\mathrm{cal}}}, \theta_{5_{\mathrm{cal}}}, \theta_{6_{\mathrm{cal}}}]^T. \tag{D.20}$$

Les paramètres des signaux en quadrature s'obtiennent alors à l'aide des transformations

$$A_1 = \sqrt{R_1^2 + I_1^2} \tag{D.21}$$

$$A_2 = \sqrt{R_2^2 + I_2^2} \tag{D.22}$$

$$\phi_0 = \arctan \frac{I_1}{R_1} \tag{D.23}$$

$$\phi_2 = \arctan \frac{I_2}{R_2}. \tag{D.24}$$

D.3.2 Fonction de densité de probabilité (DdP) du signal d'observation

En supposant que les bruits d'observation $b_1(k)$ et $b_2(k)$ sont de nature gaussienne et additive la DdP des observations est donnée par

$$p(\mathbf{y_1}; \boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}) = \prod_{k=1}^{k=N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_1(k) - s_1(k)]^2\right\} \tag{D.25}$$

$$p(\mathbf{y_2}; \boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}) = \prod_{k=1}^{k=N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_2(k) - s_2(k)]^2\right\}. \tag{D.26}$$

Comme $y_1(k)$ et $y_2(k)$ sont indépendants il vient

$$p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}) = p(\mathbf{y_1}; \boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}) \cdot p(\mathbf{y_2}; \boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}) \tag{D.27}$$

d'où

$$p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}) = \prod_{k=1}^{k=N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_1(k) - s_1(k)]^2\right\} \times \prod_{k=1}^{k=N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_2(k) - s_2(k)]^2\right\} \tag{D.28}$$

$$= \prod_{k=1}^{k=N} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_1(k) - s_1(k)]^2 - \frac{1}{2\sigma^2}[y_2(k) - s_2(k)]^2\right\} \tag{D.29}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^N} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{k=N} \left\{-[y_1(k) - s_1(k)]^2 - [y_2(k) - s_2(k)]^2\right\}\right]. \tag{D.30}$$

D.3.3 Fonction de vraisemblance logarithmique

La fonction logarithmique étant monotone il est souvent plus facile de travailler à partir de la fonction de vraisemblance logarithmique donnée par

$$\wedge(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}) = \ln\left[p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})\right] \tag{D.31}$$

d'où

$$\wedge(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}) = -N \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{k=N} \left\{-[y_1(k) - s_1(k)]^2 - [y_2(k) - s_2(k)]^2\right\}. \tag{D.32}$$

Pour définir l'estimateur par maximum de vraisemblance il faut déterminer le vecteur paramètres $\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}$ qui rend maximum la fonction de vraisemblance. Comme $\wedge(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})$ est une fonction quadratique linéaire des paramètres $\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}$, sa maximisation se réduit à un problème des moindres-carrés. L'estimateur par maximum de vraisemblance apparaît alors comme la solution de la minimisation de la fonction

$$J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}}) = \sum_{k=1}^{k=+N} \left\{ [y_1(k) - s_1(k)]^2 + [y_2(k) - s_2(k)]^2 \right\}. \tag{D.33}$$

Les estimées sur chacun des paramètres $\boldsymbol{\theta}_{i_{\text{cal}}}$ s'obtiennent lorsque les différentes dérivées partielles de la fonction $J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})$ par rapport aux paramètres $\boldsymbol{\theta}_{i_{\text{cal}}}$ s'annulent, *i.e.* quand

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{i_{\text{cal}}}} = 0. \tag{D.34}$$

Or

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{i_{\text{cal}}}} = 2 \sum_{k=1}^{k=N} \left\{ [y_1(k) - s_1(k)] \frac{\partial s_1(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_{i_{\text{cal}}}} + [y_2(k) - s_2(k)] \frac{\partial s_2(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_{i_{\text{cal}}}} \right\}. \tag{D.35}$$

Dans un premier temps il convient d'évaluer les différentes dérivées partielles des signaux $s_1(k)$ et $s_2(k)$. Celles-ci sont données par

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial s_1(k)}{\partial \theta_{1_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial s_1(k)}{\partial R_1} & = & +C_D(k) \\
\dfrac{\partial s_1(k)}{\partial \theta_{2_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial s_1(k)}{\partial I_1} & = & -S_D(k) \\
\dfrac{\partial s_1(k)}{\partial \theta_{3_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial s_1(k)}{\partial D_1} & = & 1 \\
\dfrac{\partial s_1(k)}{\partial \theta_{4_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial s_1(k)}{\partial R_2} & = & 0 \\
\dfrac{\partial s_1(k)}{\partial \theta_{5_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial s_1(k)}{\partial I_2} & = & 0 \\
\dfrac{\partial s_1(k)}{\partial \theta_{6_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial s_1(k)}{\partial D_2} & = & 0
\end{array} \tag{D.36}$$

et

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial s_2(k)}{\partial \theta_{1_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial s_2(k)}{\partial R_1} & = & 0 \\
\dfrac{\partial s_2(k)}{\partial \theta_{2_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial s_2(k)}{\partial I_1} & = & 0 \\
\dfrac{\partial s_2(k)}{\partial \theta_{3_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial s_2(k)}{\partial D_1} & = & 0 \\
\dfrac{\partial s_2(k)}{\partial \theta_{4_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial s_2(k)}{\partial R_2} & = & +C_D(k) \\
\dfrac{\partial s_2(k)}{\partial \theta_{5_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial s_2(k)}{\partial I_2} & = & -S_D(k) \\
\dfrac{\partial s_2(k)}{\partial \theta_{6_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial s_2(k)}{\partial D_2} & = & 1.
\end{array} \tag{D.37}$$

Ces résultats conduisent aux dérivées partielles de la fonction $J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})$ qui sont alors données par

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial \theta_{1_{\text{cal}}}} = \frac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial R_1} = 2 \sum_{k=1}^{k=N} \left\{ [y_1(k) - s_1(k)] C_D(k) \right\}. \tag{D.38}$$

En annulant cette dérivée,

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial \theta_{1_{\text{cal}}}} = \frac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial R_1} = 0. \tag{D.39}$$

On obtient alors

$$\sum_{k=1}^{k=N} s_1(k) C_D(k) = \sum_{k=1}^{k=N} y_1(k) C_D(k). \tag{D.40}$$

En remplaçant $s_1(k)$ par l'expression (D.18) la relation (D.40) devient

$$R_1 \sum_{k=1}^{k=N} C_D^2(k) - I_1 \sum_{k=1}^{k=N} S_D(k) C_D(k) + D_1 \sum_{k=1}^{k=N} C_D(k) = \sum_{k=1}^{k=N} y_1(k) C_D(k). \tag{D.41}$$

De même la façon la réalisation des calculs successifs

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial \theta_{2_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial I_1} & = & 0 \\
\dfrac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial \theta_{3_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial D_1} & = & 0 \\
\dfrac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial \theta_{4_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial R_2} & = & 0 \\
\dfrac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial \theta_{5_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial I_2} & = & 0 \\
\dfrac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial \theta_{6_{\text{cal}}}} = \dfrac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_{\text{cal}})}{\partial D_2} & = & 0
\end{array} \tag{D.42}$$

conduit aux équations

$$\begin{array}{rcrcrcl}
R_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} S_D(k) C_D(k) & - & I_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} S_D^2(k) & + & D_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} S_D(k) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} y_1(k) S_D(k) \\
R_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} C_D(k) & - & I_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} S_D(k) & + & N D_1 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} y_1(k)
\end{array} \tag{D.43}$$

et

$$\begin{array}{rcrcrcl}
R_2 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} C_D^2(k) & - & I_2 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} S_D(k) C_D(k) & + & D_2 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} C_D(k) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} y_2(k) C_D(k) \\
R_2 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} S_D(k) C_D(k) & - & I_2 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} S_D^2(k) & + & D_2 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} S_D(k) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} y_2(k) S_D(k) \\
R_2 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} C_D(k) & - & I_2 \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} S_D(k) & + & N D_2 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} y_2(k).
\end{array} \tag{D.44}$$

Ces relations forment un système de six équations à six inconnues qui peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\theta}_{\text{cal}} = \mathbf{Y} \tag{D.45}$$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} +M_1 & -M_2 & +M_3 & 0 & 0 & 0 \\ +M_2 & -M_4 & +M_5 & 0 & 0 & 0 \\ +M_3 & -M_5 & N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +M_1 & -M_2 & +M_3 \\ 0 & 0 & 0 & +M_2 & -M_4 & +M_5 \\ 0 & 0 & 0 & +M_3 & -M_5 & N \end{bmatrix} \tag{D.46}$$

et

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{1C} \\ Y_{1S} \\ Y_1 \\ Y_{2C} \\ Y_{2S} \\ Y_2 \end{bmatrix}. \tag{D.47}$$

Les éléments de la matrice $\mathbf{M}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{k=1}^{k=N} C_D^2(k) \\ M_2 &= \sum_{k=1}^{k=N} S_D(k) C_D(k) \\ M_3 &= \sum_{k=1}^{k=N} C_D(k) \\ M_4 &= \sum_{k=1}^{k=N} S_D^2(k) \\ M_5 &= \sum_{k=1}^{k=N} S_D(k) \end{aligned} \tag{D.48}$$

et ceux du vecteur $\mathbf{Y}$ par

$$\begin{aligned} Y_{1C} &= \sum_{k=1}^{k=N} y_1(k) C_D(k) \\ Y_{1S} &= \sum_{k=1}^{k=N} y_1(k) S_D(k) \\ Y_1 &= \sum_{k=1}^{k=N} y_1(k) \\ Y_{2C} &= \sum_{k=1}^{k=N} y_2(k) C_D(k) \\ Y_{2S} &= \sum_{k=1}^{k=N} y_2(k) S_D(k) \\ Y_2 &= \sum_{k=1}^{k=N} y_2(k). \end{aligned} \tag{D.49}$$

Le calcul des différents coefficients M_i peut se simplifier en évaluant les différentes sommes. Par exemple M_1 s'obtient par

$$M_1 = \sum_{k=1}^{k=N} C_D^2(k) = \sum_{k=1}^{k=N} \cos^2 \omega_{\mathrm{D}} k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N} (\cos 2\omega_{\mathrm{D}} k + 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N} \cos 2\omega_{\mathrm{D}} k + \frac{N}{2}. \tag{D.50}$$

Grâce aux formules d'Euler M_1 peut encore s'écrire

$$M_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N} [\exp(-j2\omega_{\mathrm{D}} k) + \exp(j2\omega_{\mathrm{D}} k)] + \frac{N}{2}. \tag{D.51}$$

Cette dernière expression fait apparaître deux suites géométriques de raison $j2\omega_{\mathrm{D}}$. Il est alors possible d'écrire

$$M_1 = \frac{1}{2} \left[\exp(-j2\omega_{\mathrm{D}}) \cdot \frac{\exp(-j2\omega_{\mathrm{D}} N) - 1}{\exp(-j2\omega_{\mathrm{D}}) - 1} + \exp(j2\omega_{\mathrm{D}}) \cdot \frac{\exp(j2\omega_{\mathrm{D}} N) - 1}{\exp(j2\omega_{\mathrm{D}}) - 1} \right] + \frac{N}{2} \tag{D.52}$$

ce qui donne, après réduction au même dénominateur et regroupement

$$M_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 2\omega_{\mathrm{D}} + \cos 2\omega_{\mathrm{D}} N - \cos 2\omega_{\mathrm{D}}(N+1) - 1}{1 - \cos 2\omega_{\mathrm{D}}} + \frac{N}{2}. \tag{D.53}$$

En procédant de la même façon pour M_2, M_3, M_4 et M_5 il vient

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 2\omega_{\mathrm{D}} + \sin 2\omega_{\mathrm{D}} N - \sin 2\omega_{\mathrm{D}}(N+1)}{1 - \cos 2\omega_{\mathrm{D}}} \\
M_3 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \omega_{\mathrm{D}} + \cos \omega_{\mathrm{D}} N - \cos \omega_{\mathrm{D}}(N+1) - 1}{1 - \cos \omega_{\mathrm{D}}} \\
M_4 &= \frac{N}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 2\omega_{\mathrm{D}} + \cos 2\omega_{\mathrm{D}} N - \cos 2\omega_{\mathrm{D}}(N+1) - 1}{1 - \cos 2\omega_{\mathrm{D}}} \\
M_5 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin \omega_{\mathrm{D}} + \sin \omega_{\mathrm{D}} N - \sin \omega_{\mathrm{D}}(N+1)}{1 - \cos \omega_{\mathrm{D}}}.
\end{aligned} \tag{D.54}$$

D.3.4 Cas particulier où le signal enregistré contient un nombre entier de périodes

La matrice $\mathbf{M}$ se simplifie dans le cas particulier où le quantité N d'échantillons retenus correspond à un nombre entier de périodes des signaux en quadrature. En effet, dans ce cas $NT_e/T_{\mathrm{D}} = n$ avec $n \in \mathbb{Z}^+$ et $T_{\mathrm{D}} = 1/F_{\mathrm{D}}$. Ainsi

$$\omega_{\mathrm{D}} N = 2\pi f_{\mathrm{D}} N = 2\pi F_{\mathrm{D}}/F_{\mathrm{e}} = 2\pi T_{\mathrm{e}}/T_{\mathrm{D}} = 2\pi n. \tag{D.55}$$

Les différents coefficients M_i deviennent

$$M_1 = \frac{N}{2} \; ; \; M_2 = 0 \; ; \; M_3 = 0 \; ; \; M_4 = \frac{N}{2} \; ; \; M_5 = 0. \tag{D.56}$$

La matrice $\mathbf{M}$ est alors diagonale et s'écrit

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
+\frac{N}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{N}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & +N & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & +\frac{N}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{N}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +N
\end{bmatrix}. \tag{D.57}$$

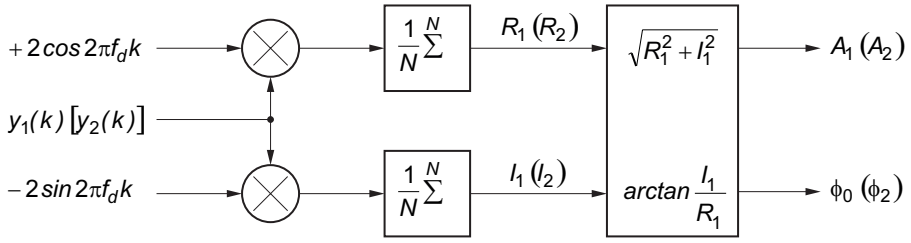

FIG. D.1 – *Estimation optimale de l'amplitude et de la phase d'un signal sinusoïdal lorsque le nombre d'échantillons correspond à un nombre entier de périodes.*

La résolution du système est alors immédiate et donne

$$\begin{aligned} R_1 &= +\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} y_1(k)\cos 2\pi f_{\mathrm{D}} k \\ I_1 &= -\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} y_1(k)\sin 2\pi f_{\mathrm{D}} k \\ D_1 &= +\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_1(k) \\ R_2 &= +\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} y_2(k)\cos 2\pi f_{\mathrm{D}} k \\ I_2 &= -\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} y_2(k)\sin 2\pi f_{\mathrm{D}} k \\ D_2 &= +\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_2(k). \end{aligned} \tag{D.58}$$

Ce cas particulier permet de retrouver les estimateurs optimaux classiques d'amplitude et de phase basés sur la démodulation en quadrature synchronisée sur la fréquence f_{D}. Ceux-ci sont résumés par la figure D.1. Les décalages en tension sur chacune des voies sont alors estimés de façon optimale en calculant la moyenne des valeurs des échantillons.

D.3.5 Cas général où le nombre d'échantillons ne correspond pas à un nombre entier de période

Dans ce cas de figure il n'est pas indispensable d'inverser formellement la matrice $\mathbf{M}$ cette opération conduisant à des calculs fastidieux et donnant lieu à des expressions compliquées. La recherche des paramètres passe alors par la résolution numérique du système de six équations à six inconnues (D.45)

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{cal}} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{Y}. \tag{D.59}$$

Cette opération permet alors de déterminer l'estimée du vecteur $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{cal}} = \left[\widehat{R}_1,\widehat{I}_1,\widehat{D}_1,\widehat{R}_2,\widehat{I}_2,\widehat{D}_2\right]^T$ et d'en déduire les estimations

$$\widehat{A}_1 = \sqrt{\widehat{R}_1^2 + \widehat{I}_1^2} \tag{D.60}$$

$$\widehat{A}_2 = \sqrt{\widehat{R}_2^2 + \widehat{I}_2^2} \tag{D.61}$$

$$\widehat{\phi}_0 \quad = \quad \arctan \frac{\widehat{I}_1}{\widehat{R}_1} \tag{D.62}$$

et

$$\widehat{\phi}_2 = \arctan \frac{\widehat{I}_2}{\widehat{R}_2}. \tag{D.63}$$

La phase relative entre les deux voies en quadrature s'exprime alors

$$\widehat{\phi}_{12} = \widehat{\phi}_2 - \widehat{\phi}_0. \tag{D.64}$$

Contribution à l'estimation paramétrique de signaux à variation sinusoïdale de la fréquence instantanée et à amplitude variable : application à l'anémométrie laser Doppler pour l'acoustique

Résumé : L'anémométrie laser à effet Doppler (ALD), dont l'utilisation est très répandue en mécanique des fluides, peut aussi être utilisée pour la mesure de vitesse particulaire acoustique. La nature vectorielle de cette grandeur permet de caractériser les champs à structure complexe ce qui autorise, par exemple, l'étude de phénomènes acoustiques au voisinage de parois vibrantes ou de discontinuités géométriques. L'ALD offre, pour ce type de problème, le double avantage de présenter une bonne résolution spatiale de la mesure et de ne perturber que faiblement le champ à explorer.

Le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine est équipé d'un banc de mesure conçu pour la mesure de vitesse acoustique. Depuis près de huit ans, les recherches se sont orientées vers la validation expérimentale de cette technique ainsi que vers l'élaboration de méthodes de traitement des signaux propres à extraire la vitesse particulaire dans un contexte de traitement différé et avec l'hypothèse d'un signal Doppler d'amplitude constante. Cependant, pour que l'ALD soit exploitable efficacement il est indispensable de concevoir un système de mesure, simple d'utilisation, permettant d'accéder rapidement à la vitesse acoustique et prenant en compte la nature variable de l'amplitude du signal Doppler.

L'objectif de cette étude est donc de proposer des méthodes de traitement du signal adaptées à l'estimation de la vitesse particulaire acoustique, dans le cas d'une excitation sinusoïdale, et de définir une architecture matérielle et logicielle indispensable à cette mesure. Celle-ci s'opère à partir des composantes en phase et en quadrature du signal Doppler ramenées en bande de base à l'aide d'un dispositif de démodulation analogique spécialement développé pour cette application. Trois estimateurs sont alors proposés : le premier est basé sur le calcul de la dérivée de la phase du signal Doppler. Sa principale vocation consiste à initialiser une deuxième méthode d'estimation basée sur la recherche du maximum de vraisemblance. Le filtrage de Kalman étendu constitue la troisième méthode explorée. Enfin, les formes analytiques, approchées mais précises, des bornes de Cramer-Rao montrent l'influence des paramètres du problème sur la qualité des estimations. Par la suite, des simulations statistiques de Monte-Carlo permettent d'évaluer la qualité des trois méthodes. Une estimation sommaire des complexités algorithmiques des estimateurs complète également cette phase d'évaluation.

Enfin, la validation expérimentale des techniques d'estimation s'articule autour de deux expériences. Dans un premier temps, la mesure de la vitesse de déplacement sinusoïdale d'une pointe d'aiguille montée dans un pot vibrant permet de confronter les résultats obtenus par ALD à ceux que donne un vibromètre laser. Dans un second temps, la mesure de vitesses particulaires acoustiques rayonnées par un haut-parleur électrodynamique, est proposée. Les valeurs issues de la mesure en champ libre par ALD sont alors comparées à celles des vitesses de référence obtenues à l'aide de la méthode du doublet microphonique.

Mots clés : Anémométrie laser Doppler, vitesse particulaire acoustique, maximum de vraisemblance, filtre de Kalman étendu, borne de Cramer-Rao, fréquence instantanée, démodulation en quadrature, détection synchrone, mesure, instrumentation.

Contribution to parametric estimation of signals with sinusoidal frequency modulation and time-varying amplitude: application to laser Doppler anemometry in acoustics

Abstract : Laser Doppler Anemometry (LDA), which is widely used in fluid mechanics, can also be used in order to measure acoustic particle velocity. The knowledge of this vector quantity could be especially useful to characterize a complex acoustic field, allowing for example the study of phenomena close to vibrating surfaces or around duct discontinuities. In addition, LDA ensures, for this kind of problem, theoretically non-invasive velocity measurements with an excellent spatial resolution.
The *Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine* is equipped with a system designed for acoustic velocity measurement. For nearly eight years, research has been directed towards the experimental assessment of this technique and the development of signal processing methods based on post-processing techniques, with the assumption of a constant amplitude Doppler signal.
However, in order to design a more integrated set-up, furthermore easy to manipulate, it is essential to design a system providing real-time measurements of acoustic velocity and taking into account the varying amplitude of the Doppler signal.
This research work offers signal processing methods adapted to the estimation of acoustic particle velocity, for a sine-wave excitation, and defines hardware and software architectures suited to this measurement. The latter is performed with the help of the in-phase and the quadrature components of the Doppler signal, which is downshifted thanks to an analog quadrature demodulation technique especially designed for this application. Three estimators are then proposed: the first is based on the Doppler phase derivation, and is the starting point of a second method based on maximum likelihood estimation. The extended Kalman filter is the third method explored . Finally , the approximated, though accurate, analytical forms of the Cramer-Rao bounds show the influence of the parameters on the quality of the estimations. Estimator performance is then illustrated by means of statistical Monte-Carlo simulations. An assessment of the complexity of these algorithms also supplements this evaluation.
Finally, the assessment of the estimation technique is obtained thanks to two experiments. Firstly, the measurement of the sinusoidal velocity of the displacement of a needle assembled in a vibration exciter allows the comparison of the results obtained by LDA with those obtained with a laser vibrometer. Then, the measurement of the acoustic particle velocity field radiated by a loudspeaker, is proposed. The measurements obtained in free field by LDA are then compared with the reference velocities obtained using a sound intensity probe.

Keywords : Laser Doppler Anemometry, acoustic particle velocity, Maximum Likelihood Estimator, Extended Kalman Filter, Cramer-Rao Bounds, Instantaneous Frequency, quadrature demodulation, lock-in detection, measurement, instrumentation.